$$\begin{cases} -2\alpha\beta B + a(\beta^2-\alpha^2)F^-(i\alpha) + \alpha D(\alpha+\beta)e^{(\alpha-\beta)a} + i\alpha\beta B_1 + \beta C_1 = 0 \\ a(\beta^2-\alpha^2)F^-(-i\alpha) - \alpha D(\alpha-\beta)e^{-(\alpha+\beta)a} - i\alpha\beta B_1 + \beta C_1 = 0 \\ \beta(\alpha^2-\beta^2)G^+(i\beta) + \beta(\alpha-\beta)Ae^{-(\beta+\alpha)a} + i\beta^2 B_1 + \beta C_1 = 0 \\ \beta(\alpha^2-\beta^2)G^+(-i\beta) + \beta(\alpha+\beta)Ae^{(\beta-\alpha)a} - i\beta^2 B_1 + \beta C_1 - 2\alpha\beta C = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Подставляем $\Phi^-(z)$ в (20) либо $\Phi^+(z)$ в (21). Имеем

$$P(z) = \frac{z^2+\alpha^2}{2\alpha}G^+(z) + \frac{z^2+\beta^2}{2\beta}F^-(z) + \frac{A(iz+\alpha)}{2\alpha}e^{(iz-\alpha)a} - \\ - \frac{D(iz-\beta)}{2\beta}e^{-(iz+\beta)a} + \frac{B_1 z + C_1}{2\alpha}. \tag{29}$$

В силу того что однородная задача (1) и (2) имеет нулевое решение, возможны два случая:

1. Из условий (28), а также из условия принадлежности правой части (29) классу E_a значения констант B, C, B_1, C_1 определяются однозначно. Тогда исходная задача (14) и (15) разрешима и имеет единственное решение, которое находится по функции $P(z)$ с помощью обратного преобразования Фурье.

2. Не существует таких значений констант B, C, B_1, C_1, при которых выполняются условия (28) и условие принадлежности правой части (29) классу E_a. Тогда исходная задача (14) и (15) не имеет решения.

1. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., 1964. С. 25.

Поступила в редакцию 27.02.2002.

Юрий Григорьевич Рулинский – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций И.Л. Васильев.

УДК 517.9

Д.Е. РИНГЕЛЬ

МНЕМОЧИСЛА И МНЕМОВЕКТОРЫ. I

To study the rings of mnemonumbers we introduce the mnemofication functor from the category of normed spaces over non-trivially normed field into the category of ultra-metric Banach modules over ring of mnemonumbers. We found a complete non-trivially normed subfield in the ring of mnemonumbers isomorphic to the field of formal power series with coefficient in the basic field, so the ring of mnemonumbers is Banach algebra over it and corresponding modules are Banach spaces.

Нелинейные обобщенные функции впервые возникли в работах Ж.Ф. Коломбо [1] в связи с проблемой умножения распределений. Затем Ю.В. Егоров [2] ввел свое пространство "новых обобщенных функций". А.Б. Антоневичем и Я.В. Радыно [3–4] был предложен общий метод (с помощью регуляризаций) построения алгебр, содержащих заданные векторные пространства, и были введены термины "мнемофункции" и "мнемочисла" (константные мнемофункции). Дальнейшая история вопроса изложена в работе [5]. Мы изучаем мнемочисла, обобщающие алгебру мнемочисел Радыно.

Ультранормированное кольцо мнемочисел, ультранормированный модуль мнемовекторов

Пусть $X=s(\mathbf{K})$ – алгебра последовательностей элементов из нетривиально нормированного поля $(\mathbf{K}, |\cdot|)$ с покомпонентными операциями, $X_0=l_\infty(\mathbf{K})$ – подалгебра ограниченных последовательностей. Зафиксируем "бесконечно большой" относительно подалгебры X_0 элемент $x_\infty=(x_\infty^{(1)}, x_\infty^{(2)}, \ldots)\in X\backslash X_0$, обратимый по умножению, причем такой, что $x_\infty^{-1}\in X_0$ и, более того,

$$\lim_{k\to\infty}(x_\infty^{(k)})^{-1}=0. \tag{1}$$

Поскольку поле $\mathbf{K}$ нетривиально нормировано, то легко показать, что такой элемент x_∞ всегда существует. Элемент x_∞ будем называть порождающим.

