МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа

СОРОКИНА

Виктория Вадимовна

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ИНТЕГРИРУЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ ДАРБУ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Дипломная работа

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Н. Л. Щеглова

Допущена к защите

«___» ____________ 2018 г.

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа

доктор физ.-мат. наук, профессор В. И. Громак

Минск, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ И ТЕРМИНОВ

Интерфейс — общая граница между двумя функциональными объектами, требования к которой определяются стандартом; совокупность средств, методов и правил взаимодействия (управления, контроля и т.д.) между элементами системы.

IDEF0 — методология функционального моделирования (англ. function modeling) и графическая нотация. Предназначена для формализации и описания бизнес-процессов. Отличительная особенность IDEF0 – её акцент на соподчинённость объектов. В IDEF0 рассматривается не временна́я последовательность (поток работ), а логические отношения между работами.

«.m» – это файлы *Mathematica,* написанные на языке Wolfram. «.m» хранят программный код, числовые и текстовые данные, 2D растровые и векторные изображения, 3D геометрию, звук, и другой тип данных в текстовом формате ASCII.

РЕФЕРАТ

В дипломной работе 65 страниц, 19 рисунков, 1 таблица, 32 источника, одно приложение.

ИНВАРИАНТНАЯ КРИВАЯ И ПОВЕРХНОСТЬ, КОФАКТОР, ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ ДАРБУ, ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ ДАРБУ, ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА-ФОКУСА, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ, WOLFRAM MATHEMATICA

Рассматривается автономная двумерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенная относительно производных, с полиномиальными правыми частями. Спроектирован алгоритм и реализована система функций пользователя в среде компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* для построения инвариантных кривых, первого интеграла Дарбу или интегрирующего множителя Дарбу рассматриваемой системы. Создан интерфейс пользователя, проведено тестирование на квадратичных и кубических системах, а также на системах Льенара. Предлагаемый инструментарий может быть использован для исследования проблемы различения центра и фокуса и проблемы изохронности центра при качественном исследовании динамических систем указанного вида.

Дипломная работа выполнена автором самостоятельно.

РЭФЕРАТ

У дыпломнай працы 65 старонак, 19 малюнкаў, 1 табліца, 32 крыніцы, 1 дадатак.

ІНВАРЫЯНТНАЯ КРЫВАЯ І ПАВЕРХНЯ, КАФАКТАР, ПЕРШЫ ІНТЭГРАЛ ДАРБУ, ІНТЭГРОЎНЫ МНОЖНІК ДАРБУ, ПРАБЛЕМА ЦЭНТРА-ФОКУСА, ЛІМІТАВЫЯ ЦЫКЛЫ, WOLFRAM MATHEMATICA

Разглядаецца аўтаномная двухмерная сістэма звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў, дазволеная адносна вытворных, з паліномнымі правымі часткамі. Спраектаваны алгарытм і рэалізавана сістэма функцый карыстальніка ў асяроддзі кампутарнай алгебры *Wolfram Mathematica* для пабудовы інварыянтных крывых, першага інтэграла Дарбу ці інтэгроўнага множніка Дарбу разгляданай сістэмы. Створаны інтэрфейс карыстальніка, праведзена тэсціраванне на квадратычных і кубічных сістэмах, а таксама на сістэмах Льенара. Прапанаваны інструментарый можа быць выкарыстаны для даследавання праблемы адрознівання цэнтра і фокуса і праблемы ізахроннасці цэнтра пры якасным даследаванні дынамічных сістэм указанага віду.

Дыпломная праца выканана аўтарам самастойна.

ABSTRACT

Diploma thesis includes 65 pages, 19 illustrations, 1 table, 32 sources and 1 supplement.

INVARIANT CURVE AND SURFACE, COFACTOR, DARBOUX FIRST INTEGRAL, DARBOUX INTEGRATING FACTOR, CENTER-FOCUS PROBLEM, LIMIT CYCLES, WOLFRAM MATHEMATICA

There is autonomous two-dimensional system of ordinary differential equations, solved with respect to derivatives, with polynomial right sides. In the *Wolfram Mathematica* computer algebra environment the algorithm and the system of user functions for constructing of invariant curves (surfaces), Darboux first integral or Darboux integrating factor of the system under consideration were designed and implemented. The user interface was created. Testing was carried out on quadratic, cubic, Lienard systems and 3-dimensional systems. The proposed toolkit can be used to investigate the center-focus and isochronicity problems in the qualitative theory of dynamic systems of the specified type.

Diploma thesis was developed by the author herself.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается двумерная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. Исследования проводятся в рамках классических задач качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений: проблемы центра-фокуса и проблемы изохронности центра.

Проблема различения центра и фокуса, несмотря на более ста лет активных исследований, остается нерешенной даже для кубических полиномиальных систем. Она решена лишь для частных случаев, для ряда параметрических семейств систем. В настоящее время известно, что существует связь между наличием центра и существованием алгебраических интегралов типа Дарбу или интегрирующих множителей Дарбу у исследуемых систем.

Обнаружение первых интегралов Дарбу у рассматриваемых систем дает возможность найти условия наличия центра и исследовать его изохронность, а поскольку такие системы описывают, например, биохимические, автоколебательные явления, то качественное исследование таких систем находит широкое применение в химии, биологии, физике и других областях науки.

Все это определяет актуальность и важность алгоритмизации построения множителей Дарбу с использованием компьютерной математической системы, проведенной в рамках выполнения дипломного проекта.

Цель данной дипломной работы – разработать инструментарий для вычисления первых интегралов и интегрирующих множителей Дарбу полиномиальных динамических систем с использованием компьютерной математической системы *Wolfram Mathematica*.

В главе 1 описывается метод Дарбу для полиномиальной системы дифференциальных уравнений, в главе 2 рассмотрена компьютерная реализация метода Дарбу и в главе 3 представлены системы для тестирования продукта.

В результате проделанной работы были созданы функции пользователя, вычисляющие инвариантные кривые (поверхности), первый интеграл Дарбу, интегрирующий множитель Дарбу. Спроектирован и реализован интерфейс пользователя. Созданный инструмент тестирован для квадратичных и кубических систем, а также для систем Льенара и трехмерных систем. Тесты проведены на основании современных опубликованных результатов в этой области.

Разработка инструментария проводилась в период с 01.11.2017г. по 13.05.2018г. Среднее время выполнения кода при тестировании программы (на примере построения первого интеграла для системы второго порядка с инвариантной кривой степени 2) на компьютере с установленной *Mathematica* 11 и Windows 8, а также процессором Intel Core i5-4460 3.2 Ghz – 2-4 секунды.

ГЛАВА 1
МЕТОД ДАРБУ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 История вопроса

История теории обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало в XVII веке, когда независимо друг от друга Ньютон и Лейбниц предложили дифференциальное исчисление. Это позволило ответить на многие вопросы, которыми задавались еще древние математики.

Качественная теория дифференциальных уравнений, возникшая в конце XIX века в связи с потребностями механики и астрономии, занимает важное место в общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Несмотря на то, что современные мощные компьютеры позволяют с большой точностью находить численные решения дифференциальных уравнений, для решения многих выдвигаемых естествознанием вопросов этого оказывается недостаточно. Для ответа на такие вопросы нужно получить информацию о поведении системы «в целом» [6].

Исследование решений дифференциальных уравнений с этой точки зрения получило название «качественного исследования» или «качественного интегрирования». Качественное исследование помогает ответить на следующие вопросы [6]:

- существуют ли у рассматриваемой системы интегральные кривые, являющиеся замкнутыми кривыми;
- являются ли решения, соответствующие данному состоянию равновесия, «устойчивыми» или «неустойчивыми»;

- каковы области значений переменных, на которых точки на интегральных кривых стремятся к данному состоянию равновесия.

Основные задачи, решаемые качественной теорией [1]:

- проблема различения центра и фокуса;
- проблема изохронности центра;
- вторая часть шестнадцатой проблемы Гильберта (о максимальном числе и расположении предельных циклов);
- определение первых интегралов.

Проблема различения центра и фокуса полиномиальной динамической системы известна как проблема центра Пуанкаре или проблема центра-фокуса.

Для автономных систем на плоскости можно дать следующую геометрическую интерпретацию этой проблемы. Если начало координат – точка $(0, 0)$ – изолированная особая точка полиномиальной (или действительной аналитической) системы и не существует орбиты, стремящейся к особой точке, с определенным предельным касательным направлением, то особая точка является либо центром (в данном случае существует окрестность особой точки, в которой каждая орбита, кроме начала координат, периодическая), либо фокусом (в этом случае существует окрестность особой точки, в которой каждая орбита – спираль, имеющая направление в или от начала координат).

Несмотря на активные исследования, проблема различения центра и фокуса решена полностью только для линейных и квадратичных систем степени 1 и 2 соответственно, а также для некоторых случаев более высокой степени.

Нахождение необходимых условий для существования центра часто предполагает широкое использование компьютерной алгебры, во многих случаях требующей больших вычислительных и аппаратных средств.

Еще одной проблемой является так называемая проблема цикличности. Она заключается в оценке числа предельных циклов (изолированных периодических решений), которые могут создавать бифуркацию, когда коэффициентам системы передается возмущение, но так, чтобы система оставалась в определенном семействе, например, семействе всех квадратичных полиномиальных систем (если исходная система была квадратичной). Эта проблема является частью еще нерешенной шестнадцатой проблемы Гильберта.

Проблема максимального числа предельных циклов и изохронности центра являются открытыми и имеют решение лишь в частных случаях.

1.2 Методика решения проблемы

В настоящее время известно, что существует связь между наличием центра и существованием алгебраических интегралов типа Дарбу или интегрирующих множителей Дарбу у исследуемых систем [1, 15, 18].

Основные механизмы для определения центра с применением метода Дарбу:

1. поиск первого интеграла Дарбу;
2. поиск первого интеграла Дарбу-Шварца-Кристоффеля.

Задача качественного исследования дифференциальных уравнений впервые была поставлена Пуанкаре (для случая системы двух дифференциальных уравнений):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

Система вида (1) в случае, когда функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены в некоторой области $G \in R^2$, удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения, называется автономной динамической системой второго порядка.

Если переменную t рассматривать как время, то решение x = x(t), y = y(t) описывает закон движения точки (x, y) на плоскости O x y, называемой фазовой плоскостью. Кривая, по которой движется точка, называется траекторией, а уравнения x = x(t), y = y(t) задают параметризацию этой кривой.

1.2.1 Инвариантная кривая и кофактор

Пусть задана динамическая система (1).

Векторное поле X, ассоциированное с системой (1), определяется следующим выражением [2]

$$X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$

Пусть $f \in C[x, y]$, f не тождественный нуль. Алгебраическая кривая $f(x, y)$ является инвариантной алгебраической кривой [1], если для некоторого полинома $K \in C[x, y]$ выполняется

$$Xf = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \tag{3}$$

Полином $K(x, y)$ называется кофактором инвариантной алгебраической кривой $f = 0$ [3].

Следует отметить, что если $m = \max\{deg(P),\ \deg(Q)\}$ для полиномов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то любой кофактор имеет степень не выше $m - 1$.

1.2.2 Полиномы Дарбу

Для построения первого интеграла и интегрирующего множителя Дарбу необходимо найти инвариантные кривые и соответствующие им кофакторы. Для этого используются полиномы Дарбу [24].

Общий вид инвариантной кривой степени m для системы (1) имеет вид:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} a_{k-i,i} x^{k-i} y^{i}. \tag{4}$$

Общий вид соответствующего инвариантной кривой кофактора:

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{k} a_{k-i,i} x^{k-i} y^{i}. \tag{5}$$

Полином (4) будет являться полиномом Дарбу системы (1) с кофактором (5), если $Xf = Kf$, где X является оператором вида (2).

1.2.3 Первый интеграл и интегрирующий множитель Дарбу

Пусть система (1) имеет q (конечное) алгебраических инвариантных кривых $f_j(x, y) = 0$, $1 \leq j \leq q$. Тогда первый интеграл системы, имеющий вид $H = f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q}$, где коэффициенты α_j находятся из уравнения:

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j K_j = 0, \tag{6}$$

называется первым интегралом Дарбу [1].

Если же

$$\sum_{j=1}^{q} \alpha_j K_j + P'_x + Q'_y = 0, \tag{7}$$

то система (1) имеет интегрирующий множитель $M = f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q}$.

Следствие системы (1) – уравнение в полных дифференциалах:

$$-M(\mathrm{x}, \mathrm{y}) P(\mathrm{x}, \mathrm{y}) dy + M(x, y) Q(x, y) dx = 0.$$

Это означает, что существует такая функция $F(x, y)$, обладающая непрерывными частными производными

$$F_x = M(x, y)Q(x, y),$$

$$F_y = -M(x, y)P(x, y),$$

что решения системы (1) будут иметь вид $y = \varphi(x)$, причем $F(x, \varphi(x)) = const.$

Таким образом, $F(x, y)$ является первым интегралом для системы (1).

Существование первого интеграла Дарбу может подчиняться жестким правилам. Например, если α_j вещественно и рационально для всех j, то каждая траектория (1) лежит на алгебраической кривой. Если найдено достаточно много алгебраических инвариантных кривых, то они могут быть использованы для построения первого интеграла Дарбу, как показывает следующая теорема.

