В. Л. Левкович

Вычисление по способу Коши, т. е. через интегрирование по контуру, некоторых определенных интегралов от вещественных функций

Применим способ Коши к вычислению определенного интеграла

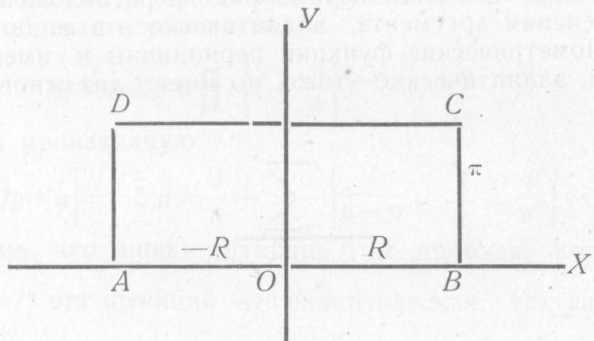
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}}\,dx,$$

если $o \angle a < 1$; $o \angle b < 1$.

Для решения нашей задачи возьмем функцию от комплексного переменного

$$f\,(z)=\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}$$

Рассмотрим интеграл этой функции вдоль контура прямоугольника $ABCD$, в котором



сторона $CB=\pi$, $0B=R$, $A0=-R$.

Функция $f(z)$ имеет внутри этого прямоугольника только один полюс в точке $Z=0$. Вычет, соответствующий полюсу $Z=0$, равен

$$\frac{e^{ao}-e^{bo}}{e^{o}}=0.$$

На основании теоремы Коши можем написать:

$$\int_{ABCDA} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz = \int_{AB} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz + \int_{BC} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz + \int_{CD} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz +$$

$$+\int_{DA} \frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}\,dz = 2\pi i.\,0=0.$$

Заметим теперь, что на отрезке AB переменное Z равно вещественному переменному X, поэтому

$$\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}=\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}};\ dz=dx. -R\leq x\leq R.$$

Вдоль отрезка BC имеем:

$$Z=R+ti;\ \ 0\leq t\leq\pi;\ dz=idt;$$

$$\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}=\frac{e^{ak+ati}-e^{bk+bti}}{1-e^{R+ti}}$$

Вдоль отрезка CD имеем:

$$Z=X+\pi i; -R\leq x\leq R;\ dz=dx;$$

$$\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}=\frac{e^{ax+a\pi i}-e^{bx+b\pi i}}{1-e^{x+\pi i}}=\frac{e^{ax+a\pi i}-e^{bx+b\pi i}}{1+e^{x}}=\frac{\operatorname{cs}a\pi\, e^{ax}-\operatorname{cs}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}+$$

$$+i\frac{\operatorname{sn}a\pi e^{ax}-\operatorname{sn}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}$$

На основании всего этого можно написать:

$$\int\limits_{ABCDA}\frac{e^{az}-e^{bz}}{1-e^{z}}dz=\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}}dx+i\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{aR+ati}-e^{bR+bti}}{1-e^{R+ti}}dt+$$

$$+\int\limits_{R}^{-R}\frac{\operatorname{cs}a\pi e^{ax}-\operatorname{cs}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}d\,x+i\int\limits_{R}^{-R}\frac{\operatorname{sn}a\pi e^{ax}-\operatorname{sn}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}dx+$$

$$+i\int\limits_{\pi}^{0}\frac{e^{-aR+ati}-e^{-bR+bti}}{1-e^{-R+ti}}dt=0.$$

Правая часть равенства равна 0, почему в левой части должны быть равны 0 вещественная и мнимая части в отдельности. Приравниваем 0 вещественную часть

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}}dx+\int\limits_{R}^{-R}\frac{\operatorname{Cs}a\pi e^{ax}-\operatorname{Cs}b\pi e^{bx}}{1+e^{x}}dx=0.$$

Отсюда, увеличивая R беспредельно, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^{x}}dx=\operatorname{Cs}a\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}dx-\operatorname{Cs}b\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{bx}}{1+e^{x}}dx.$$

Дело свелось к определению интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx}}{1+e^x}\,dx$$

Интегрированием по контуру можно найти, что (при $o<a<1$, $o<b<1$) первый интеграл равен $\frac{\pi}{\operatorname{sn} a\pi}$, а 2-ой$=\frac{\pi}{\operatorname{sn} b\pi}$.

Принимая это во внимание, окончательно получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1-e^x}\,dx = \pi\,(Ctga\pi - Ctgb\pi).$$

Применим теперь способ Коши к вычислению таких определенных интегралов

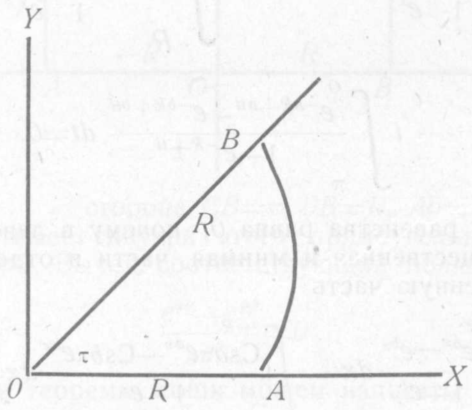
$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\operatorname{Cs} bx^2\,dx \text{ и } \int_0^\infty e^{-ax^2}\operatorname{sn} bx^2 dx$$

при том условии, что $a>o$ в обоих интегралах, а „b“ может быть каким угодно.