Рассмотрим двустороннюю последовательность векторных подпространств над $\mathbf{K}$ в X: $X_n\equiv X_n(x_\infty)=x_\infty^n X_0$, $n\in\mathbf{Z}$. Легко видеть, что

$$\ldots\subset X_{-n}\subset\ldots\subset X_0\subset\ldots\subset X_n\subset X_{n+1}\subset\ldots,$$

причем все включения строгие, так как $x_\infty^{-1}\in X_0$ и $x_\infty^n\in X_n\backslash X_{n-1}$.

Рассмотрим минимальную подалгебру, порожденную X_0 и x_∞, – объединение $X_{+\infty}(x_\infty, \mathbf{K})=\bigcup_{n\in Z} X_n$. Рассмотрим также пересечение $X_{-\infty}(x_\infty, \mathbf{K})=\bigcap_{n\in Z} X_n$ – векторное подпространство над $\mathbf{K}$.

Пусть $(Y, |\cdot|)$ – нормированное пространство над $\mathbf{K}$. Рассматривая вместо $s(\mathbf{K})$ и $l_\infty(\mathbf{K})$ соответственно $X=s(Y)$ и $X_0=l_\infty(Y)$ при прежнем x_∞, получим $X_{+\infty}(x_\infty, Y)$ и $X_{-\infty}(x_\infty, Y)$ вместо $X_{+\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$ и $X_{-\infty}(x_\infty, \mathbf{K})$.

Определение 1. *Порядком роста элемента $x\in X$ относительно x_∞* назовем число

$$\mathrm{ord}(x)=\begin{cases}\inf\{n\in Z\colon x\in X_n\}, & x\in X_{+\infty},\\ +\infty, & x\in X\setminus X_{+\infty}.\end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, что $\mathrm{ord}(x)<+\infty$ на $X_{+\infty}$ и $\mathrm{ord}(x)=-\infty$ на $X_{-\infty}$.

Замечание. Непосредственно из определения порядка следует равносильность следующих условий для $x\in s(Y)$ и $n\in\mathbf{Z}$: 1) $x\in X_n(x_\infty)$; 2) $\mathrm{ord}(x)\le n$; 3) $x=x_\infty^n x_0$, где $x_0\in l_\infty(Y)$; 4) $x_\infty^{-n}x\in l_\infty(Y)$; 5) $\exists C>0\ \forall k\in\mathbf{N}$: $|x^{(k)}|\le C|x_\infty^{(k)}|^n$.

Теорема 1. *Порядок является логарифмической ультраполунормой на $s(\mathbf{K})$ и $s(Y)$, инвариантной относительно умножения на элементы $\mathbf{K}\backslash\{0\}$, т. е. выполняются следующие свойства:*

1) $\mathrm{ord}(x\pm y)\le\max\{\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y)\}$, $\forall x, y\in s(Y)$;

2) $\mathrm{ord}(0)=-\infty$, $\mathrm{ord}(1_{s(\mathbf{K})})=0$;

3) $\mathrm{ord}(\alpha x)=\mathrm{ord}(x)$, $\forall x\in s(Y)$, $\forall\alpha\in\mathbf{K}\backslash\{0\}$;

4) *если $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon Y_1\times Y_2\to Y_3$ – обобщенное произведение над $\mathbf{K}$, т. е. $\mathbf{K}$ – билинейный ограниченный оператор, то для индуцируемого им обобщенного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon s(Y_1)\times s(Y_2)\to s(Y_3)$ имеем*: $\mathrm{ord}\langle x, y\rangle\le\mathrm{ord}(x)+\mathrm{ord}(y)$, $\forall x\in S(Y_1)$, $\forall y\in S(Y_2)$ таких, что $\mathrm{ord}(x)<+\infty$ и $\mathrm{ord}(y)<+\infty$.