Теорема (Дарбу) [1]

Предположим, что система (1) имеет q (различных) алгебраических инвариантных кривых $f_j(x, y) = 0, 1 \le j \le q$, где для каждого j f_j неприводима над C^2, и $q > \frac{(m^2 + m)}{2}$. Тогда система (1) допускает первый интеграл Дарбу.

Следствие [1]

Если система (1) имеет по крайней мере $q = \frac{(m^2 + m)}{2}$ алгебраических инвариантных кривых $f_j(x, y) = 0$, каждая из которых неприводима над C^2 и не проходит через начало координат (т.е. $f_j(0, 0) \ne 0$), то система (1) допускает первый интеграл Дарбу.

1.2.4 Теория Дарбу для трехмерных систем

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = P(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} = Q(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} = R(x,y,z), \end{cases} \tag{8}$$

где $P,\ \ Q,\ \ R$ – полиномы максимальной степени m.

Векторное поле X, ассоциированное с системой (8), определяется следующим выражением [24]:

$$X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}. \tag{9}$$

Полиномом Дарбу системы (8) называется полином $f(x,y,z)$, такой что

$$Xf = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = Kf, \tag{10}$$

где $K(x,y,z)$ – полином степени не выше $(m-1)$.

Нетрудно заметить, что если f – полином Дарбу системы (8), то уравнение $f = 0$ определяет алгебраическую поверхность, которая является инвариантной. Таким образом, f – алгебраическая инвариантная поверхность системы (8) [24], а полином $K(x,y,z)$ является ее кофактором.

Несложные вычисления показывают, что если существуют инвариантные поверхности $f_j(x,y,z)$ с кофакторами $K_j(x,y,z)$, $1 \le j \le q$, удовлетворяющие условию

$$\textstyle\sum_{j=1}^{q} \alpha_j K_j = 0, \tag{11}$$

то $H = f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q}$ – первый интеграл системы (8), называемый интегралом Дарбу.

1.2.5 Метод Дарбу

Метод Дарбу заключается в построении первого интеграла по известным частным интегралам. В данной задаче он сводится к построению, если это возможно, первого интеграла Дарбу или интегрирующего множителя для вещественной автономной динамической системы с полиномиальными правыми частями.

Алгоритм:

1. определяется степень системы (1) или (8);
2. задается степень инвариантной кривой (для системы (1)) или поверхности (для системы (8));
3. генерируются многочлены с неопределенными коэффициентами, определяющие инвариантные кривые (поверхности) f и кофакторы K;
4. находятся неопределенные коэффициенты для многочленов f и K;
5. составляется уравнение (6) для системы (1) или уравнение (11) для системы (8). Если оно имеет ненулевое решение, то выражение $f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q}$ – первый интеграл Дарбу, иначе – переход к шагу 6;
6. составляется уравнение (7), если оно имеет ненулевое решение, то выражение $f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q}$ – интегрирующий множитель Дарбу, в противном случае для системы (1) или (8) с инвариантными кривыми (поверхностями) заданной степени невозможно построить первый интеграл и интегрирующий множитель Дарбу.

1.2.6 Применение метода Дарбу

Лемма [25]

Если система (1) имеет непрерывно дифференцируемый интегрирующий множитель в окрестности G особой точки p системы типа фокуса или центра, то p является центром.

Теорема (Чаваррига, 2004) [26]

Пусть $H: U \to R$ – первый интеграл системы (1). Тогда система (1) не имеет предельных циклов, содержащихся в U.

ГЛАВА 2
КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДАРБУ

2.1 Проектирование: функциональный подход

2.1.1 Функциональный подход

Функциональный подход предполагает построение сложных систем посредством агрегирования функций. При этом код программы представляет собой функцию, аргументы которой также могут быть функциями. Таким образом, вызов ранее описанной функции позволяет повторно использовать код, при этом структура функции прозрачна математически, в отличие от процедуры императивного языка. Типы отдельных переменных функций, используемые при функциональном подходе, могут быть переменными. Такой подход обеспечивает возможность обработки разнородных данных (например, упорядочение элементов списка по возрастанию для целых чисел, отдельных символов и строк), или полиморфизм. В результате при создании программы разработчик, используя функциональный подход, сосредотачивается на предметной области и на том, как именно должна функционировать программа, и в меньшей степени заботится о рутинных операциях [27].

Так как для языков функционального программирования функция является естественным формализмом, то существенно упрощается реализация различных аспектов программирования, связанных с функциями. Написание рекурсивных функций, т.е. функций, вызывающих самих себя в качестве аргумента, становится интуитивно прозрачным. Естественной становится и реализация обработки рекурсивных структур данных.

Преимущества

- полностью автоматическое управление памятью компьютера;
- простота переиспользования фрагментов кода;
- расширенная поддержка параметрических функций;
- абстрагирование от машинного представления данных;
- прозрачность реализации самоприменимых (рекурсивных) функций.

Недостатки

- нелинейная структура программы;
- необходимость фундаментальной математической подготовки разработчиков (достаточно хорошее понимание природы функций);
- относительно невысокая эффективность для некоторых классов задач.

2.1.2 Обоснованность выбора *Wolfram Mathematica*

Wolfram Mathematica — система компьютерной алгебры. Она имеет широкое применение в различных сферах, таких как инженерия, математика и компьютерные области. Разработал систему Стивен Вольфрам, дальнейшим развитием занимается компания Wolfram Research.

Особенности *Wolfram Mathematica* [23]:

- язык программирования, поддерживающий процедурные, функциональные и объектно-ориентированные конструкции;
- инструментарий для добавления пользовательских интерфейсов к вычислениям и приложениям;
- библиотеки математических элементарных функций и специальных функций;
- поддержка комплексного числа, арифметики произвольной точности, арифметики интервалов и символьных вычислений;

- матрицы и инструменты для обработки данных, включая поддержку разреженных массивов;
- возможность работать с 2D и 3D данными, функции геовизуализации и инструменты анимации;
- решатели для систем уравнений, диофантовых уравнений, дифференциальных уравнений: обыкновенных (ОДУ), с частными производными (ДУЧП), алгебраических (ДАУ), с запаздыванием, стохастических, а также рекуррентных соотношений;
- анализ конечных элементов, включая создание 2D и 3D адаптивных сеток;
- численные и символьные инструменты для дискретного и непрерывного исчисления, включая непрерывные и дискретные интегральные преобразования;
- ограниченная и неограниченная локальная и глобальная оптимизация;
- библиотеки статистики, включая подгонку, тестирование гипотез, расчеты вероятности и ожидания на более чем 160 распределениях;
- поддержка цензурированных данных, временных данных, временных рядов;
- расчеты и моделирование случайных процессов и очередей;
- средства машинного обучения (с учителем и без) для данных, изображений и звуков, включая искусственные нейронные сети;
- инструменты для интеллектуального анализа текста, включая регулярные выражения и семантический анализ;
- инструменты интеллектуального анализа данных, такие как анализ кластеров, выравнивание последовательностей и сопоставление образцов;
- вычислительная геометрия в 2D, 3D и более высоких измерениях;
- библиотеки для обработки сигналов, включая вейвлет-анализ звуков, изображений и данных;
- линейные и нелинейные библиотеки систем управления;

- инструменты для обработки 2D и 3D изображений и обработки морфологических изображений, включая распознавание изображений;
- инструменты для визуализации и анализа направленных и неориентированных графов;
- инструменты для комбинаторных задач;
- библиотека функций теории чисел;
- инструменты для финансовых расчетов, включая облигации, аннуитеты, опционы и т. д.
- теория групп и символьные тензорные функции;
- импорт и экспорт фильтров для данных, изображений, видео, звука, автоматизированного проектирования, географических информационных систем (ГИС), документов и биомедицинских форматов;
- сбор базы данных по математической, научной и социально-экономической информации и доступ к данным и расчетам Wolfram Alpha;
- техническая обработка текста, включая редактор формул и автоматический генератор отчетов;
- инструменты для создания и развертывания вычислительных приложений и служб на базе облачных вычислений;
- инструменты для подключения к библиотекам динамической компоновки (DLL), структурированный язык запросов (SQL), Java, .NET, C ++, Fortran, CUDA, OpenCL и Hypertext Transfer Protocol (HTTP);
- инструменты для параллельного программирования.

Кроме того, *Wolfram Mathematica* — это интерпретируемый язык функционального программирования. Благодаря своей символьной сущности язык Wolfram Language поддерживает расширенную форму функционального программирования, основанную на обобщенных преобразованиях [23].

На сегодняшний день, однако, в пакете не предусмотрены встроенные функции для качественного исследования дифференциальных уравнений, также их нет и в демонстрационных проектах Wolfram.

2.1.3 Проектирование

Идея

Продукт представляет собой пакет в *Wolfram Mathematica* с функциями, реализующими метод Дарбу. Пакет используется для хранения кода Mathematica, чтобы его можно было загрузить в сессию Mathematica. Пакет помещается в файл с расширением «.m». Он представляет собой несколько функций, которые помещаются в контекст или группу символов Mathematica. Код, предоставляющий функциональность, скрыт в разделе реализации пакета.

Назначение

Система должна выполнять следующие действия:

1. вычислять степень полинома от нескольких переменных;
2. генерировать полиномы с неопределенными коэффициентами для инвариантной кривой (поверхности) и кофактора;
3. вычислять векторное поле, ассоциированное с динамической системой;
4. определять, содержит ли выражение комплексные члены;
5. определять, является ли заданный полином константой;
6. находить инвариантные кривые (поверхности) и соответствующие им кофакторы согласно соотношению (3) для двумерной системы и соотношению (10) для трехмерной системы;
7. строить и решать уравнение (6) или (7), определяя этим коэффициенты α_i, $1 \leq i \leq q$ (если существует решение уравнения);

8. строить выражение $f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q}$, если существуют инвариантные кривые (поверхности) и коэффициенты α_i, $1 \le i \le q$;
9. определять, является ли выражение из пункта 8 интегрирующим множителем или первым интегралом Дарбу;
10. если не существует инвариантных кривых и/или выражения из пункта 8, то выдавать соответствующее сообщение.

Для автономной динамической системы с полиномиальными правыми частями пользователь может:

1. выбирать тип системы (двумерный или трехмерный);
2. задавать правые части двумерной системы (1) или трехмерной системы (8);
3. выбирать степень инвариантной кривой (поверхности);
4. выбирать вид представления инвариантной кривой (поверхности) и кофактора (как функцию или выражение для семейства функций);
5. задавать ограничения на параметры системы.

Функции

Имя функции	**Вход**	**Назначение**	**Выход**
PolynomialOrder	Полином	Вычисляет степень полинома	Степень полинома
PolyGen	Степень полинома, символ для обозначения коэффициентов полинома	Генерирует полином заданной степени	Полином заданной степени
X	Правые части системы вида (1) или (8); инвариантная кривая или поверхность	Строит векторное поле, ассоциированное с системой	Векторное поле
ImaginaryQ	Выражение в *Mathematica*	Проверяет, имеют ли подвыражения комплексные члены	True, если содержит комплексные

			члены, иначе false
PolyOrderPair	Список из двух элементов, каждый из которых – полином	Проверяет, является ли хотя бы один полином нулевым	1, если список содержит нулевой полином, иначе 0
SolveFirst	Правые части системы вида (1) или (8); список полиномов с неопределенными коэффициентами для построения инвариантной кривой (поверхности) заданной степени и кофактора; ограничение на параметры системы (опционально, по умолчанию без ограничений)	Возвращает инвариантные кривые (поверхности) и соответствующие им кофакторы в виде функций с параметрами	Инвариантные кривые (поверхности) и соответствующие им кофакторы в виде функций с параметрами
GetAllSolutions	Правые части системы вида (1) или (8); ограничение на параметры системы (опционально, по умолчанию без ограничений); инвариантные кривые (поверхности) и кофакторы, вычисленные функцией SolveFirst	Вспомогательная функция для функции InvCurveWithCofactor, вычисляет все инвариантные кривые (поверхности) и соответствующие им кофакторы с уточнением параметров	Все инвариантные кривые (поверхности) и соответствующие им кофакторы с уточненными параметрами
InvCurveWithCofactor	Правые части системы вида (1) или (8); полиномы с неопределенными коэффициентами для построения инвариантной кривой	Вычисляет инвариантные кривые (поверхности) и соответствующие им кофакторы	Инвариантные кривые (поверхности) и соответствующие им кофакторы

	(поверхности) и кофактора; параметр, отвечающий за символьное представление ответа (опционально, по умолчанию 1); ограничение на параметры системы (опционально, по умолчанию без ограничений)		
Cofactor	Правые части системы вида (1) или (8); инвариантная кривая (поверхность)	Возвращает кофактор, соответствующий инвариантной кривой (поверхности)	Кофактор
CofactorPoly	Правые части системы вида (1) или (8); символ для обозначения неопределенных коэффициентов полинома	Генерирует полином для кофактора	Полином для кофактора
FindCoefficient	Кофактор; правые части системы вида (1) или (8); ограничение на параметры системы (опционально, по умолчанию без ограничений)	Находит коэффициенты α_i выражения $f_1^{\alpha_1} \ldots f_q^{\alpha_q}$	Список коэф-фициентов
H	Список инвариантных кривых (поверхностей) и кофакторов; правые части системы вида (1) или (8); ограничение на	Вычисляет выражение $f_1^{\alpha_1} \ldots f_q^{\alpha_q}$ и определяет, является ли оно первым интегралом или	Вычисленное выражение $f_1^{\alpha_1} \ldots f_q^{\alpha_q}$ и строка с отве-том (первый ин-

	параметры системы (опционально, по умолчанию без ограничений)	интегрирующим множителем Дарбу	теграл или интегрирующий множитель)

Таблица 2.1 Функции пакета DarbouxInterability

Таблица 2.1 является нулевым приближением при проектировании.

