

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

[Handwritten signature]
29.06
Регистрационный № *[Handwritten number]* ч.

The seal of the Belarusian State University is circular, featuring a central emblem with a book and a quill, surrounded by text in Belarusian and Russian. The outer ring contains the university's name in both languages: "БЕЛОРУССКАЎ ДАШТАТНЫ УНІВЕРСАЛІТЭТ" and "БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ".

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:
1-31 80 03 Математика

Минск 2018

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 80 01-2013 и учебных планов УВО: №G31-257/уч., №G31-258/уч., (26.05.2017 г.)

СОСТАВИТЕЛИ:

В.И. Чесалин, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол №11 от 06.06.2018);

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол №8 от 19.06.2018)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В дисциплине «Дополнительные главы теории операторов» изучаются функционалы и операторы в функциональных пространствах, а также методы, с помощью которых сведения об этих объектах применяются к конкретным задачам.

Среди областей применения теории операторов можно указать математическую физику, теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других направлений.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста. Дисциплина «Дополнительные главы теории операторов» является дисциплиной по выбору магистранта компонента учреждения высшего образования цикла дисциплин специальной подготовки и преподается в третьем семестре для дневной формы получения образования и в четвертом семестре для заочной формы. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами, как «Функциональный анализ», «Дополнительные главы функционального анализа», «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление», «Численные методы».

Целями изучения дисциплины «Дополнительные главы теории операторов» для магистрантов-математиков являются:

- ознакомление с основными понятиями теории линейных операторов;
- выработка мировоззренческих представлений о современных приложениях функционального анализа и теории линейных операторов;
- подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований;
- подготовка к самостоятельному изучению тех разделов современных научных знаний, которые могут потребоваться дополнительно в практической и научно-исследовательской работе;

Важнейшими **задачами** изучения магистрантами-математиками дисциплины «Дополнительные главы теории операторов» являются:

- углубленное ознакомление магистрантов с основными принципами теории линейных операторов и примерами ее приложений;
- дальнейшее формирование у магистрантов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах;
- повышение их математической культуры.

В результате изучения дисциплины обучаемый должен **знать**:

- основные свойства линейных ограниченных операторов;
- сходимость последовательностей операторов;
- свойства компактных операторов и их приложения к интегральным уравнениям;

- классификацию точек спектра линейного оператора;
- основные понятия теории обобщенных функций.

Магистранты должны **уметь**:

- вычислять норму линейного ограниченного оператора;
- исследовать сходимость последовательностей линейных ограниченных операторов;
- находить резольвентное множество и спектр линейных ограниченных операторов;
- строить фундаментальные решения для простейших дифференциальных уравнений.

Магистранты должны **владеть**:

- терминологией дисциплины «Дополнительные главы теории операторов»;
- основными методами и приемами исследования свойств линейных ограниченных операторов;
- навыками использования теории линейных операторов в учебной и научной деятельности.

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций.

Академические компетенции:

- уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач;
- владеть системным и сравнительным анализом;
- владеть исследовательскими навыками;
- уметь работать самостоятельно;
- владеть междисциплинарным подходом при решении проблем;
- иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером;
- обладать навыками устной и письменной коммуникации.

Социально-личностные компетенции:

- уметь работать в команде;
- совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень;
- анализировать и принимать решения по социальным, этическим, научным проблемам, возникающим в профессиональной деятельности.

Профессиональные компетенции:

- осуществлять самостоятельную научно-исследовательскую деятельность (включая анализ, сопоставление, систематизацию, абстрагирование, моделирование, проверку достоверности данных, принятие решений и др.);
- пользоваться глобальными информационными ресурсами;
- анализировать научную, научно-техническую, нормативную и справочную литературу, включая электронные базы данных;
- разрабатывать и использовать современное учебно-методическое обеспечение;

- адаптироваться к новым ситуациям социально-профессиональной деятельности, реализовывать накопленный опыт, свои возможности;
- осваивать и реализовывать управленческие инновации в сфере высоких технологий;
- организовывать и вести переговоры с заинтересованными специалистами смежных профилей.