◄ 1) $\{n\in\mathbf{Z}\mid x\pm y\in X_n\}\supseteq\{n\in\mathbf{Z}\mid x\in X_n,\ y\in X_n\}=\{n\in\mathbf{Z}\mid x\in X_n\}\cap\{n\in\mathbf{Z}\mid y\in X_n\}$, так как X_n замкнуто относительно сложения и вычитания, а последнее пересечение равно тому из двух множеств, inf которого больше, поэтому $\mathrm{ord}(x\pm y)=$ $=\inf\{n\in\mathbf{Z}\mid x\pm y\in X_n\}\le\inf(\{n\in\mathbf{Z}\mid x\in X_n\}\cap\{n\in\mathbf{Z}\mid y\in X_n\})=\max(\inf\{n\in\mathbf{Z}\mid x\in X_n\},$ $\inf\{n\in\mathbf{Z}\mid y\in X_n\})=\max\{\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y)\}$.

2) $1_{s(\mathbf{K})}=(x_\infty)^0\in X_0\backslash X_{-1}$, $0\in X_{-\infty}$, так как $X_{-\infty}$ – векторное подпространство в X.

3) Пусть $\alpha\ne0$, тогда $\mathrm{ord}(\alpha x)=\inf\{m\in\mathbf{Z}\mid\alpha x\in X_m=x_\infty^m l_\infty(Y)\}=$ $=\inf\{m\in\mathbf{Z}\mid x\in x_\infty^m l_\infty(Y)\}=\mathrm{ord}(x)$, и из $\mathrm{ord}(x)<+\infty$ следует $\mathrm{ord}(\alpha x)<+\infty$, а так как $x=\alpha^{-1}(\alpha x)$, то из $\mathrm{ord}(\alpha x)<+\infty$ следует $\mathrm{ord}(x)<+\infty$.

4) Если $\mathrm{ord}(x)\le n<+\infty$ и $\mathrm{ord}(y)\le m<+\infty$, то $x=x_\infty^n x_0$, $y=x_\infty^m y_0$, где $x_0\in l_\infty(Y_1)$, $y_0\in l_\infty(Y_2)$. $|\langle x_0^{(k)}, y_0^{(k)}\rangle|\le C|x_0^{(k)}|\cdot|y_0^{(k)}|\Rightarrow\langle x_0, y_0\rangle\in l_\infty(Y_3)\Rightarrow\langle x, y\rangle=x_\infty^n x_\infty^m\langle x_0, y_0\rangle\in$

$\in x_\infty^{n+m}l_\infty(Y_3) \Leftrightarrow \mathrm{ord}\langle x,y\rangle \le n+m$. Поэтому $\mathrm{ord}\langle x,y\rangle \le \inf\{n\in \mathbf{Z} \mid \mathrm{ord}(x)\le n\} + \inf\{m\in \mathbf{Z} \mid \mathrm{ord}(x)\le m\} = \mathrm{ord}(x)+\mathrm{ord}(y)$. ►

Следствия. 1) Если $\mathrm{ord}(x)\ne\mathrm{ord}(y)$, где $x, y\in s(Y)$, то имеет место равенство: $\mathrm{ord}(x\pm y)=\max\{\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y)\}$.

2) $\forall x\in s(Y)$, $\forall y\in X_{-\infty}(x_\infty, Y)$:$\mathrm{ord}(x+y)=\mathrm{ord}(x)$.

Определение 2. Факторпространство $\mathbf{MK}=\mathbf{MK}(x_\infty)=X_{+\infty}(x_\infty,\mathbf{K})/X_{-\infty}(x_\infty,\mathbf{K})$ назовем *мнемочислами, а факторпространство* $\mathbf{M}Y=\mathbf{M}Y(x_\infty)=X_{+\infty}(x_\infty, Y)/X_{-\infty}(x_\infty, Y)$ *– мнемовекторами над* $\mathbf{K}$ *по порождающему элементу* x_∞.

Теорема 2. а) *Пространство* $\mathbf{MK}$ *с нормой, задаваемой формулой* $\|[x]\|=2^{\mathrm{ord}(x)}$, *является коммутативной ультранормированной алгеброй (т. е. такой, что* $\|[x]+[y]\|\le\max\{\|[x]\|, \|[y]\|\}$) *над полем* $\mathbf{K}$ *с тривиальной нормой;*

б) $\mathbf{M}Y$ *с аналогичной нормой является ультранормированным модулем над кольцом* $\mathbf{MK}$ *с нормой, введенной выше;*

в) *если* Y *является алгеброй, то* $\mathbf{M}Y$ *является ультранормированным кольцом и алгеброй над* $\mathbf{MK}$;

г) *обобщенное произведение над* $\mathbf{K}$ $\langle\cdot,\cdot\rangle: Y_1\times Y_2\to Y_3$ *порождает корректное обобщенное произведение над* $\mathbf{MK}$:$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{MK}}:\mathbf{M}Y_1\times\mathbf{M}Y_2\to\mathbf{M}Y_3$, *удовлетворяющее неравенству* $\|\langle[x],[y]\rangle_{\mathbf{MK}}\|\le\|[x]\|\,\|[y]\|$.