Используемые встроенные функции *Wolfram Mathematica*:

1. Append
2. Block
3. DeleteCases
4. DeleteDuplicates
5. Div
6. Exponent
7. Flatten
8. FreeQ
9. If
10. Length
11. Max
12. MemberQ
13. MonomialList
14. Print
15. Range
16. Select
17. Solve
18. SolveAlways
19. Table
20. Thread
21. Total

2.1.4 Функциональная модель

В результате алгоритмизации метода Дарбу была построена функциональная модель, выполненная по методологии IDEF0. Это диаграммы А-0 «Модель алгоритмизации метода Дарбу» (рис.2.1) и А0 «Метод Дарбу: пакет DarbouxIntegrability» (рис.2.2).

Основным результатом работы системы являются инвариантные кривые, кофакторы и первый интеграл или интегрирующий множитель Дарбу.

Выполнение процесса «Метод Дарбу: пакет DarbouxIntegrability» направлено на достижение следующей цели: компьютерная реализация метода Дарбу и создание цифрового продукта.

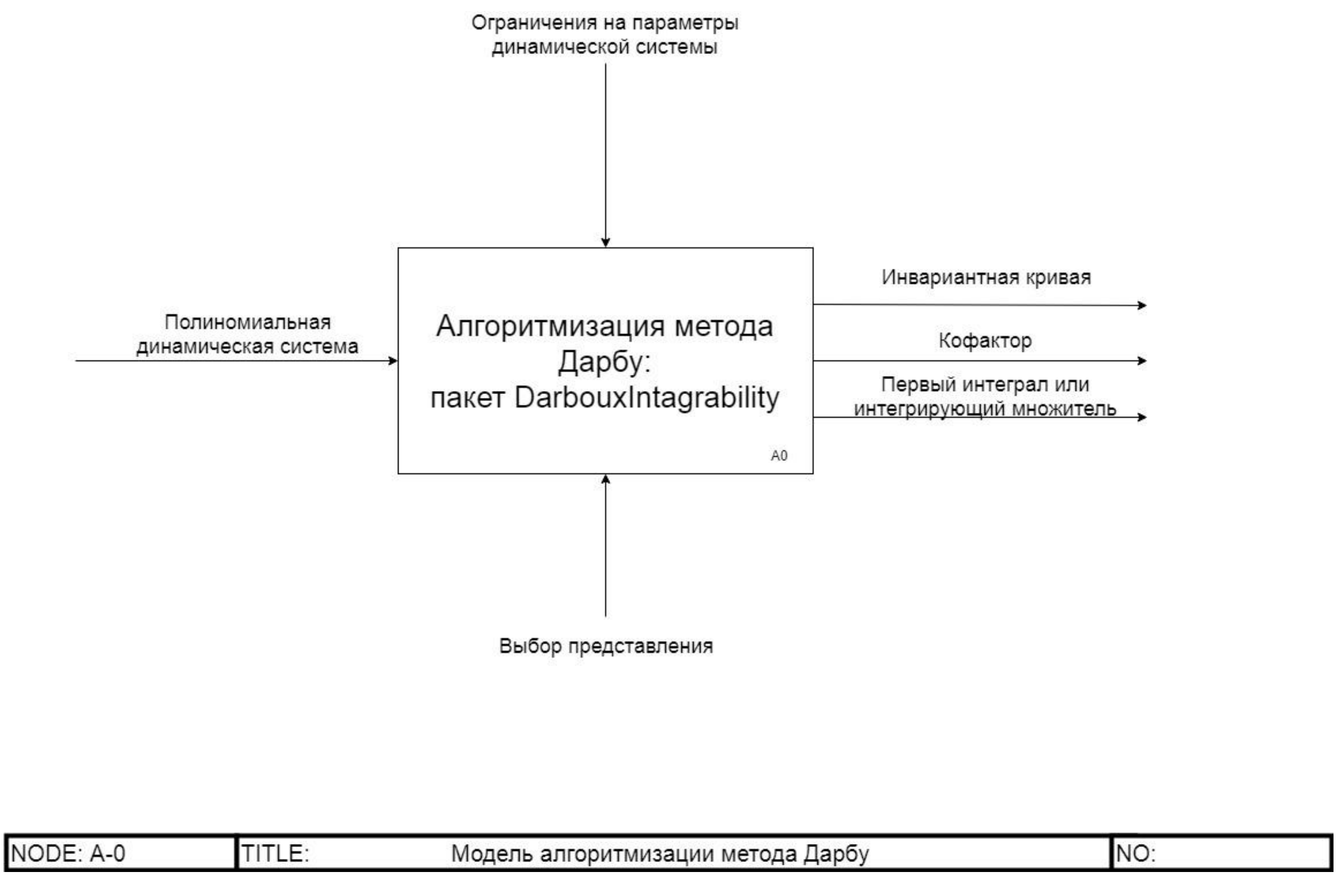


Рисунок 2.1 Контекстная диаграмма алгоритмизации метода Дарбу

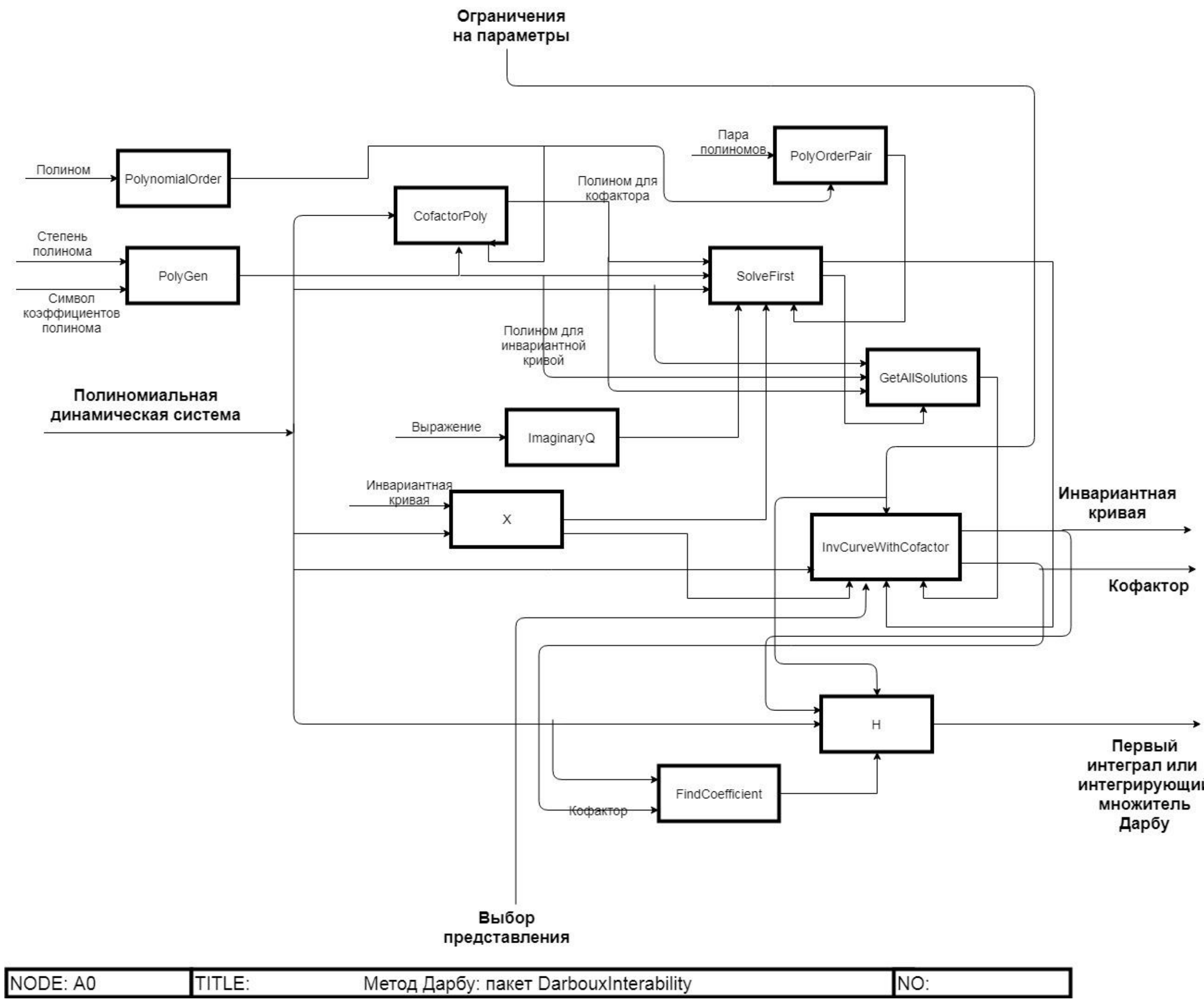


Рисунок 2.2 Диаграмма-функций и их взаимосвязей

2.2 Проектирование и анализ интерфейса

Пользовательский интерфейс — это совокупность информационной модели проблемной области, средств и способов взаимодействия пользователя с информационной моделью, а также компонентов, обеспечивающих формирование информационной модели в процессе работы программной системы [21].

Информационная модель – условное представление проблемной области, формируемое с помощью компьютерных (визуальных и звуковых) объектов, отражающих состав и взаимодействие реальных компонентов системы [21].

Стратегия разработки интерфейса:

- разрабатывать интерфейс как отдельный компонент системы;
- учитывать возможности аппаратных и программных средств;
- использовать принятые принципы для создания графического интерфейса;
- понимать задачу и желания пользователя;
- предусмотреть средства адаптации в рамках интерфейса.

Основное назначение проектируемого интерфейса – интуитивно понятное применение пакета DarbouxIntegrability.

Интерфейс представляет собой окно с 2 вкладками для выбора размерности системы, каждая вкладка содержит 4 секции (1 открытая и 3 закрытые секции), 4 поля для ввода (3 отображающиеся сразу после запуска и 1 после открытия секции или выбора checkbox), 2 checkbox и 3 кнопки (рис.2.3, 2.4).

Вкладка «2D system»:

Первая секция (открытая):

- поле для ввода полинома $P(x, y)$;
- поле для ввода полинома $Q(x, y)$;
- поле для ввода степени инвариантной кривой;
- checkbox для выбора представления результата: если checkbox выбран, то ответ будет в символьном представлении, при запуске интерфейса checkbox по умолчанию не выбран.

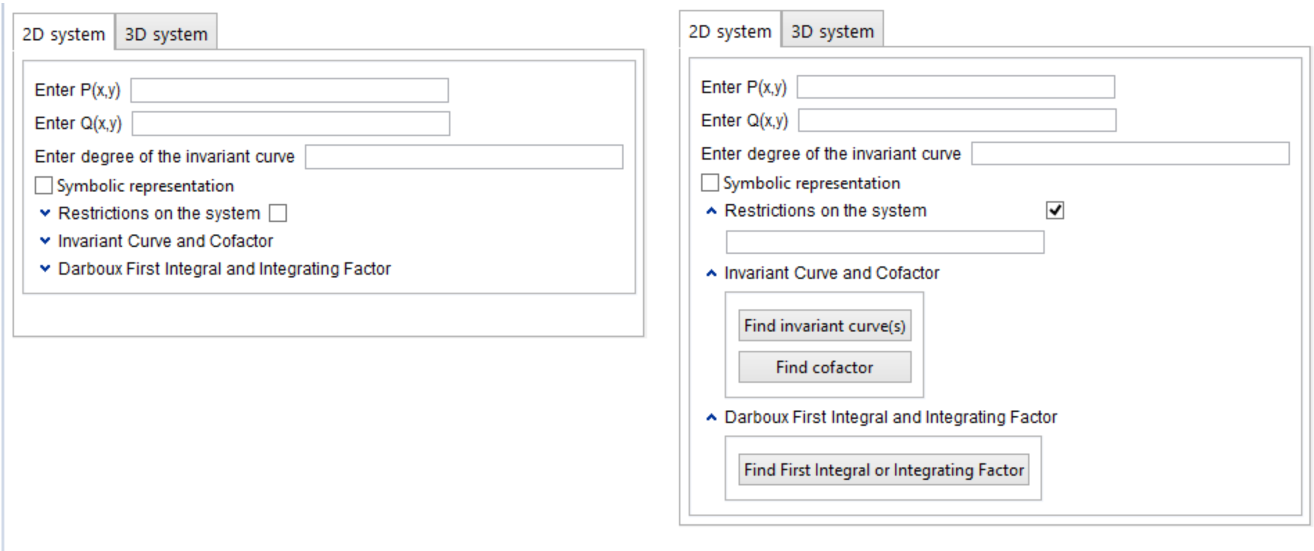


Рисунок 2.3 Интерфейс пользователя для системы (1)

Вкладка «3D system»:

Первая секция (открытая) содержит:

- поле для ввода полинома $P(x, y, z)$;
- поле для ввода полинома $Q(x, y, z)$;
- поле для ввода полинома $R(x, y, z)$;
- поле для ввода степени инвариантной поверхности;
- checkbox для выбора представления результата: если checkbox выбран, то ответ будет в символьном представлении, при запуске интерфейса checkbox по умолчанию не выбран.