Программа дисциплины охватывает основные направления применения теории линейных операторов при решении прикладных задач. При составлении программы одним из важнейших выступал принцип профессиональной направленности, который подразумевает тесную связь содержания учебной дисциплины с профессиональной сферой деятельности будущих специалистов.

Рекомендуется использовать, помимо традиционных, активные формы и методы обучения, в частности: мультимедиа-средства; элементы проблемного обучения; элементы творческого характера на занятиях и при выполнении самостоятельной работы; лекцию-визуализацию, а также рейтинговую систему оценки знаний.

Для организации самостоятельной работы магистрантов по дисциплине рекомендуется использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (программа, лекционный экспресс-курс, методические указания и рекомендации по решению задач, задачи для решения на практических занятиях и для самостоятельного решения, список рекомендуемой литературы и информационных ресурсов, задания для самоконтроля в тестовой форме и в форме контрольных работ и др.).

Эффективность самостоятельной работы магистрантов целесообразно проверять в ходе текущего и итогового контроля знаний в форме устного опроса, контрольных работ по темам дисциплины. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала рекомендуется использование рейтинговой системы.

Общее количество часов, отводимое на изучение учебной дисциплины, составляет 120 часов, из них количество аудиторных часов для дневной формы – 52, в том числе: лекции – 26 часов, практические занятия – 20 часов, УСП – 6 часов; количество аудиторных часов для заочной формы – 14, в том числе: лекции – 8 часов, практические занятия – 6 часов.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение. Линейные операторы

Пространства линейных операторов. Непрерывность и ограниченность. Сильная сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

Обратные операторы. График оператора. Замкнутые операторы. Замыкание оператора. Теорема о замкнутом графике. Приложения к интегральным уравнениям.

Преобразование Фурье функций из пространства $L_1(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Тема 2. Сопряженные пространства и операторы

Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейных ограниченных функционалов в конкретных пространствах.

Сопряженные пространства и сопряженные операторы, примеры. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

Слабая сходимость. Рефлексивность.

Тема 3. Компактные операторы

Компактные множества в нормированных пространствах. Компактные операторы и их свойства. Компактность интегральных операторов.

Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами. Фредгольмовы операторы.

Тема 4. Элементы спектральной теории линейных операторов

Резольвентное множество и спектр оператора. Классификация точек спектра.

Спектральное разложение компактного самосопряженного оператора.

Тема 5. Обобщенные функции

Пространства основных и обобщенных функций. Действия с обобщенными функциями.

Пространство обобщенных функций медленного роста. Преобразование Фурье.

Решение дифференциальных уравнений в пространствах обобщенных функций.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ (очная форма обучения)

Номер раздела, темы занятия	Название темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Формы контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	Семинарские занятия			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	ТЕМА 1. Введение. Линейные операторы.	4		4				Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
2	ТЕМА 2. Сопряженные пространства и операторы.	4		4				Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
3	ТЕМА 3. Компактные операторы.	4		4		2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
4	ТЕМА 4. Элементы спектральной теории операторов.	6		4		2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
5	ТЕМА 5. Обобщенные функции.	8		4		2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
ИТОГО:		26		20		6		

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ (заочная форма обучения)

Номер раздела, темы занятия	Название темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Материальное обеспечение занятия (наглядные, методические пособия и др.)	Формы контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	Семинарские занятия			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	ТЕМА 1. Введение. Линейные операторы.	2		2				Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
2	ТЕМА 2. Компактные операторы.	2		2				Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
3	ТЕМА 3. Элементы спектральной теории операторов.	4		2				Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
ИТОГО:		8		6				

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Рекомендуемая литература

Основная

1. *Антоневич, А.Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник / А.Б. Антоневи́ч, Я.В. Радыно. 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/28955>
2. *Антоневич, А.Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие / А.Б. Антоневи́ч, М.Х. Мазель, Я.В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. – 319 с. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907>
3. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа : учебник / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. 4-е изд., перераб. – М., : Наука, 1976. – 544 с.
4. *Треногин, В.А.* Функциональный анализ : учеб. пособие / В.А. Треногин. – М., : Наука, 1980. – 449 с.
5. *Владимиров, В.С.* Обобщенные функции в математической физике : учеб. пособие / В.С. Владимиров. 2-е изд., перераб. и доп. – М., : Физ-мат. литература, 1979. – 320 с.