◄ Доказательство легко следует из теоремы 1 и следствия 2.►

Следствие. Если $\|[x]\|\ne\|[y]\|$, то $\|[x\pm y]\|=\max\{\|[x]\|, \|[y]\|\}$.

Легко понять, что соответствие $Y\to \mathbf{M}Y$ функториально.

Полнота кольца мнемочисел

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{K}$ *– нетривиально нормированное поле,* Y *– нормированное пространство над* $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}^*$ *– пополнение* $\mathbf{K}$, Y^* *– пополнение* Y, x_∞ *– порождающий элемент* $\mathbf{MK}$. *Тогда имеют место естественные изоморфизмы*

$$\theta_{\mathbf{K}}: \mathbf{MK}(x_\infty)\cong\mathbf{MK}^*(x_\infty) \text{ и } \theta_Y: \mathbf{M}Y(x_\infty)\cong\mathbf{M}Y^*(x_\infty).$$

◄ Доказательство приведено в [5].►

Таким образом, мы всегда можем свести мнемочисла над пополнением нормированного поля к мнемочислам над самим полем, например, мнемочисла над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_p$ сводятся к мнемочислам над $\mathbf{Q}$ в соответствующей норме.

Докажем теперь полноту пространств мнемочисел и мнемовекторов. Будем далее обозначать через x_∞ также элемент $[x_\infty]$. Легко доказываются

Лемма 1. $\forall y\in\mathbf{M}Y(x_\infty),\forall n\in\mathbf{Z}$:

а) $\mathrm{ord}(x_\infty^n y)=\mathrm{ord}(y)+n$; б) $\|x_\infty^n y\|=\|x_\infty\|^n\|y\|=2^n\|y\|$.

Лемма 2. а) *Если* $x=(x^{(k)})_{k\ge1}$ *и* $\mathrm{ord}(x)<0$, *то* $x^{(k)}\to0$, $k\to\infty$.

б) *Порядок финитной последовательности равен* $-\infty$.

Теорема 4 (о полноте пространств мнемочисел и мнемовекторов).

а) *Кольца мнемочисел и модули мнемовекторов всегда полны.*

б) *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, *где* $y_n\in\mathbf{M}Y$, *сходится* $\Leftrightarrow y_n\to0$.

◄ а) В силу теоремы 3 мы можем без ограничения общности считать пространство Y полным.

Пусть (x_k) – последовательность Коши в $\mathbf{M}Y(x_\infty)$, т. е. такая, что $\|x_k-x_m\|\to0$, $n,m\to\infty$. Очевидно, последовательность (x_n) сходится, если имеет сходящуюся подпоследовательность. Выберем подпоследовательность номеров $(k_n)_{n\ge0}$, $k_n\to\infty$ так, что $\|x_{k_n}-x_{k_{n+1}}\|\le1/2^{n+1}$. Обозначим $a_n=x_\infty^n(x_{k_{n+1}}-x_{k_n})$. Тогда согласно лемме 1: $\|a_n\|=2^n\,\|x_{k_n}-x_{k_{n+1}}\|\le 1/2$, что равносильно $\mathrm{ord}(a_n)\le -1$. Кроме того, $x_{k_{m+1}}=x_{k_0}+\sum_{n=0}^{m}a_n x_\infty^{-n}$, поэтому достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_\infty^{-n}, \tag{3}$$

где $\mathrm{ord}(a_n)\le -1$, чтобы получить пункт а) теоремы 4.