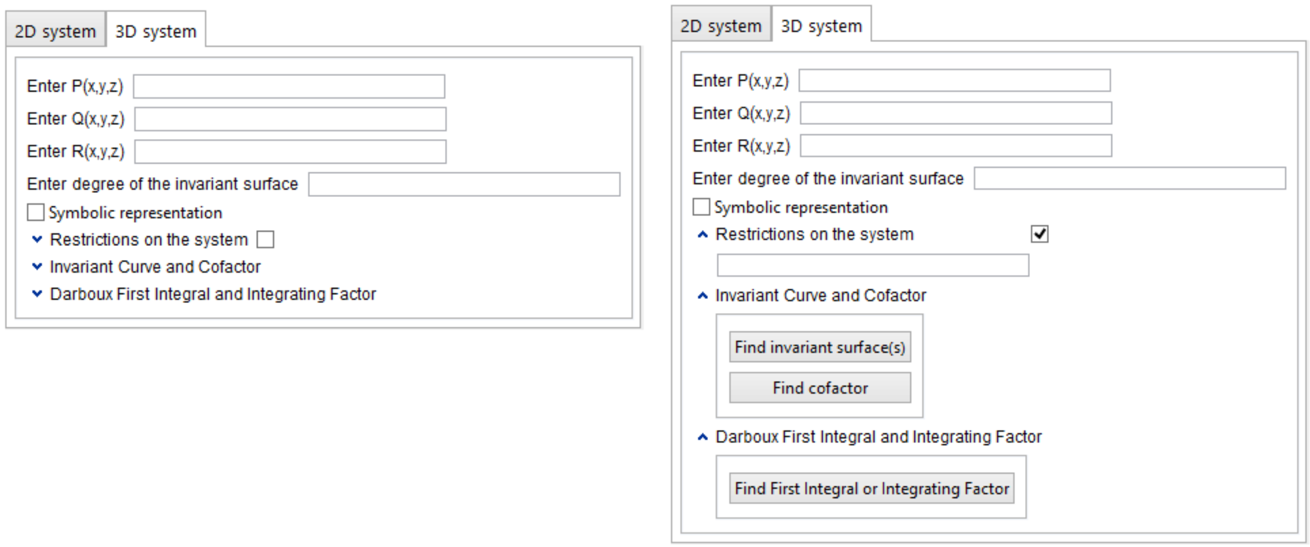


Рисунок 2.4 Интерфейс пользователя для системы (8)

Секция 2 Restrictions on the system предназначена для установки ограничений на параметры системы:

- для открытия секции можно выбрать checkbox или воспользоваться кнопкой ;
- поле для ввода ограничений на параметры системы.

Секция 3 Invariant Curve and Cofactor содержит две кнопки, предназначенные:

- Find invariant curve(s)/surface(s) – для нахождения инвариантных кривых (поверхностей), если они существуют, то возвращает их в виде списка;
- Find cofactor – для нахождения кофакторов, если они существуют, то возвращает их в виде списка;

Кнопки запускают действие алгоритма только при условии заполнения секции 1.

Секция 4 Darboux First Integral and Integrating Factor содержит кнопку, позволяющую вычислить первый интеграл или интегрирующий множитель Дарбу. В результате нажатия кнопки система возвращает выражение $f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q}$ (если оно существует) и сообщение о том, чем является полученное выражение.

2.3 Реализация цифрового продукта

Функции, описанные в таблице 2.1, были реализованы в пакете DarbouxIntegrability в *Wolfram Mathematica*.

Интерфейс реализован в файле packageInterface в *Wolfram Mathematica*.

Пакет представляет собой файл с расширением «.m», в котором заданы функции и их описание в стиле справки Mathematica.

Существует несколько способов программирования файла «.m»: либо работать непосредственно с файлом внутри *Mathematica*, либо из текстового редактора, либо через Wolfram Workbench. В процессе выполнения использовалась *Mathematica*.

В рамках *Mathematica* есть два подхода. Первый – открыть файл «.m» прямо в *Mathematica* и отредактировать его там. Второй – создать *Mathematica* Notebook, который уже содержит код и где *Mathematica* позволяет автоматически его сохранить в «.m»-файле пакета.

Для создания «.m» файла в *Mathematica* нужно использовать в командном меню File → New → Package.

Для использования пакета существует несколько способов. Первый – в «.m» файле нажать кнопку Run Package (рис.2.5). Этот метод используется при разработке и тестировании пакета.

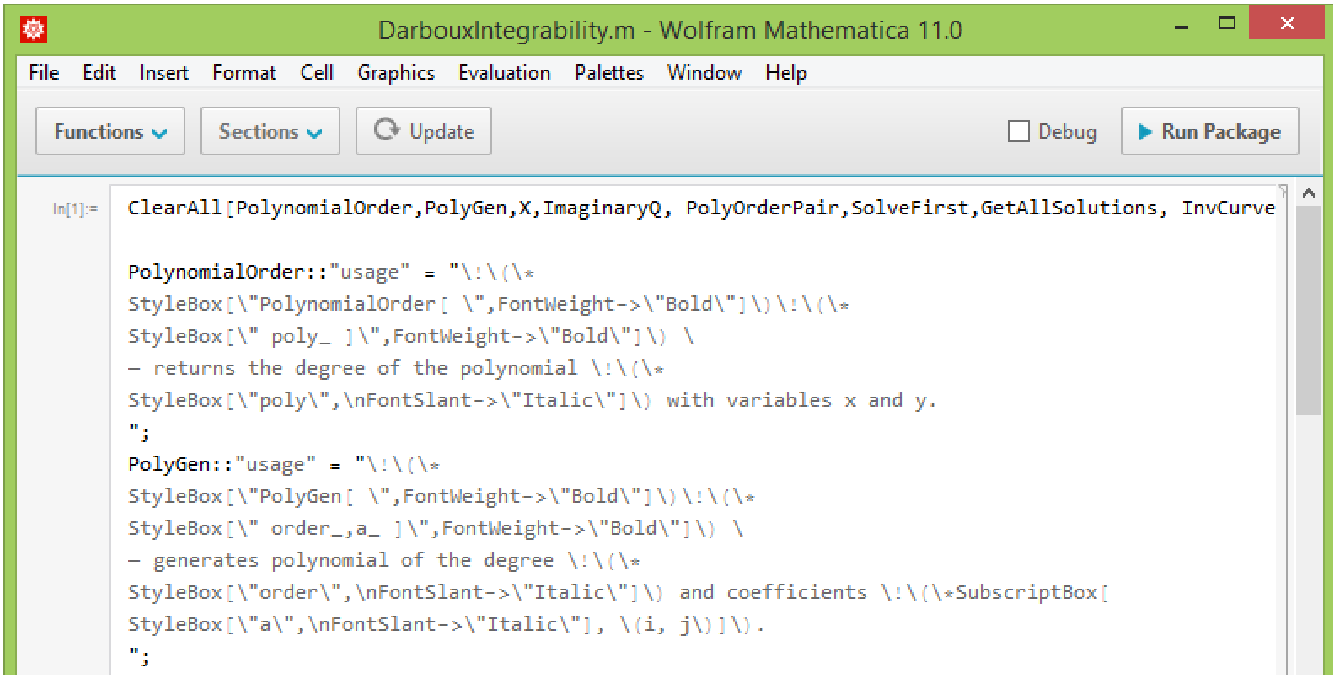


Рисунок 2.5 Вид кода в пакете

Второй способ – загрузить командой Get (алиасом команды является <<) с указанием директории, где находится пакет (рис.2.6).

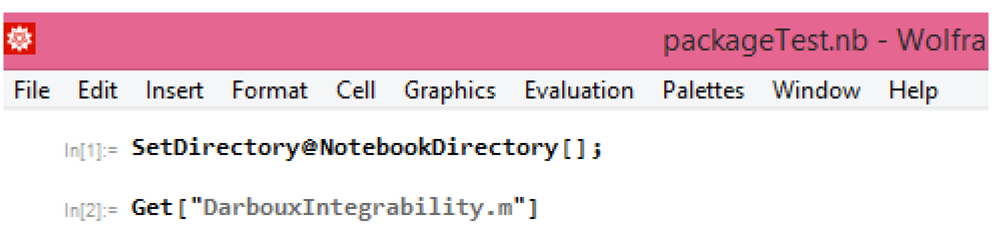


Рисунок 2.6 Пример загрузки пакета DarbouxIntegrability

Третий способ – загрузить командой Needs – Needs["DarbouxIntegrability`"].

Получить список доступных в пакете функций можно, воспользовавшись командой Names – Names["DarbouxIntegrability `*"].

Чтобы получить справку по применению функций, нужно в Mathematica Notebook в ячейке написать ?FunctionName (рис.2.7):

```
?PolynomialOrder
```

PolynomialOrder[poly_] — returns the degree of the polynomial *poly* with variables x and y.

```
?PolyGen
```

PolyGen[order_, a_, type_] — generates polynomial of the degree *order* and coefficients $a_{i,j}$ for the given *type* system.
Type can be 2D or 3D, by default it is 2D.

```
?X
```

X[P_, Q_, R_] — vector field associated to the system $\frac{dx}{dt}=P(x,y,z)$, $\frac{dy}{dt}=Q(x,y,z)$, $\frac{dz}{dt}=R(x,y,z)$.
For planar system $\frac{dx}{dt}=P(x,y)$, $\frac{dy}{dt}=Q(x,y)$ R should be 0.

Рисунок 2.7 Справка по функциям из пакета

ГЛАВА 3
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДАРБУ

Метод Дарбу активно применяется в настоящее время. Данная глава посвящена тестам, проведенным на построенной системе. Работа пакета DarbouxIntegrability тестирована на двумерных полиномиальных системах дифференциальных уравнений с нелинейностями второго, третьего, 4-го порядка, системах Льенара, а также для трехмерных систем. Материалы для тестирования были взяты из современных опубликованных результатов в данной области, таких как [2, 26, 28, 29, 30, 31]. При тестировании программы полученные результаты совпадали с опубликованными, но находились и системы, для которых алгоритм не определял указанную в статье инвариантную кривую [28] или находил новые инвариантные кривые (поверхности) и кофакторы [22]. Это объясняется спецификой работы функций *Wolfram Mathematica* и метода Дарбу при исследовании некоторых систем.

3.1 Квадратичные системы

1. Рассмотрим действительную квадратичную систему с параметром b [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - b(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x. \end{cases} \tag{12}$$

Использование пакета DarbouxIntegrability в режиме 2D позволило вычислить для системы (12) инвариантную кривую второго порядка и получить интегрирующий множитель (рис.3.1). Результат совпадает с результатами, представленными в [2].

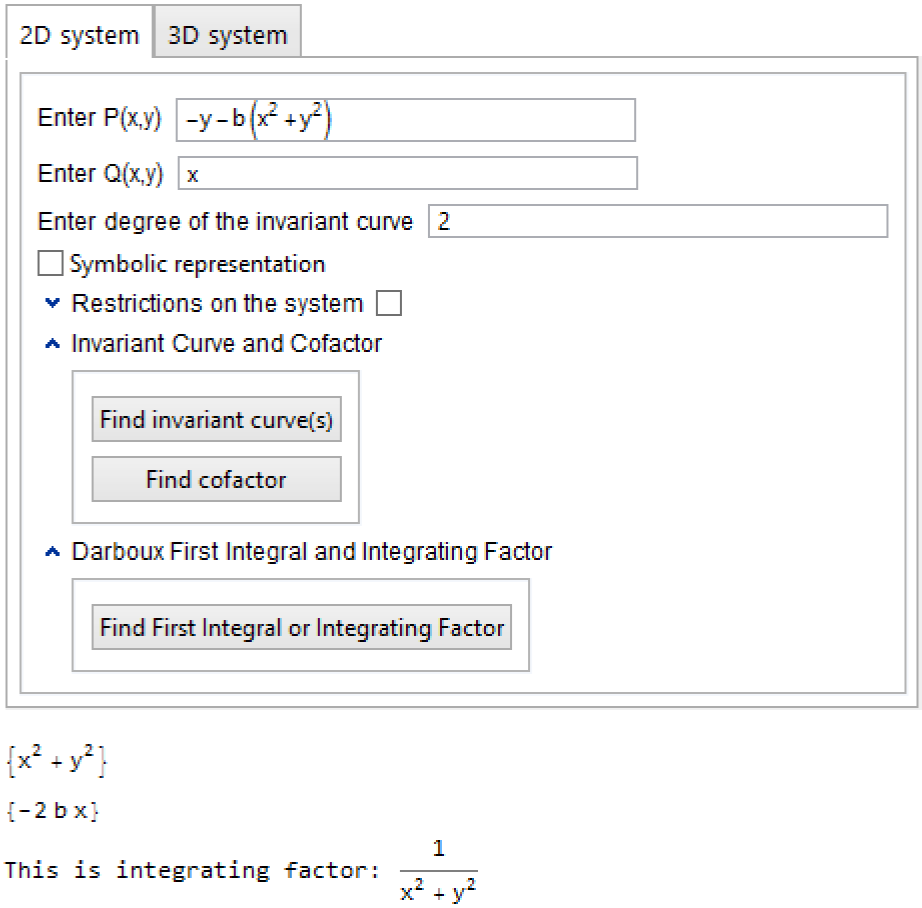


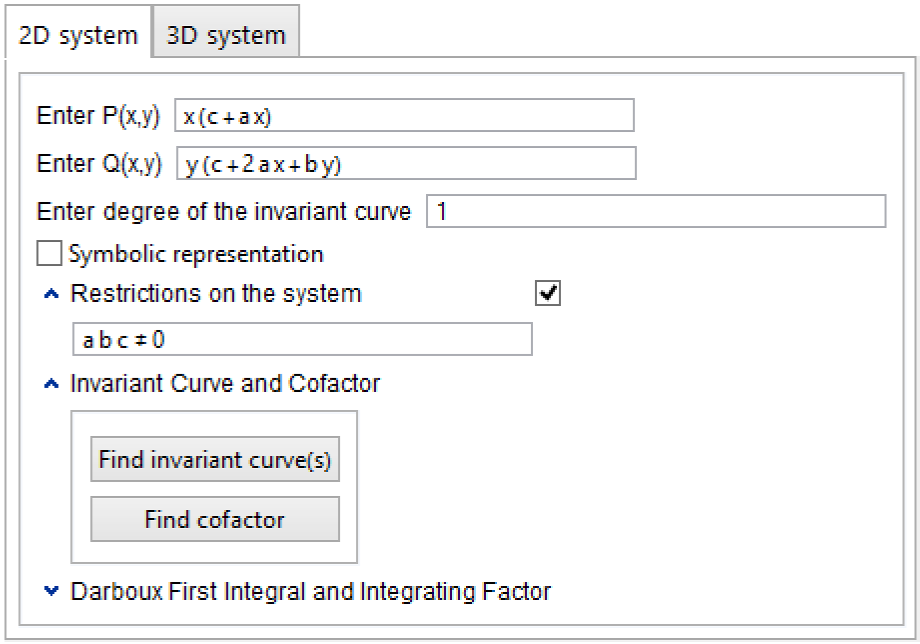
Рисунок 3.1 Интегрирующий множитель для системы (12)

2. Рассмотрим систему вида (1) с 3-мя параметрами a, b, c [2]

$$\begin{cases} \dot{x} = x\,(ax + c), \\ \dot{y} = y\,(2\,a\,x + b\,y + c), \end{cases} \tag{13}$$

при условии, что $a\,b\,c \neq 0$.

