Einige Vereinfachungen des geometrischen Axiomensystems von Oswald Veblen

und das Problem seiner weiteren Unvereinfachbarkeit

von

Cz. Dąbrowski in Minsk

Die Axiome der Geometrie von O. Veblen („Transactions of the American Mathematical Society", vol. 5, number 3, July 1904, Artikel: „A system of axioms for geometry") sind die folgenden:

I. Es existieren zum mindesten zwei verschiedene Punkte.

II. Wenn A ein Punkt, B ein Punkt, C ein Punkt in der Ordnung ABC ist, so sind sie in der Ordnung CBA.

III. Wenn A ein Punkt, B ein Punkt, C ein Punkt in der Ordnung ABC ist, so sind sie nicht in der Ordnung BCA.

IV. Wenn A ein Punkt, B ein Punkt, C ein Punkt in der Ordnung ABC ist, so ist A verschieden von C.

V. Sind A und B irgend zwei verschiedene Punkte, so existiert ein Punkt C, sodass A, B, C in der Ordnung ABC sind.

VI. Wenn wir definieren: „Die Gerade AB ($A \neq B$) ist die Vereinigung von A, B und von allen Punkten X in einer der möglichen Ordnungen ABX, AXB, XAB", – und wenn die Punkte C und D ($C \neq D$) auf der Geraden AB liegen, so liegt A auf der Geraden CD.

VII. Existieren drei verschiedene Punkte, so existieren drei Punkte A, B, C in keiner der Ordnungen ABC, BCA, CAB.

VIII. Liegen irgend drei verschiedenen Punkte A, B und C nicht auf ein und derselben Geraden und sind D und E zwei Punkte in den Ordnungen BCD und CEA, so existiert ein Punkt F in der Ordnung AFB und zwar ein solcher, dass D, E, F in ein und derselben Geraden liegen.

IX. Wenn wir definieren: „Die Punkte X in der Ordnung AXB ($A \neq B$) bilden die Strecke AB. A und B sind die Endpunkte der Strecke. Drei verschiedene Punkte A, B, C, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, sind die Ecken eines Dreiecks ABC, dessen Seiten die Strecken AB, BC, CA sind und dessen Umriss von seinen Ecken und den Punkten seiner Seiten gebildet ist. Punkte, die in ein und derselben Geraden liegen, werden kollinear genannt (loc. cit., Seite 355). Wenn A, B, C ein Dreieck bilden, so ist die Ebene ABC von allen mit irgend zwei Punkten der Seiten dieses Dreiecks kollinearen Punkten gebildet"—und wenn drei nicht in ein und derselben Geraden liegende Punkte existieren, so gibt es eine Ebene ABC, sodass ein Punkt D existiert, der nicht in der Ebene ABC liegt.

X. Wenn wir definieren: „Ein Punkt O ist in der Fläche eines Dreiecks, wenn er auf einer Strecke liegt, deren Endpunkte Punkte verschiedener Seiten dieses Dreiecks sind. Die Gesamtheit dieser Punkte O ist die Fläche des Dreiecks. Sind A, B, C und D vier nicht in ein und derselben Ebene liegende Punkte, so bilden sie ein Tetraëder ABCD, dessen Wände die Flächen der Dreiecke ABC, BCD, CDA, DAB sind (wenn diese Dreiecke existieren), dessen Ecken die vier Punkte A, B, C und D sind und dessen Kanten („edges") die Strecken AB, BC, CD, DA, AC, BD sind. Sind A, B, C, D Ecken eines Tetraëders, so besteht der Raum ABCD aus allen mit irgend zwei Punkten der Wände dieses Tetraëders kollinearen Punkten",—und wenn vier Punkte existieren, die weder in ein und derselben Geraden, noch in ein und derselben Ebene liegen, so existiert ein Raum ABCD, sodass kein mit irgend zwei Punkten des Raumes ABCD nichtkollinearer Punkt E existiert.

XI. Existiert eine unendliche Menge („an infinitude") von Punkten, so existiert ein gewisses Paar von Punkten AC, ein solches, dass, wenn [ç] irgend eine unendliche Menge von Strecken der Geraden AC ist, die die Eigenschaft hat, dass jeder Punkt, der A, C oder ein Punkt der Strecke AC sein kann, ein Punkt einer der Strecken ç ist,—dann existiert eine endliche Teilmenge $ç_1, ç_2, \ldots, ç_n$ mit derselben Eigenschaft.