Сходимость ряда (3) на языке представителей означает: если $a_i=[b_i]$, $b_i=(b_i^{(k)})_{k\ge1}\in X_{-1}(x_\infty, Y)$, $i\ge 0$, то $\exists\sigma=(\sigma^{(k)})_{k\ge1}\in s(Y)\mid$ при $n\to\infty$:

$$\mathrm{ord}(\sum_{i=0}^{n}b_i x_\infty^{-i}-\sigma)\to-\infty, \tag{4}$$

причем $\mathrm{ord}(\sum_{i=0}^{n}b_i x_\infty^{-i}-\sigma)$ конечен, откуда следует, что $\sigma=\sum_{i=0}^{n}b_i x_\infty^{-i}-(\sum_{i=0}^{n}b_i x_\infty^{-i}-\sigma)\in$ $\in X_{+\infty}(x_\infty, Y)$. В этом случае $[\sigma]$ является суммой ряда (3).

Докажем, что $\forall\beta_i>0$, $i\ge0$ $\exists b_i=(b_i^{(k)})_{k\ge1}\in X_{+\infty}(x_\infty, Y)\mid \forall i\ge0$ имеем: $[b_i]=a_i$ и

$$\sup_{k\ge1}|b_i^{(k)}|\le\beta_i. \tag{5}$$

Действительно, пусть $b_i'=(b_i'^{(k)})_{k\ge1}\mid[b_i']=a_i$ – какие-то представители классов a_i. Так как $\mathrm{ord}(b_i')=\mathrm{ord}(a_i)<0$ по построению, то по лемме 2 имеем: $b_i'^{(k)}\to0$, $k\to\infty$, поэтому $|b_i'^{(k)}|\le\beta_i$ при $k\ge k_{0i}$. Пусть $b_i^{(k)}=b_i'^{(k)}$ при $k\ge k_{0i}$ и $b_i^{(k)}=0$ при $k<k_{0i}$. Тогда $\sup_{k\ge1}|b_i^{(k)}|=\sup_{k\ge k_{0i}}|b_i'^{(k)}|\le\beta_i$ и b_i-b_i' – финитная последовательность по построению, поэтому по лемме 2: $\mathrm{ord}(b_i-b_i')=-\infty\Rightarrow b_i\in X_{+\infty}(x_\infty, Y)$ и $[b_i']=[b_i]=a_i$.

Обозначим $\chi_k=|x_\infty^{(k)}|^{-1}$. $0<\chi_k\to0$, $k\to\infty$, поэтому $0<\chi=\sup_{k\ge1}\chi_k<+\infty$. Выберем $\beta_i=1/i!$, тогда для вещественного ряда Тейлора $\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i z^i$, представляющего экспоненту, радиус сходимости $R_\beta=1/(\overline{\lim_{i\to\infty}}\sqrt[i]{\beta_i})=+\infty>\chi$. Далее по этим $\beta_i=1/i!$ выбираем b_i так, чтобы выполнялось (5).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\ b_i^{(k)}(x_\infty^{(k)})^{-i}, \tag{6}$$

представляющий ряд (3). В силу (5) и определения χ он имеет мажоранту $\sum_{i=0}^{\infty}\left|b_i^{(k)}\left(x_\infty^{(k)}\right)^{-i}\right|\le\sum_{i=0}^{\infty}\left|b_i^{(k)}\right|\chi_k^i\le\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i\,\chi^i$. Эта мажоранта сходится в силу того, что радиус сходимости $R_\beta>\chi$, следовательно, $\forall k\ge1$ ряд (6) с членами из Y сходится абсолютно, а в силу полноты Y – сходится в Y.

Обозначим его сумму $\sigma^{(k)}=\sum_{i=0}^{\infty}b_i^{(k)}(x_\infty^{(k)})^{-i}$. Утверждается, что выполняется требуемое условие (4). Действительно, $\forall k\ge1$ $\forall n\ge1$ имеем:

$$|\sum_{i=0}^{n}b_i^{(k)}(x_\infty^{(k)})^{-i}-\sigma^{(k)}|=|\sum_{i=n+1}^{\infty}b_i^{(k)}(x_\infty^{(k)})^{-i}|\le\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|b_i^{(k)}\right|\cdot|x_\infty^{(k)}|^{-i}=|x_\infty^{(k)}|^{-(n+1)}\times$$

$$\times\sum_{i=n+1}^{\infty}\left|b_i^{(k)}\right|\chi_k^{i-(n+1)}=[i=j+n+1]=|x_\infty^{(k)}|^{-(n+1)}\ \sum_{j=0}^{\infty}|b_{j+n+1}^{(k)}|\chi_k^j\le$$

$$\leq |x_\infty^{(k)}|^{-(n+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+n+1} \chi^j.$$