Для системы (13) с ограничениями на параметры найдено 5 инвариантных кривых и соответствующих им кофакторов. Полученные результаты (рис.3.2) совпадают с результатами, опубликованными в [2].



$$\left\{\frac{c}{b}+\frac{a\,x}{b}+y,\ \frac{a\,x}{b}+y,\ \frac{c}{a}+x,\ x,\ y\right\}$$

$$\{a\,x+b\,y,\ c+a\,x+b\,y,\ a\,x,\ c+a\,x,\ c+2\,a\,x+b\,y\}$$

Рисунок 3.2 Работа пакета при введенных ограничениях на параметры

3. Рассмотрим применение метода Дарбу при исследовании модели химической реакции.

Для этого построим модель молекул автокатализа, образующих комплекс [26]:

- имеются две молекулы X и Y, которые индуцируют собственное производство, опосредованное молекулами A и B;
- X и Y также могут образовывать комплекс C (= XY);
- дополнительно предположим, что есть избыток A и B, в результате чего их концентрации являются постоянными. Так как динамика X и Y не зависит от комплекса C, она будет исключена из анализа.

Химическая реакция:

$$X + Y \rightarrow 2X$$

$$A + X \rightarrow 2X$$

$$B + Y \rightarrow 2Y$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений:

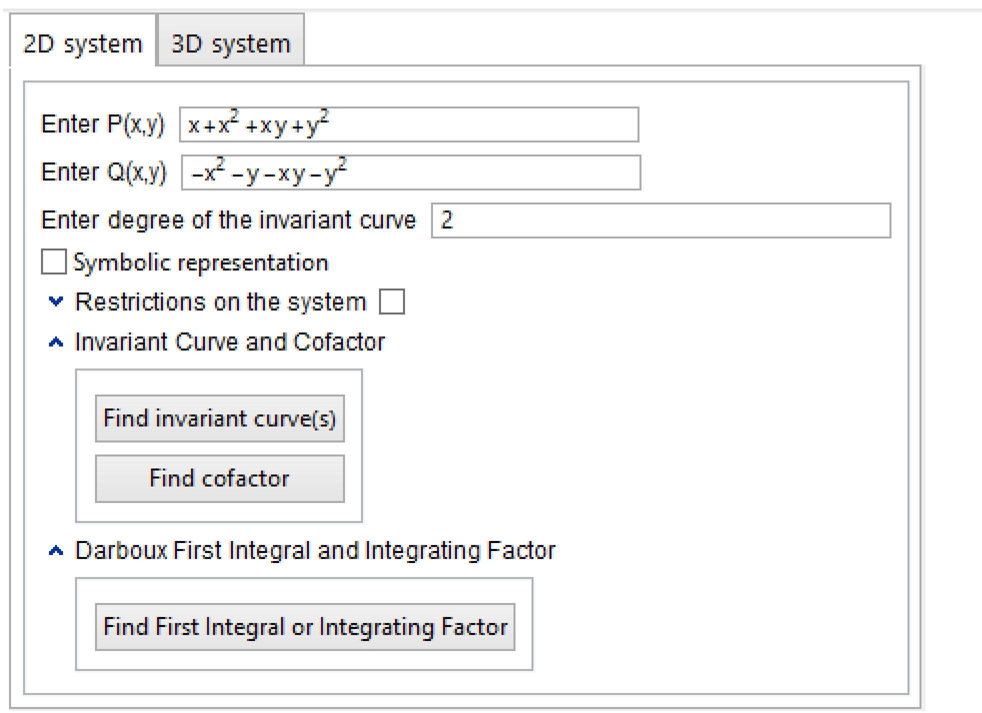
$$\dot{x} = x + a_{20}x^2 + xy + a_{02}y^2,$$
$$\dot{y} = -y - a_{02}x^2 - xy + a_{20}y^2$$

где a_{02}, a_{20} – константы.

Рассмотрим частный случай системы с $a_{02} = 1, a_{20} = 1$.

$$\dot{x} = x + x^2 + xy + y^2,$$
$$\dot{y} = -y - x^2 - xy + y^2 \qquad (14)$$

При тестировании была найдена инвариантная кривая 2-го порядка, соответствующий ей кофактор, а также интегрирующий множитель (рис.3.3). Полученные результаты могут быть использованы для исследования существования предельных циклов системы (14).



$$\left\{1 + x + \frac{x^2}{2} + y + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2}\right\}$$

$\{x - y\}$

This is integrating factor: $\dfrac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + y + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2}}$

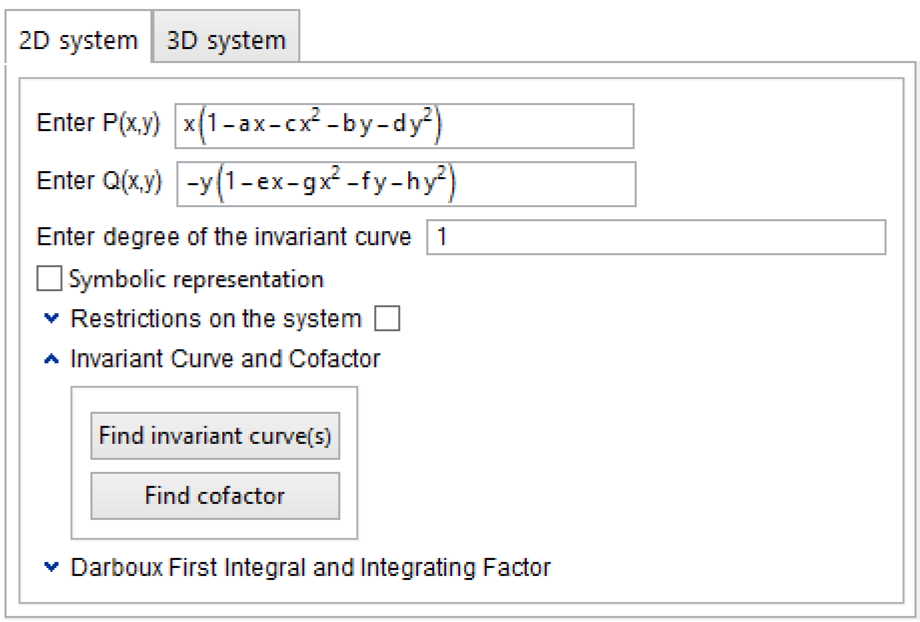
Рисунок 3.3 Применение метода Дарбу при исследовании химической реакции

3.2 Семейства кубических систем

1. Рассмотрим систему с нелинейностями третьего порядка с 8-ю параметрами из [32]

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - ax - cx^2 - by - dy^2), \\ \dot{y} = -y(1 - ex - gx^2 - fy - hy^2). \end{cases} \tag{15}$$

Для данной системы были обнаружены 2 инвариантные кривые 1-го порядка и кофакторы (рис.3.4):



$\{x, y\}$

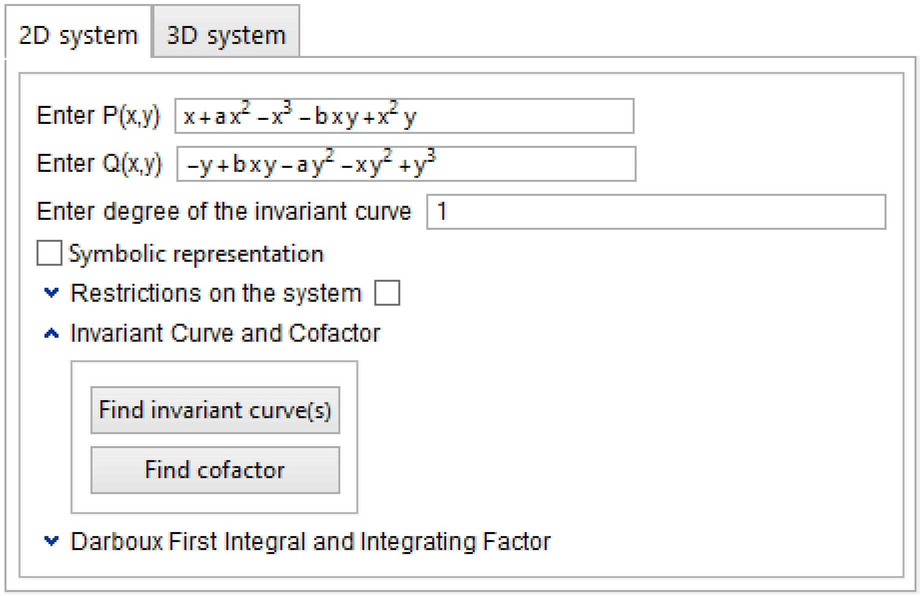
$\{1 - a x - c x^2 - b y - d y^2, -1 + e x + g x^2 + f y + h y^2\}$

Рисунок 3.4 Пример работы программы для системы с 8-ю параметрами

2. Рассмотрим кубическую систему из [30]

$$\begin{cases} \dot{x} = x + ax^2 - x^3 - bxy + x^2y, \\ \dot{y} = -y + bxy - ay^2 - xy^2 + y^3. \end{cases} \tag{16}$$

Для системы (16) найдены 2 инвариантные кривые и соответствующие им кофакторы (рис.3.5).



$\{x, y\}$

$\{1 + a\,x - x^2 - b\,y + x\,y,\ -1 + b\,x - a\,y - x\,y + y^2\}$

Рисунок 3.5 Инвариантные кривые и кофакторы для системы (16)

3. Рассмотрим систему из [30]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{4xy}{3}, \\ \dot{y} = x - \frac{4x^2}{3} + \frac{16x^3}{27} + 4y^2. \end{cases} \tag{17}$$

Для данной системы найдены инвариантные кривые 1-го (рис.3.6) и 2-го порядка, а также построен первый интеграл Дарбу (рис.3.7).

