Библиографические ссылки

1. *Демидович В.Б.* Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.
3. *Halanay A., Ionescu V.* Time-varying discrete linear systems: input-output operators, Riccati equations, disturbance attenuation. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1994.

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЫ В ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ПРОМЫСЛУ

Л.И. Родина[1], И.И. Тютеев[2]

[1] Владимирский государственный университет
Горького 87, 600000, Владимир, Россия
LRodina67@mail.ru

[2] Удмуртский государственный университет
Университетская 1, 426034, Ижевск, Россия
it.30@mail.ru

Рассматриваются эколого-экономические модели оптимального сбора ресурса, заданные дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием, зависящими от случайных параметров. Предполагаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ между моментами импульсов τ_k являются случайными величинами и размеры импульсного воздействия зависят от случайных параметров v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Одним из примеров таких объектов является уравнение с импульсами, моделирующее динамику популяции, подверженной промыслу; при отсутствии эксплуатации развитие популяции задается уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в моменты τ_k из популяции извлекается случайная доля ресурса v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Здесь $\theta_k \in \Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, где $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1 < \infty$, $v_k \in \Omega_2 \subseteq [0, 1]$.

Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u_k \in [0, 1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. Тогда доля добываемого ресурса будет равна $\ell_k = \ell(v_k, u_k)$, где $\ell(v_k, u_k) = v_k$, если $v_k < u_k$ и

$\ell(v_k, u_k) = u_k$, если $v_k \geqslant u_k$. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсами

$$\dot{x} = g(x), \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_k} = -\ell(v_k, u_k)x, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $\theta \doteq (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, $\theta_k \in \Omega_1$, $\ell \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)$, $\ell_k = \ell(v_k, u_k)$, $X_k = X_k(\theta, \ell, x_0)$ — количество ресурса до сбора в момент τ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Для любого $x_0 \geqslant 0$ введем в рассмотрение функцию

$$H_*\big(\theta, \ell, x_0\big) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\big(\theta, \ell, x_0\big)\ell_k\,,$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса.

Исследуется задача выбора управления $u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots) \in U$, при котором значение функции $H_*\big(\theta, \ell, x_0\big)$ можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом. Как и в работе [1], управление u_k будем строить таким образом, чтобы эксплуатировать популяцию до достижения определенного уровня $x > 0$. Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Тогда $u_k = u(x, \varphi(\theta_k, x)) = 1 - \dfrac{x}{\varphi(\theta_k, x)}$, $\ell(\omega, x) = \ell\big(v, u(x, \varphi(\vartheta, x))\big)$, где $\vartheta \in \Omega_1$. Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины, m_θ — математическое ожидание θ_k, F_2 — функция распределения v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Следующее утверждение доказано в [2] в частном случае, когда $g(x) = x(a - bx)$ и длины интервалов (τ_{k-1}, τ_k) постоянные.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *уравнение* $\dot{x} = g(x)$ *имеет асимптотически устойчивое решение* $\varphi(t) \equiv K$ *и интервал* (K_1, K_2) *является областью притяжения этого решения* $(0 \leqslant K_1 < K < K_2)$.

2) $\Omega_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]$, *где* $0 < \alpha_1 \leqslant \beta_1 < \infty$, $\Omega_2 \subseteq [0, 1]$ *и* $F_2(0) < 1$.

Тогда для любых $(x, x_0) \in (K_1, K) \times (K_1, K_2)$ *существует управление* $u \in U$ *такое, что с вероятностью единица*

$$\frac{M\big(\varphi(\vartheta, x)\ell(\omega, x)\big)}{m_\theta} \leqslant H_*\big(\theta, \ell, x_0\big) \leqslant \frac{KM\ell(\omega, x)}{m_\theta}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

Библиографические ссылки

1. *Reed W.J.* Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management. 1979. Vol. 6. P. 350–363.
2. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Механ. Компьютерные науки. 2018.

ОПТИМАЛЬНАЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Ружицкая

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Совесткая 106, 246019 Гомель, Беларусь

ruzhitskaya@gsu.by

Задача стабилизации является одной из основных задач теории управления, поскольку устойчивое поведение системы — одно из ее важнейших свойств. Однако с точки зрения приложений важно, чтобы переходные процессы обладали дополнительными свойствами. Одним из таких свойств является требование наибыстрейшего устойчивого поведения системы. Работа продолжает исследования [1–3], в которых описаны методы реализации оптимального управления типа обратной связи и их применение к проблеме стабилизации.

Пусть поведение динамической системы при $t \geq 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — n-вектор состояния системы в момент времени t, $u = u(t)$ — значение ограниченного скалярного управляющего воздействия $|u(t)| \leq L, t \geq 0,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $rank(b, Ab, ..., A^{n-1}b) = n$.

Пусть G — ограниченная окрестность состояния равновесия $x = 0$, $u = 0$ системы (1). При фиксированных числах $h > 0, L > 0$ функцию

$$u(t, x),\ t \in [0, h[,\ x \in G, \tag{2}$$

назовем дискретной (с периодом квантования $h > 0$) ограниченной стабилизирующей обратной связью системы (1) в области G, если:

1) $u(t, 0) = 0,\ t \in [0, h[$;

2) $|u(t, x)| \leq L,\ x \in G,\ t \in [0, h[$;