Этот знакоположительный ряд $\sum_{j=0}^{\infty} b_{j+n+1} \chi^j$ сходится, так как радиус сходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+n+1} z^j$ совпадает с $R_\beta=+\infty$, ибо $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{\beta_{j+n+1}} =$
$= \overline{\lim_{j\to\infty}} (\beta_{j+n+1}^{1/j+n+1})^{j+n+1/j} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{\beta_j} =0.$

Обозначая $C_n=\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{j+n+1}\chi^j>0$, имеем: $|(\sum_{i=0}^{n} b_i^{(k)} (x_\infty^{(k)})^{-i})-\sigma^{(k)}|\leq C_n |x_\infty^{(k)}|^{-(n+1)}$, $\forall k\geq 1$, т. е. $\mathrm{ord}(\sum_{i=0}^{n} b_i x_\infty^{-i} - \sigma)\leq -(n+1)$, откуда немедленно получаем (4), сходимость ряда (3) и утверждение а) теоремы 4.

б) Вытекает из того, что $\mathbf{M}Y(x_\infty)$ – полное ультраметрическое пространство.▶

Теорема 5. а) *В нормированном кольце* $\mathbf{MK}(x_\infty)$ *всякий ряд Лорана* $\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k x_\infty^{-k}$, $\alpha_k \in \mathbf{K}$ *сходится.*

б) *Множество сумм рядов Лорана* $\mathbf{K}\langle x_\infty\rangle$ *образует полное нормированное подполе в* $\mathbf{MK}(x_\infty)$, *изоморфное нормированному полю формальных степенных рядов над* $\mathbf{K}$.

в) $\mathbf{M}Y(x_\infty)$ *является банаховым пространством, а* $\mathbf{MK}(x_\infty)$ – *банаховой алгеброй над* $\mathbf{K}\langle x_\infty\rangle$.

◀$\forall i\in \mathbf{Z}, \forall \alpha_i \in \mathbf{K}$: $||\alpha_i x_\infty^{-i}||\leq ||x_\infty^{-i}||=2^{-i}\to 0$, $i\to\infty$, причем $\alpha_i\neq 0 \Rightarrow ||\alpha_i x_\infty^{-i}||=2^{-i}$, поэтому ряд $\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k x_\infty^{-k}$ сходится. $\forall n\geq N\in \mathbf{Z}$: $||\sum_{i=N}^{n} \alpha_i x_\infty^{-i}||\leq \max_{i=N...n} 2^{-i}=2^{-N}$. Тогда по непрерывности нормы $||\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i}||=||\lim_{n\to\infty} \sum_{i=N}^{n} \alpha_i x_\infty^{-i}||=\lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=N}^{n} \alpha_i x_\infty^{-i}||\leq \lim_{n\to\infty} 2^{-N}=2^{-N}$.

Если же $\alpha_N\neq 0$, то $||\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i}||=||\alpha_N x_\infty^{-N}+\sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i}||=||\alpha_N x_\infty^{-N}||=2^{-N}$.

По порождающему элементу x_∞ построим отображение $\varphi:\mathbf{K}\langle x\rangle\to\mathbf{MK}(x_\infty)$: $\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x^i \to \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i}$. Это отображение корректно, $\mathbf{K}$-линейно и сохраняет норму, следовательно, является изометрическим вложением. Оно также мультипликативно, так как $\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i x_\infty^{-i} \sum_{j=M}^{\infty} \beta_j x_\infty^{-j} = \sum_{n=M+N}^{\infty} x_\infty^{-n} (\sum_{i+j=n}^{i\geq N,\, j\geq M} \alpha_i \beta_j)$. Обозначая $\mathbf{K}\langle x_\infty\rangle = \mathrm{Im}\varphi$, получаем пункт б) теоремы. Наконец, пусть $x\in\mathbf{K}\langle x_\infty\rangle$, $y\in\mathbf{MK}(x_\infty)$ или $y\in\mathbf{M}Y(x_\infty)$. Если $x=0$, то $||xy||=0=||x||\cdot||y||$, иначе $||xy||\leq||x||\cdot||y||$ и $||y||=||x^{-1}xy||\leq||x^{-1}||\cdot||xy||$, но $\mathbf{K}\langle x_\infty\rangle$ – нормированное поле, значит, $||x^{-1}||=||x||^{-1}$, поэтому $||x||\cdot||y||\leq||xy||$ и $||x||\cdot||y||=||xy||$. ▶

1. Colombeau J.-F. // New generalized functions and multiplication of distributions. Amsterdam, 1985.
2. Егоров Ю.В. // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. № 5 (275). С. 3.
3. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 267.
4. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 46.