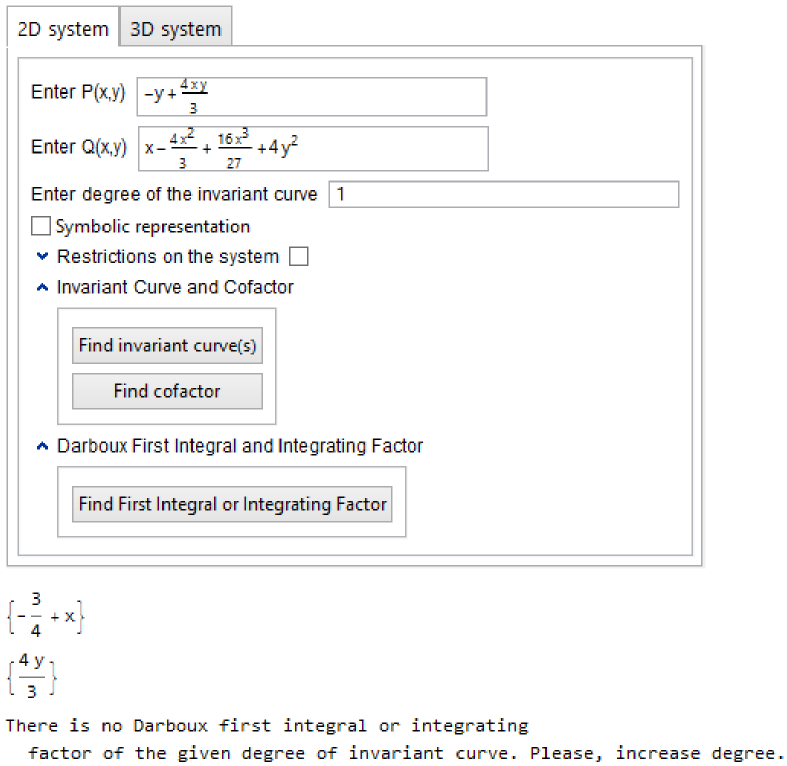


Рисунок 3.6 Инвариантная кривая 1-го порядка и кофактор для системы (17)

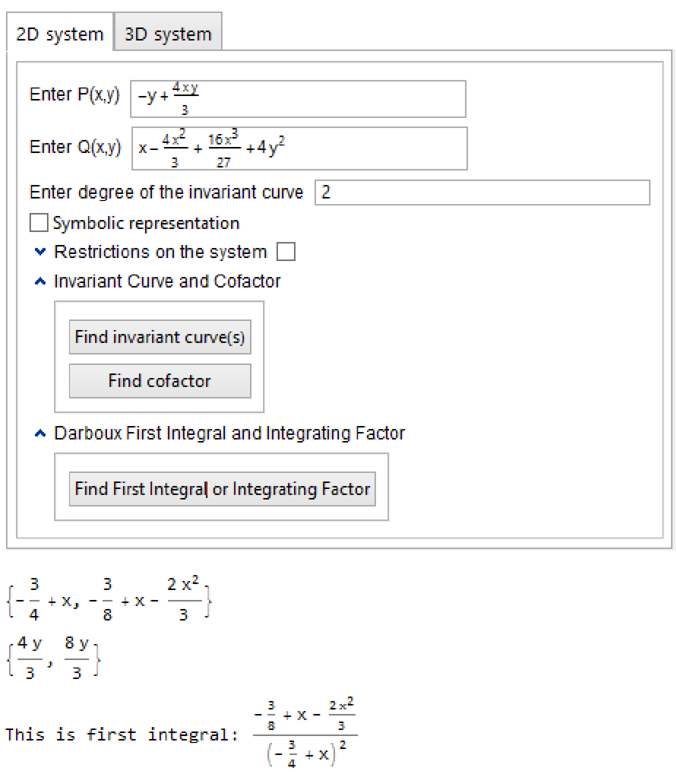


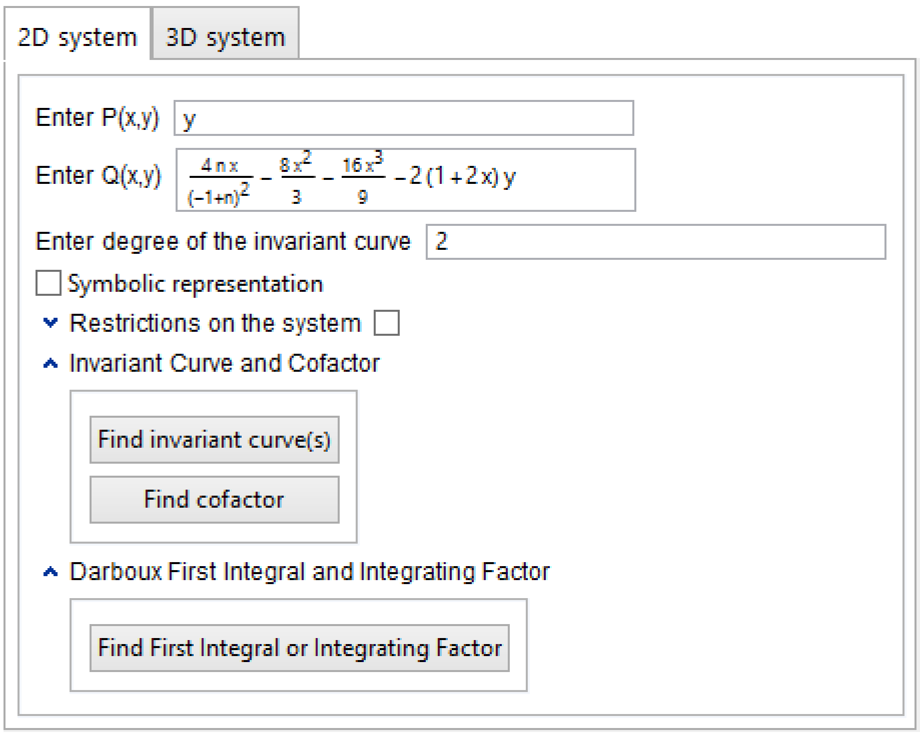
Рисунок 3.7 Первый интеграл Дарбу системы (17)

3.3 Системы Льенара

Рассмотрим систему Льенара, исследуемую в [22]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \dfrac{4nx}{(-1+n)^2} - \dfrac{8x^2}{3} - \dfrac{16x^3}{9} - 2(1+2x)y. \end{cases} \tag{18}$$

Для системы (18) были найдены новые инвариантные кривые, ранее не указанные в [22], а также построен первый интеграл Дарбу (рис.3.8):



$$\left\{x + \frac{2\,(-1+n)\,x^2}{3\,n} + \frac{(-1+n)\,y}{2\,n},\ x - \frac{2}{3}\,(-1+n)\,x^2 + \frac{1}{2}\,(1-n)\,y,\ -\frac{3\,n}{2\,(-1+n)^2} + x + \frac{2\,x^2}{3} + \frac{y}{2}\right\}$$

$$\left\{\frac{2}{-1+n} - \frac{4\,x}{3},\ -\frac{2\,n}{-1+n} - \frac{4\,x}{3},\ -\frac{4\,x}{3}\right\}$$

This is first integral:

$$\left(-\frac{3\,n}{2\,(-1+n)^2} + x + \frac{2\,x^2}{3} + \frac{y}{2}\right)^{-1-n} \left(x - \frac{2}{3}\,(-1+n)\,x^2 + \frac{1}{2}\,(1-n)\,y\right) \left(x + \frac{2\,(-1+n)\,x^2}{3\,n} + \frac{(-1+n)\,y}{2\,n}\right)^{n}$$

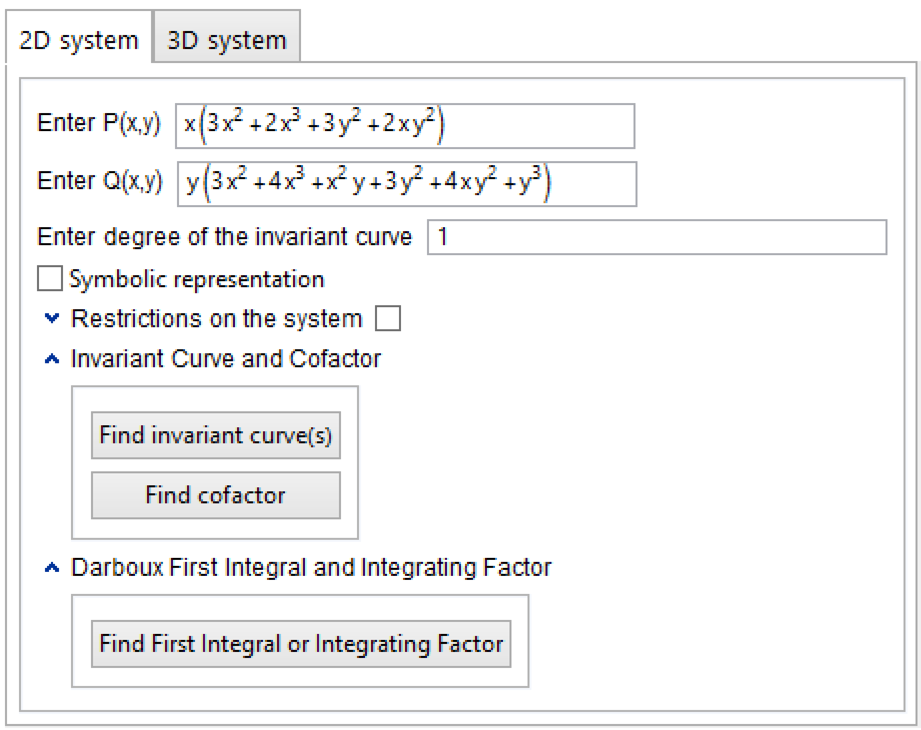
Рисунок 3.8 Работа программы для системы Льенара

3.4 Семейства систем с нелинейностями 4 порядка

1. Рассмотрим систему с нелинейностями 4-го порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3x^2 + 2x^3 + 3y^2 + 2xy^2), \\ \dot{y} = y(3x^2 + 4x^3 + x^2y + 3y^2 + 4xy^2 + y^3). \end{cases} \tag{19}$$

Для системы (19) были найдены инвариантные кривые 1-го порядка и соответствующие им кофакторы, а также построен первый интеграл Дарбу (рис.3.9):



$$\left\{x,\ \frac{3}{2}+x,\ y,\ 2x+y,\ 3+2x+y\right\}$$

$$\{3x^2+2x^3+3y^2+2xy^2,\ 2x^3+2xy^2,\ 3x^2+4x^3+x^2y+3y^2+4xy^2+y^3,$$
$$3x^2+2x^3+x^2y+3y^2+2xy^2+y^3,\ 2x^3+x^2y+2xy^2+y^3\}$$

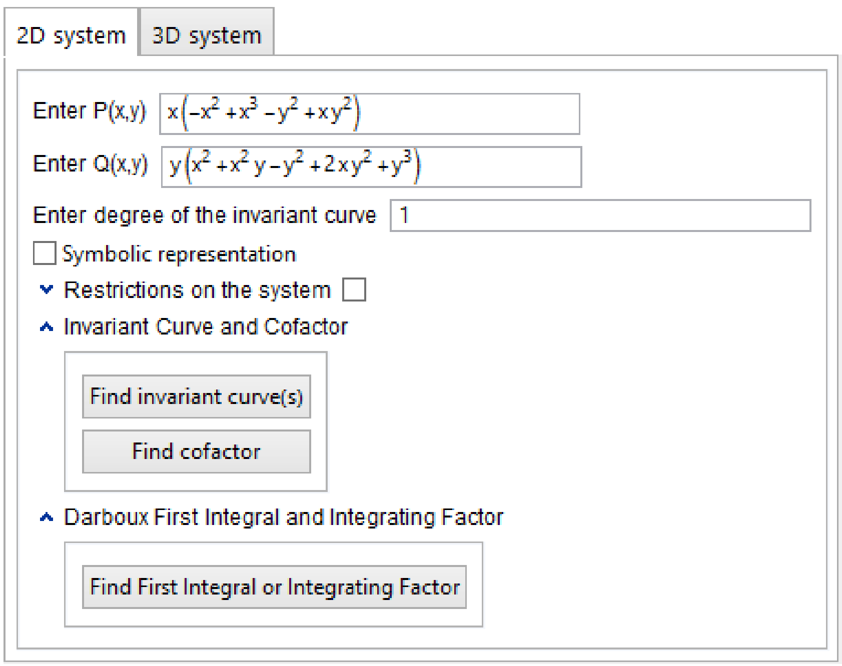
This is first integral: $\dfrac{x\left(\frac{3}{2}+x\right)(2x+y)(3+2x+y)}{y^2}$

Рисунок 3.9 Первый интеграл системы (19)

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-x^2 + x^3 - y^2 + xy^2), \\ \dot{y} = y(x^2 + x^2y - y^2 + 2xy^2 + y^3). \end{cases} \tag{20}$$

Для данной системы найдены инвариантные кривые 1-го (рис.3.10) и 2-го порядка, соответствующие им кофакторы, а также первый интеграл Дарбу (рис.3.11):

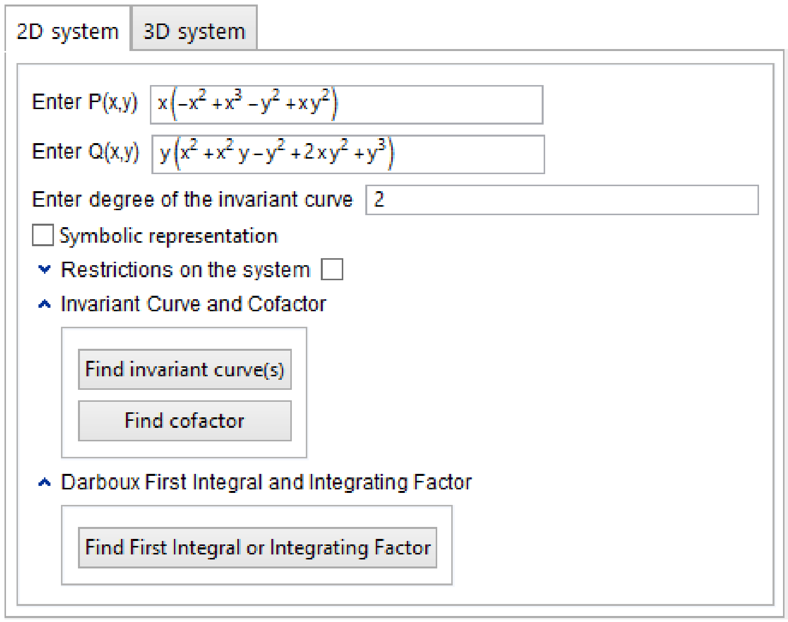


$\{x, -1 + x, y\}$

$\{-x^2 + x^3 - y^2 + x\,y^2,\ x^3 + x\,y^2,\ x^2 + x^2\,y - y^2 + 2\,x\,y^2 + y^3\}$

There is no Darboux first integral or integrating factor of the given degree of invariant curve. Please, increase degree.