Для решения нашей задачи возьмем такую функцию от комплексного переменного

$$f(z)=e^{-z^2}.$$

Возьмем интеграл от этой функции вдоль контура сектора OAB радиуса R.



Пусть $\angle AOB=\tau$.

Функция $f(z)$ внутри контура и на самом контуре целая, а потому можно применить теорему Коши:

$$\int_{OAB0} e^{-z^2}dz = \int_{0A} e^{-z^2}dz + \int_{AB} e^{-z^2}dz + \int_{B0} e^{-z^2}dz = 0.$$

Теперь заметим, что на отрезке $0A$ переменное Z равно вещественному переменному X;

$$e^{-z^2}=e^{-x^2};\ 0\leq x\leq R;\ dz=dx.$$

Вдоль дуги AB имеем:

$$Z=R(\mathrm{cs}\varphi+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}\varphi)=Re^{\varphi\mathrm{i}};\ e^{-z^2}=e^{-R^2}(\mathrm{cs}2\varphi+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}2\varphi);\quad dz=Ri\,e^{\varphi\mathrm{i}}\,d\varphi;\ 0\leq\varphi\leq\tau.$$

Вдоль BO имеем:

$$z=r(\mathrm{cs}\tau+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}\tau)=re^{\tau\mathrm{i}};\ dz=e^{\tau\mathrm{i}}\,dr;\ 0\leq r\leq R;\ e^{z^2}=e^{-r^2(\mathrm{cs}2\tau+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}2\tau)}=$$

$$=e^{-r^2\mathrm{cs}2\tau}e^{-r^2\mathrm{i}\,\mathrm{sn}2\tau}.$$

Полагая

$$\mathrm{cs}2\tau=a,$$

$$\mathrm{sn}2\tau=b,$$

получим, принимая $\tau<\frac{\pi}{2}$,

$$\mathrm{cs}\tau=\sqrt{\frac{a+p}{2}},$$

$$\mathrm{sn}\tau=\sqrt{\frac{p-a}{2}},$$

где $p=\sqrt{a^2+b^2}$.

Теперь можем написать

$$e^{-z^2}=e^{-ar^2}(\mathrm{cs}br^2-\mathrm{i}\ \mathrm{sn}br^2).$$

Легко видеть, что в последнем равенстве „b“ не зависит от „a“ и может быть по величине каким угодно. Это можно легко доказать, основываясь на периодичности cs и sn.

Принимая все это во внимание, можем написать

$$\int\limits_{0AB0}e^{-z^2}dz=\int_0^R e^{-x^2}dx+\mathrm{i}\int_0^\tau e^{-R^2(\mathrm{cs}2\varphi+\mathrm{i}\ \mathrm{sn}2\varphi)}Re^{\varphi\mathrm{i}}\,dz+$$

$$+e^{\tau\mathrm{i}}\int_R^0 e^{-ar^2}(\mathrm{cs}br^2-\mathrm{i}\ \mathrm{sn}br^2)\,dr=0.$$

Положим теперь, что $R=\infty$. Тогда 1 ый интеграл, как известно, равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Второй интеграл обратится в нуль.

Это можно доказать, основываясь на теореме Дарбу; по этой теореме

$$\left|\int\limits_{AB} f(z)\,dz\right| \leq MS, \text{ где } M \geq \left|f(z)\right|;$$

S—длина дуги кривой, вдоль которой берется интеграл.

Применяя эту теорему к нашему случаю, найдем

$$\left|\int\limits_{AB} e^{-z^2}\,dz\right| \leq R\tau e^{-R^2 cs 2\tau}.$$

Как легко видеть, правая часть неравенства при $\tau < \frac{\pi}{4}$ стремится к нулю. Итак, модуль интеграла стремится к нулю, а потому и интеграл должен стремиться к нулю.

Теперь уже можно написать

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{\tau i}\int\limits_{\infty}^{0} e^{-ar^2}(cs\,br^2 - i\,sn\,br^2)\,dr = 0,$$

откуда

$$(cs\tau + i\,sn\tau)\left[\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} cs\,br^2 dr - i\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} sn\,br^2 dr\right] = \sqrt{\frac{a+p}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} cs\,br^2 dr + \sqrt{\frac{p-a}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} sn\,br^2 dr + i\left[\sqrt{\frac{p-a}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} cs\,br^2 dr -\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{p+a}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} sn\,br^2 dr\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Сравнивая вещественные части, получим

$$\sqrt{\frac{p+a}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} cs\,br^2 dr + \sqrt{\frac{p-a}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} sn\,br^2 dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Приравнивая нулю мнимую часть, получим

$$\sqrt{\frac{p-a}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} cs\,br^2 dr = \sqrt{\frac{p+a}{2}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ar^2} sn\,br^2 dr.$$

Решая два последние равенства относительно интегралов и заменяя переменную r через x, окончательно получим

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \mathrm{cs}\, bx^2 dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{p+a},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \mathrm{sn}\, bx^2 dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{p-a}, \text{ где } p = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Положив $a=o$, $b=1$, получим известные в физике интегралы Френеля

$$\int_0^\infty \mathrm{cs}\, x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{sn}\, x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$