5. Радыно Я.В., Рингель Д.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 1. С. 44.

Поступила в редакцию 08.06.2002

Дмитрий Евгеньевич Рингель – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа Я.В. Радыно.

УДК 517.977

Ж.М. КРАВЧЕНКО

МЕТОД КОРРЕКЦИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Method to correcting an approximate solution is offered. Optimal positional solution is considered.

В [1] описан метод построения приближенного решения задачи гарантированной оптимизации, точность которого повышается с увеличением точности построения внешних аппроксимаций множеств замыкания. Однако в этом случае растут требования к объему оперативной памяти. В данной работе предлагается метод, в котором требуемая точность достигается использованием небольшого числа вспомогательных векторов.

1. В классе дискретных управлений $u=u(t)$, $t\in T=[t_*, t^*]$, рассмотрим задачу

$$c'x(t^*)\to \max,$$

$$\dot{x}=A(t)x+b(t)u+d(t)w;\ x(t_*)=x_0;\ x(t^*)\in X^*=\{x\in \mathrm{R}^n:\ Hx\le g\};\quad (1)$$

$$w(t)\in W=\{w\in \mathrm{R}:\ |w|\le w^*\};\ u(t)\in U=\{u\in \mathrm{R}:\ |u|\le 1\},\ t\in T,$$

где $x=x(t)\in \mathrm{R}^n$, $u=u(t)\in \mathrm{R}$, $w=w(t)\in \mathrm{R}$; $A(t)\in \mathrm{R}^{n\times n}$, $b(t)$, $d(t)\in \mathrm{R}^n$, $t\in T$, – кусочно-непрерывные функции; $H\in \mathrm{R}^{m\times n}$, $g\in \mathrm{R}^m$.

Как и в [1], предположим, что 1) в процессе управления могут реализоваться любые кусочно-непрерывные функции $w(t)\in W$, $t\in T$; 2) в каждый момент замыкания t^i из

$$T^p=\{t^i\in T_h=\{t_*,\ t_*+h,\ \dots,\ t^*-h\},\ i=\overline{0,\ p}\},\ t_*=t^0<t^1<\dots<t^p<t^*,\quad (2)$$

сообщается возмущение $w_i^*(\cdot)=(w^*(t)\in W,\ t\in T^{(i)}=[t^i,\ t^{i+1}[\,)$.

Будем строить управления, которые с гарантией переводят систему (1) на терминальное множество и обеспечивают максимум гарантированному значению критерия качества.

2. Для упрощения изложения предлагаемого метода коррекции приближенного решения [1] ограничимся случаем одного момента замыкания. Следуя [1], по небольшому набору $Q_l=\{q_j\in \mathrm{R}^n:\ \|q_j\|=1,\ j=\overline{1,\ l}\}$, найдем $h_i(q)$, $\overline{\gamma}^{i,\alpha^0}(q)$, $i=\overline{0,\ 1}$; $\overline{\alpha}^0$ – значение критерия качества; активный вектор q_{j^0}; порождаемую им цепочку активных векторов $q_{j_k^1}$, $k=\overline{1,\ n}$; экстремальные точки x_0, x_1^*; активные точки по активным векторам $\overline{x}_{j^0}^0$; $\overline{x}_{j_k^1}^1$, $k=\overline{1,\ n}$; априорно-экстремальное управление $\overline{u}^0(\cdot)=(\overline{u}_i^0(\cdot),\ i=\overline{0,\ 1})$ и априорно-наихудшее возмущение $\overline{w}^0(\cdot)=(\overline{w}_i^0(\cdot),\ i=\overline{0,\ 1})$. Точность приближенного решения