Рисунок 3.10 Инвариантные кривые 1-го порядка и кофакторы системы (20)



$$\left\{x\,y,\ x,\ -1+x,\ x-x^2,\ -\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2},\ x^2,\ y^2,\ y,\ y-x\,y\right\}$$

$$\{x^3+x^2\,y-2\,y^2+3\,x\,y^2+y^3,\ -x^2+x^3-y^2+x\,y^2,\ x^3+x\,y^2,\ -x^2+2\,x^3-y^2+2\,x\,y^2,\ 2\,x^3+2\,x\,y^2,\ -2\,x^2+2\,x^3-2\,y^2+2\,x\,y^2,\ 2\,x^2+2\,x^2\,y-2\,y^2+4\,x\,y^2+2\,y^3,\ x^2+x^2\,y-y^2+2\,x\,y^2+y^3,\ x^2+x^3+x^2\,y-y^2+3\,x\,y^2+y^3\}$$

This is first integral: $\dfrac{(-1+x)\,x^4\left(-\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}\right)(y-x\,y)}{\left(x-x^2\right)^4 y}$

Рисунок 3.11 Первый интеграл системы (20)

3.5 Система Лотки-Вольтерры в трехмерном пространстве

Важным классом математических моделей, описывающих различные явления в биологии, химии и экологии, являются системы Лотки-Вольтерры [24], которые записываются в виде

$$\dot{x}_i = x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i\right), i = 1, \dots, n. \tag{21}$$

Они были предложены независимо Лоткой и Вольтеррой в 1920-х годах как модель взаимодействия между видами и активно изучаются сейчас.

Для класса систем (21) случай $n = 3$ является наиболее изучаемым [28]. Одной из моделей, описывающих конкуренцию трех видов, является модель, предложенная Мэй и Леонардом. Она представляет собой модель с шестью параметрами вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - \alpha_1 y - \beta_1 z), \\ \dot{y} = y(1 - \beta_2 x - y - \alpha_2 z), \\ \dot{z} = z(1 - \alpha_3 x - \beta_3 y - z), \end{cases} \tag{22}$$

где $x, y, z \geq 0$ и α_i, β_i $(1 \leq i \leq 3)$ – действительные параметры.

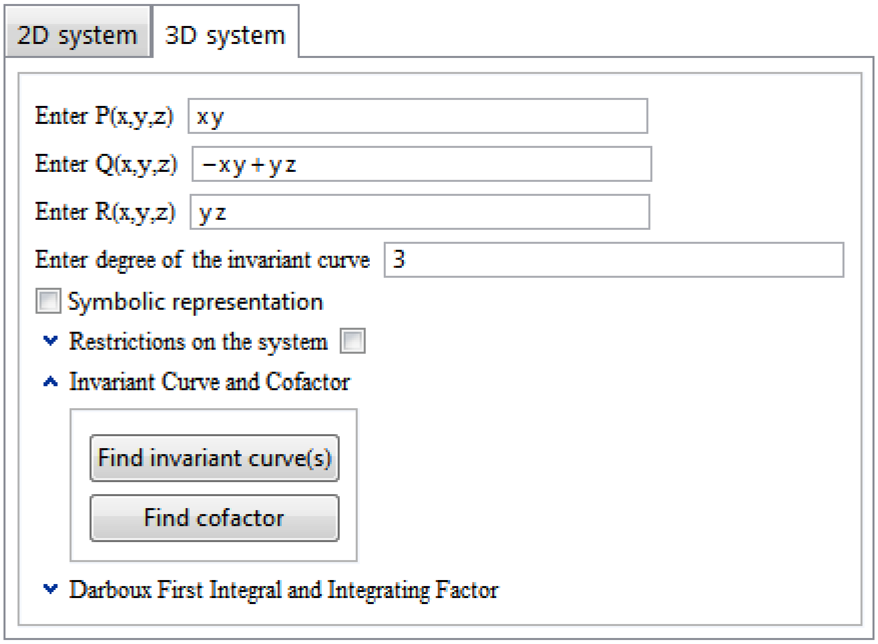
Еще одной известной моделью Лотки-Вольтерры является система Вольтерры вида

$$\begin{cases} \dot{x} = x(ry + sz), \\ \dot{y} = y(-rx + tz), \\ \dot{z} = z(-sx - ty), \end{cases} \tag{23}$$

Рассмотрен частный случай системы (23) $(r = 1, s = 0, t = 1)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = -xy + yz, \\ \dot{z} = yz. \end{cases} \tag{24}$$

Для системы (24) были найдены инвариантные поверхности 1-го, 2-го и 3-го порядка, а также соответствующие им кофакторы (рис.3.12).



$\{x^3 + x^2 z + x z^2 + z^3,\ x^2 + x z + z^2,\ x + z\}$

$\{3 y,\ 2 y,\ y\}$

Рисунок 3.12 Работа пакета для трехмерной системы (24)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В главе 1 был описан метод Дарбу и раскрыта его практическая значимость.

В главе 2 указано назначение цифрового продукта и описан процесс его проектирования.

В главе 3 приведены результаты тестирования созданного пакета DarbouxIntegrability на системах дифференциальных уравнений, исследуемых в современных научных публикациях.

При выполнении дипломной работы были созданы функции пользователя, которые для автономных динамических систем с полиномиальными правыми частями вычисляют инвариантные кривые и инвариантные поверхности, строят первый интеграл Дарбу или интегрирующий множитель Дарбу. Для удобства пользователя составлены описания функций в виде справки по их применению. Функции представлены в виде пакета для *Wolfram Mathematica*. Спроектирован и реализован интерфейс пользователя для работы с пакетом.

Созданный инструмент тестирован на двумерных системах дифференциальных уравнений с нелинейностями второго, третьего, четвертого порядка, для систем Льенара и на некоторых классах трехмерных систем. Для приведенной в главе 3 системы Льенара была найдена новая инвариантная кривая, ранее не описанная в [22]. Тесты проведены на основании современных опубликованных результатов в этой области [2, 26, 28, 29, 30, 31].

Полученные результаты могут быть использованы для классификации систем дифференциальных уравнений, обладающих интегралом определенного вида, а также для полного качественного исследования отдельных классов рассматриваемых систем.

Результаты дипломной работы докладывались на двух научных конференциях:

1. 4-я Международная научно-практическая конференция «Веб-программирование и интернет-технологии (WebConf2018)»;
2. 75-й научная конференция студентов и аспирантов БГУ.

Результаты дипломной работы опубликованы в тезисах докладов 4-ой Международной научно-практической конференции «Веб-программирование и интернет-технологии (WebConf2018)» в секции «Численные методы и компьютерное моделирование».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Romanovski, V.G. The center and cyclicity problems: a computational algebra approach/ V.G. Romanovski, D.S. Shafer. Basel: Birkhauser, 2010. – 330 p.
2. Dumortier, F. Qualitative theory of planar differential systems/ F. Dumortier, J. Llibre, J. Artes. – New York: Springer, 2006. – 302 p.
3. Christopher, C.J. On general algebraic mechanisms for producing centers in polynomial differential systems/ C.J. Christopher, D. Schlomiuk// J. of Fixed Point Theory and Appl. – 2008. – V. 3. – P. 331 – 351.
4. Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка/ В.В.~Амелькин, Н.А.~Лукашевич, А.П.~Садовский. --- Минск: Изд-во БГУ, 1982. --- 208~с.
5. Андреев, А.Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений: Учеб. пособие/ А.Ф.~Андреев. ---~СПб.: Изд-во С.-Петерб. университета, 2003.---~160~с.
6. Качественная теория динамических систем второго порядка/ А.А.~Андронов [и др.]. ---~М.: Наука, 1966. ---~568~с.
7. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости/ Н.Н.~Баутин, Е.А.~Леонтович. --- М.: Наука, 1976. --- 496 с.
8. Горбузов, В.Н. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений/ В.Н.~Горбузов, В.Ю.~Тыщенко// Математический сборник РАН. 1992. --- Т.~183, №~3. --- С.~76 -- 94.
9. Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений/ Н.П.~Еругин. --- 3-е изд. --- Мн.: Наука и техника, 1979. --- ~744~с.

10. Немыцкий, В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений/ В.В.~Немыцкий, В.В.~Степанов. --- 3-е изд. --- М.: Едиториал УРСС, 2004. --- 552~с.
11. Руденок, А.Е. Условия центра при наличии у системы алгебраической инвариантной кривой/ А.Е.~Руенок// Труды 5-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений". --- 2010. --- Т.~2. --- С.~105 -- 113.
12. Cozma, D. Conditions of center for some cubic systems with three linear particular integrals/ D.~Cozma, A.~ Shuba//Scripta scientiarum mathematicarum --- 1997. --- V.~1, №~1. --- P.~82~--~94
13. Cozma, D. The problem of the centre for cubic systems with two parallel invariant straight lines and one conic/ D.~Cozma// NoDEA. ---~2009. --- V.~16. --- P.~213~--~234.
14. Cozma, D. Solution of the problem of centre for cubic differential systems with three invariant straight lines/ D.~Cozma, A.~Shuba// Qualitative theory of dynamical systems. --- 2001. --- V.~2. --- P.~129~--~143.
15. Christopher, C.J. Invariant algebraic curves and conditions for a center/ C.J.~Christopher// Proceeding of the Royal Society of Edinburgh. --- 1994. --- V.~124A. --- P.~1209~-- 1229.
16. Schlomiuk, D. Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center/ D.~Schlomiuk// Trans. Amer. Math. Soc. --- 1993. --- V.~338. --- P.~799 – 841
17. Schlomiuk, D. Elementary first integrals of differential equations and invariant algebraic curves/ D.~Schlomiuk// Expositiones Math. --- 1993. --- V.~11. --- P.~433 -- 454.
18. Schlomiuk, D. Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center/ D.~Schlomiuk// Trans. Amer. Math. Soc. --- 1993. --- V.~338. --- P.~799 -- 841.

19. Schlomiuk, D. Elementary first integrals of differential equations and invariant algebraic curves/ D.~Schlomiuk// Expositiones Math. --- 1993. --- V.~11. --- P.~433 -- 454.
20. Садовский, А.П. Центры кубической системы с инвариантной прямой/ А.П.~Садовский, Т.В.~Щеглова// "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений": тез. докл. Междунар. матем. конф., Минск, 10 --- 14 сентября 2012 г./ Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; редкол.: С.В.Рогозин. ---~Минск, 2012. --- С.~63.
21. Гультяев А.К., Машин В.А. Проектирование и дизайн пользовательского интерфейса - СПб.: Корона-Принт, 2007. - 239 с.
22. J. Llibre, G. Świrszcz, An example of a cubic Liénard system with linear damping having invariant algebraic curves of arbitrary degree, Preprint, CRM, 2003
23. Wolfram Mathematica [Электронный ресурс] /Wolfram – Режим доступа: https://www.wolfram.com/mathematica/ –Дата доступа: 10.05.2018
24. W. T. Resende Fernandes, Centers and Isochronicity of Some Polynomial Differential Systems ---2017. --- P.~137 –145
25. R. E.Kooij, C. J.Christopher, Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems, Appl. Math. Lett. --- Vol. 6 --- No. 4 --- pp. 51-53 – 1993
26. A. M. Hussien, Polynomial inverse integrating factors, first integral and non-existence of limit cycles in the plane for quadratic systems, Sjuoz, V.5 --- No.2 --- pp.232-238 --- 2017
27. Функциональный подход к программированию [Электронный ресурс] / Информационно-коммуникационные технологии в образовании – Режим доступа: http://ict.edu.ru/ft/005135//ch3.pdf – Дата доступа: 15.05.2018

28. Yiannis T. Christodoulides, Pantelis A.Damianou, Darboux polynomials for Lotka-Volterra systems in three dimensions, J. Nonlinear Math. Phys. 16, 339 (2009)
29. Jaume Gine, Non-existence of limit cycles for planar vector fields, Electronic J. Differential Equations, March 2014
30. Xingwu Chen, V. G. Romanovski, Linearizability conditions of time-reversible cubic systems, J. Mathematical Analysis and Applications, V.362 --- I.2 --- 2010 --- pp.438-449
31. Z. Kadyrsizova, V.G. Romanovski, First Integrals of a Cubic System of Differential Equations, AIP Conference Proceedings 1076, 104 (2008)
32. D. Dolicanin, G. V. Milovanovic, V. G. Romanovski, Linearizability conditions for a cubic system/ Applied Mathematics and Computation 190 (2007) pp. 937–945

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Код программы

Спроектированный в работе алгоритм реализован на языке Wolfram *Mathematica*. Ниже приведены коды функций, реализующих алгоритм.