Дополнительная

1. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. 3-е изд., перераб. – М., : Наука, 1984. – 752 с.
2. *Березанский, Ю.М.* Функциональный анализ. Курс лекций : учеб. пособие / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель – К., : Выща шк., 1990. – 600 с.; ил.
3. *Антоневич, А.Б.* Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб. пособие для мат. спец. вузов / А.Б. Антоневи́ч, П.Н. Князев, Я.В. Радыно; Под ред. С.Г. Крейна. – Минск : Выш. школа, 1978. – 208 с.
4. *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики : учебник / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов – М., : Физ-мат. литература, 2000. – 400 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ МАГИСТРАНТОВ

Управляемая самостоятельная работа по дисциплине «Информационные технологии» проводится преподавателем во время аудиторных занятий. Контроль осуществляется в виде проведения лабораторных работ и защиты отчета по лабораторным работам. Для выполнения лабораторных работ магистранты получают индивидуальные задания.

Примерный перечень заданий УСР

Тема «Компактные операторы»

Лабораторная работа 1.

Задание 1. Является ли оператор $Ax = x(t^2)$ компактным в пространствах $L_2[0,1]$ и $C[0,1]$.

Задание 2. При каждом значении λ выяснить с помощью сопряженного уравнения, для каких значений параметров α, β, γ существует решение данного интегрального уравнения

$$x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(t-2s)x(s)ds + (\alpha-\gamma)t + \alpha + 2\gamma$$

в пространствах $L_2[0, \pi]$ и $C[0, \pi]$.

Тема «Элементы спектральной теории операторов»

Лабораторная работа 2.

Задание 1. Найти спектр и резольвенту интегрального оператора

$$Ax = \int_0^1 (t+s)x(s)ds$$

в пространствах

$$L_2[0,1] \text{ и } C[0,1].$$

Задание 2. Найти собственные значения, точки непрерывного и точки остаточного спектров оператора

$$Ax = a(t)x(t)$$

умножения на функцию $a(t) = 8 \left| t - \frac{1}{4} \right| - |8t - 4|$ в пространствах

$$L_2[0,1] \text{ и } C[0,1].$$

Тема «Обобщенные функции»

Лабораторная работа 3.

Задание 1. В пространстве $D'(\mathbb{R}^1)$ вычислить пределы обобщенных функций f_t при $t \rightarrow \infty$

$$1) f_t = \frac{e^{ixt}}{x-i0}, 2) f_t = \frac{e^{-ixt}}{x+i0}, 3) f_t = t^m e^{ixt}, m \geq 0.$$

Задание 2 . Найти единственные в пространстве D'_+ фундаментальные решения следующих дифференциальных операторов

$$1) \frac{d^2}{dx^2} + 4 \frac{d}{dx}, 2) \frac{d^3}{dx^3} - a^3, 3) \frac{d^4}{dx^4} - 2 \frac{d^2}{dx^2} + 1.$$

Перечень используемых средств диагностики результатов учебной деятельности

1. Устный опрос.
2. Лабораторные работы.
3. Контрольные работы.

Рекомендации по контролю качества усвоения знаний и проведению аттестации

Для текущего контроля качества усвоения знаний по дисциплине рекомендуется использовать устные опросы по разделам дисциплины, тестовые задания, отчеты по лабораторным работам. Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине студент вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для студентов, получивших неудовлетворительные оценки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно.

Текущая аттестация по учебной дисциплине – зачет.

Методика формирования итоговой оценки

Итоговая оценка формируется на основе:

1. Правил проведения аттестации студентов (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.);
2. Положения о рейтинговой системе оценки знаний по дисциплине в БГУ (Приказ ректора БГУ от 18.08.2015 г. №382-ОД);
3. Критериев оценки знаний студентов (письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г.).

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ

на ____ / ____ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № _____ от _____ 201__ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой
доктор физ.-мат. наук, профессор _____
(степень, звание) (подпись)

А.В. Лебедев
(И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
кандидат физ.-мат. наук, доцент _____
(степень, звание) (подпись)

Д.Г. Медведев
(И.О. Фамилия)