Пакет DarbouxIntegrability

```
ClearAll[PolynomialOrder, PolyGen, X, ImaginaryQ, PolyOrderPair, SolveFirst,
  GetAllSolutions, InvCurveWithCofactor, Cofactor, FindCoefficient, H,
  CofactorPoly ];

PolynomialOrder::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"PolynomialOrder[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" poly_ ]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— returns the degree of the polynomial \!\(\*
StyleBox[\"poly\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) with variables x and y.
";
PolyGen::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"PolyGen[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" order_,a_,type_ ]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— generates polynomial of the degree \!\(\*
StyleBox[\"order\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) and coefficients
    \!\(\*SubscriptBox[
StyleBox[\"a\",\nFontSlant->\"Italic\"], \(i, j\)]\) for the given \!\(\*
StyleBox[\"type\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) system.
Type can be 2D or 3D, by default it is 2D.
";
```

```
X::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"X[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" P_, Q_, R_]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— vector field associated to the system \!\(\*FractionBox[\(dx\),
    \(dt\)]\)=P(x,y,z), \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y,z),
    \!\(\*FractionBox[\(dz\), \(dt\)]\)=R(x,y,z).
For planar system \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y),
    \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y) R should be 0.
";
ImaginaryQ::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"ImaginaryQ[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" expr_]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— checks whether expression \!\(\*
StyleBox[\"expr\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) contains complex
    members; returns True if \!\(\*
StyleBox[\"expr\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" \",\nFontSlant->\"Italic\"]\)contains complex member and
    False otherwise.
";

PolyOrderPair::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"PolyOrderPair[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" pair_]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— checks whether list \!\(\*
StyleBox[\"pair\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" \",\nFontSlant->\"Italic\"]\)of the polynomial contains
    constant polynomial; returns 1 if contains and 0 otherwise.
";
```

```
SolveFirst::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"SolveFirst[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" P_,Q_,R_{invc_,cofactor_}]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— returns invariant curve (surface) and corresponding cofactor with
    undetermined coefficients, first step in obtaining result; \!\(\*
StyleBox[\"invc\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) - polynomial for invariant
    curve, \!\(\*
StyleBox[\"cof\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) - polynomial for cofactor with degree.
SolveFirst[P_,Q_, R_, {invc_,cof_}, restriction_] — returns the invariant
    curve (surface) and corresponding cofactor with undetermined
    coefficients of the polynomial system with restrictions. By
    default there are no restrictions.
";

GetAllSolutions::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"GetAllSolutions[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" P_,Q_, R_,{invc_,cofactor_}]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— returns all real invariant curves (surfaces) and corresponding cofactors
    with undetermined coefficients, second step in obtaining result; \!\(\*
StyleBox[\"invc\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) - polynomial for invariant
    curve (surface), \!\(\*
StyleBox[\"cof\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) - polynomial for cofactor.
GetAllSolutions[P_,Q_, R_,{invc_,cof_}, restriction_] — returns all
    real invariant curves (surface) and corresponding cofactors with
    undetermined coefficients of the polynomial system with restrictions.
    By default there are no restrictions.
";
```

```
InvCurveWithCofactor::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"InvCurveWithCofactor[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" P_,Q_, R_, invc_,cof_]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— returns the invariant curves (surfaces) and corresponding
    cofactors of the dynamic polynomial system \!\(\*FractionBox[\(dx\),
    \(dt\)]\)=P(x,y,z), \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y,z),
    \!\(\*FractionBox[\(dz\), \(dt\)]\)=R(x,y,z) (degree of the system
    is n); \!\(\*
StyleBox[\"invc\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) - polynomial for invariant
    curve, \!\(\*
StyleBox[\"cof\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) - polynomial for cofactor
    with degree (n-1).
InvCurveWithCofactor[P_,Q_, R_invc_,cof_, opt_] — if \!\(\*
StyleBox[\"opt\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) is 1, returns the
    invariant curves and corresponding cofactors without free terms; if \!\(\*
StyleBox[\"opt\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) is 0, returns the invariant
    curves and corresponding cofactors in the form of family of
    functions. By default \!\(\*
StyleBox[\"opt\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)=1.
InvCurveWithCofactor[P_,Q_,invc_,cof_, opt_, restriction_] —
    returns the invariant curves and corresponding cofactors of the
    polynomial system with restrictions. By default there are no restrictions.
For planar system \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y),
    \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y) parameter \!\(\*
StyleBox[\"R\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) should be 0.
";
```

```
Cofactor::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"Cofactor[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" P_,Q_, R_, invc_]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— returns cofactor of the dynamic polynomial system
    \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y,z), \!\(\*FractionBox[\(dy\),
    \(dt\)]\)=Q(x,y,z), \!\(\*FractionBox[\(dz\), \(dt\)]\)=R(x,y,z)
    with invariant curve \!\(\*
StyleBox[\"invc\",\nFontSlant->\"Italic\"]\).
For planar system  \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y),
    \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y)parameter \!\(\*
StyleBox[\"R\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) should be 0.
";
CofactorPoly::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"CofactorPoly[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" P_,Q_, R, var_]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— generates polynomial for cofactor of the dynamic polynomial
    system \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y,z),
    \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y,z), \!\(\*FractionBox[\(dz\),
    \(dt\)]\)=R(x,y,z) with coefficients \!\(\*
StyleBox[\"var\",\nFontSlant->\"Italic\"]\).
For planar system  \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y),
    \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y)parameter \!\(\*
StyleBox[\"R\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) should be 0.
";
```

```
FindCoefficient::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"FindCoefficient[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" cof_,P_,Q_,R_]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— finds undetermined coefficients of the first integral or
    integrating factor of the polynomial dynamic system
    \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y,z), \!\(\*FractionBox[\(dy\),
    \(dt\)]\)=Q(x,y,z), \!\(\*FractionBox[\(dz\), \(dt\)]\)=R(x,y,z)
    and cofactor \!\(\*
StyleBox[\"cof\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)\!\(\*
StyleBox[\".\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)
FindCoefficient[cof_,P_,Q_,R_,restriction_:True] — finds
    undetermined coefficients of the first integral or integrating
    factor of the polynomial dynamic system with restrictions..
For planar system  \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y),
    \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y)parameter \!\(\*
StyleBox[\"R\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) should be 0.
";

H::"usage" = "\!\(\*
StyleBox[\"H[ \",FontWeight->\"Bold\"]\)\!\(\*
StyleBox[\" invc_,cof_,P_,Q_,R_]\",FontWeight->\"Bold\"]\) \
— returns the first integral or integrating factor of the polynomial
    dynamic system \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y,z),
    \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y,z), \!\(\*FractionBox[\(dz\),
    \(dt\)]\)=R(x,y,z) with invariant curves \!\(\*
StyleBox[\"invc\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) and cofactors \!\(\*
StyleBox[\"cof\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)\!\(\*
StyleBox[\".\",\nFontSlant->\"Italic\"]\)
H[invc_,cof_,P_,Q_,restriction_:True] — returns the first integral
    or integrating factor of the polynomial dynamic system with restrictions.
For planar system  \!\(\*FractionBox[\(dx\), \(dt\)]\)=P(x,y),
    \!\(\*FractionBox[\(dy\), \(dt\)]\)=Q(x,y)parameter \!\(\*
StyleBox[\"R\",\nFontSlant->\"Italic\"]\) should be 0.
";
```

```
Attributes[PolynomialOrder] = {ReadProtected};
Attributes[PolyGen] = {ReadProtected};
Attributes[X] = {ReadProtected};
Attributes[ImaginaryQ] = {ReadProtected};
Attributes[PolyOrderPair] = {ReadProtected};
Attributes[SolveFirst] = {ReadProtected};
Attributes[GetAllSolutions] = {ReadProtected};
Attributes[InvCurveWithCofactor] = {ReadProtected};
Attributes[Cofactor] = {ReadProtected};
Attributes[FindCoefficient] = {ReadProtected};
Attributes[H] = {ReadProtected};
Attributes[CofactorPoly] = {ReadProtected};

PolynomialOrder[poly_] := Max@Exponent[MonomialList[#] /. Thread[{x, y, z} -> x], x] &[poly];
PolyGen[order_, a_, type_: "2D"] :=
  Which[type = "2D", Total[Table[Sum[a_{k-i,i} x^(k-i) y^i, {i, 0, k}], {k, 0, order}]],
      type = "3D", Total[Table[Sum[Sum[a_{k-i,i} x^(k-i-j) y^i z^j, {j, 0, k-i}], {i, 0, k}], {k, 0, order}]]];
CofactorPoly[P_, Q_, R_, var_, type_: "2D"] :=
  PolyGen[Max[PolynomialOrder[P], PolynomialOrder[Q], PolynomialOrder[R]] - 1, var, type];

X[P_, Q_, R_: 0, par_] := P ∂x par + Q ∂y par + R ∂z par;

ImaginaryQ[expr_] := ! FreeQ[expr, _Complex];

PolyOrderPair[pair_] := If[MemberQ[PolynomialOrder /@ pair, 0], 1, 0];
```

```
SolveFirst[P_, Q_, R_, {invc_, cofactor_}, restriction_: True] :=
  Block[
   {eq = DeleteCases[Flatten[CoefficientList[X[P, Q, R, invc] - cofactor invc, {x, y, z}]],
      0]},
Select[
DeleteDuplicates[{invc, cofactor} /.
      Solve[Append[eq[[#]] == 0 & /@ Range[Length[eq]], restriction]]],
! ImaginaryQ[#] && ! MemberQ[#, 0] && PolyOrderPair[#] == 0 &
]
];

GetAllSolutions[P_, Q_, R_, restriction_: True][solutions_] := Quiet@DeleteDuplicates[
Flatten[
Table[SolveFirst[P, Q, R, solutions[[i]], restriction], {i, 1, Length[solutions]}], 1]
];

InvCurveWithCofactor[P_, Q_, R_, invc_, cof_, opt_: 1, restriction_: True] :=
  Block[{fs = SolveFirst[P, Q, R, {invc, cof}, restriction], res, ans = {}},
res = FixedPoint[GetAllSolutions[P, Q, R, restriction], fs];
Table[Which[TrueQ[Reduce[X[P, Q, R, res[[i, 1]]] - res[[i, 2]] res[[i, 1]] == 0]],
     ans = Append[ans, res[[i]]]], {i, 1, Length[res]}];
Which[opt == 0, ans, opt == 1, ans /. Subscript[w, i_, j_] -> 1 /. Subscript[v, i_, j_] -> 1]
];


Cofactor[P_, Q_, R_: 0, invc_] := X[P, Q, R, invc] / invc // Simplify;

FindCoefficient[cof_, P_, Q_, R_, restriction_: True] :=
  Block[{flag = Table[cof[[j]] == Div[{P, Q, R}, {x, y, z}], {j, 1, Length[cof]}]},
Select[
SolveAlways[{ Sum[α_j cof[[j]], {j, 1, Length[cof]}] == If[MemberQ[flag, True], -Div[{P, Q, R}, {x, y, z}], 0],
      restriction}, {x, y}], ! FreeQ[#, α] &
]
];
```

```
H[invc_, cof_, P_, Q_, R_, restriction_: True] :=
  Block[{flag = Table[cof[[j]] == Div[{P, Q, R}, {x, y, z}], {j, 1, Length[cof]}],
res = ((∏_{j=1}^{Length[invc]} invc[[j]]^α_j) /. FindCoefficient[cof, P, Q, R, restriction]) /.
       Subscript[α, i_] -> 1},
If[TrueQ[Reduce[First[res] == 1, {x, y, z}]],
     Print[
      "There is no Darboux first integral or integrating factor of the given
        degree of invariant curve. Please, increase degree."],
If[MemberQ[flag, True], Print["This is integrating factor: ", First[res]],
       Print["This is first integral: ", First[res]]];
];
Return[""];
];
```

Интерфейс пользователя

```
Get["DarbouxIntegrability.m"]

FormRows[type_] :=
 Which[type == "2D", {Row[{Text["Enter P(x,y)   "], InputField[Dynamic[P]]}],
   Row[{Text["Enter Q(x,y)   "], InputField[Dynamic[Q]]}]},
  type == "3D", {Row[{Text["Enter P(x,y,z)   "], InputField[Dynamic[P]]}],
   Row[{Text["Enter Q(x,y,z)   "], InputField[Dynamic[Q]]}],
   Row[{Text["Enter R(x,y,z)   "], InputField[Dynamic[R]]}]}
  }]

Form[type_] :=
 DynamicModule[{P = Null, Q = Null, R = Which[type == "2D", 0, type == "3D", Null],
   deg = Null, s = 1, restr = True},
  Panel[Column[
    Flatten[{FormRows[type],
      Row[{Text["Enter degree of the invariant curve   "],
        InputField[Dynamic[deg]]}],
      Row[{Checkbox[Dynamic[s], {1, 0}], " Symbolic representation"}],
      Row[{OpenerView[{
          Text["Restrictions on the system   "],
          InputField[If[restr == True, Null, Dynamic[restr]]]},
         Dynamic[r]],
        Checkbox[Dynamic[r]]
       }],
      OpenerView[{
        Text["Invariant Curve and Cofactor"],
        Panel[Column[{
           Button["Find invariant curve(s)",
            Print[InvCurveWithCofactor[P, Q, R, PolyGen[deg, w, type],
               CofactorPoly[P, Q, R, v, type], s, restr][[;; , 1]]]],
           Button["Find cofactor",
            Print[InvCurveWithCofactor[P, Q, R, PolyGen[deg, w,
                type], CofactorPoly[P, Q, R, v, type], s, restr][[;; , 2]]]
           }
          ]]}
       ], ,
```

```
OpenerView[{
        Text["Darboux First Integral and Integrating Factor"],
        Panel[Column[{

           Button["Find First Integral or Integrating Factor",
            Print[
             H[
              InvCurveWithCofactor[P, Q, R, PolyGen[deg, w], CofactorPoly[
                  P, Q, R, v], 1][[ ;; , 1]],
              InvCurveWithCofactor[P, Q, R, PolyGen[deg, w], CofactorPoly[
                  P, Q, R, v], 1][[ ;; , 2]] , P, Q, R, restr
             ]
            ]]
          }]
        ]
       }]
      }]

    ]
   ]
  ]

TabView[{"2D system" → Form["2D"], "3D system" → Form["3D"]}]
```