XII. Ist a irgend eine Gerade von irgend einer Ebene α, so existiert ein gewisser („some") Punkt C von α, durch welchen es nicht mehr als eine Gerade der Ebene α gibt, die a nicht schneidet.

O. Veblen hat (loc. cit.) die Unabhängigkeit all seiner Axiome bewiesen. Ich werde hier nur die Proben der Unabhängigkeit der Axiome III, V, VI, VII und VIII nach O. Veblen anführen. Diese Proben sind „finite", d. h. mit Hilfe von endlichen Punktmengen K durchgeführt.

Er nimmt folgende Systeme:

S $\{3, 2, 5\}$:

123, 234, 345, 451, 512 : 135, 352, 524, 241, 413,
321, 432, 543, 154, 215 : 531; 253, 425, 142, 314.

S [3, 2, 7]: 7 Dreien:

013, 124, 235, 346, 450, 561, 602.

S [5, 2, 21]: 21 Fünfen:

0	1	6	8	18,
1	2	7	9	19,
2	3	8	10	20,
3	4	9	11	0,
4	5	10	12	1,
5	6	11	13	2,
6	7	12	14	3,
7	8	13	15	4,
8	9	14	16	5,
9	10	15	17	6,
10	11	16	18	7,
11	12	17	19	8,
12	13	18	20	9,
13	14	19	0	10,
14	15	20	1	11,
15	16	0	2	12,
16	17	1	3	13,
17	18	2	4	14,
18	19	3	5	15,
19	20	4	6	16,
20	0	5	7	17.

Die Probe des VIII. Axioms gibt O. Veblen mit Hilfe von K_8 aus 21 Elementen des Systems S [5, 2, 21], wobei in jeder Fünf alle Permutationen vom Typus S {3, 2, 5} als „Ordnungen" gelten. Die Punkte 0, 1, 2 liegen nicht in ein und derselben Fünf („Gerade"). Wenn im Texte des Axioms VIII $A=0, B=1, C=3$ sind, so sind $D=13, E=9$. Der Schnittpunkt F der Geraden DE und AB ist 18, sodass A, B, F in der Ordnung FAB sind.

K_7 ist eine Gesamtheit von 5 Punkten 1, 2, 3, 4, 5. Die Punkte A, B, C sind in der Ordnung ABC stets und nur, wenn sie eine Drei ABC im System S {3, 2, 5} bilden.

K'_7—eine andere Probe der Unabhängigkeit des Axioms VII—ist eine Gerade mit gewöhnlichen Ordnungsbeziehungen.

K_6 ist eine Gesamtheit von 26 Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Die Punkte ABC sind in der Ordnung ABC stets und nur, wenn sie eine Drei in einer der Dreienmengen:

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, geordnet nach S {3, 2, 5},

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, geordnet nach S [5, 2, 21], wie in der Probe des Axioms VIII,

P^i h P_j ($i, j=1, 2, 3, 4, 5, i \neq j, h=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$),

h P_i k ($h, k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, h \neq k, i=1, 2, 3, 4$ 5)
bilden.

Somit existieren die Ordnungen $OP_1 1$ und $1P_1 2$, nicht aber 012, 120, noch 201.

K_5 ist nur aus zwei Punkten 1 und 2 gebildet, wobei die Punkte A, B, C in der Ordnung ABC gelten, wenn $A \neq B \neq C \neq A$.

Von den drei von Oswald Veblen gegebenen Proben der Unabhängigkeit des Axioms III erwähne ich nur zwei:

K'_3 besteht aus 7 Punkten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, wobei die Punkte A, B, C in der Ordnung ABC gelten, wenn sie verschieden sind und eine Drei aus dem System S [3, 2, 7] bilden. Die „Gerade" wird eine Drei von Punkten sein. Die „Ebene" 123 besteht aus den kollinearen Punkten 4, 5, 0. Das Tetraëder 0124 hat als Wände die Flächen der Dreiecke 012, 024, 041 (nicht aber 124); diese Flächen bestehen aus den Dreien 364, 165, 325. Der Raum 0124 enthält alle 7 Punkte.

K''_3 besteht aus allen Punkten der gewöhnlichen projektiven Geometrie, wobei die Punkte A, B, C in der Ordnung ABC gelten, wenn si verschieden sind und ein und derselben projektiven Geraden angehörere

Im Jahre 1911 hat Oswald Veblen in einem Artikel der populären Schrift u. d. T. „Monographs on topics of Modern Mathematics relevant to the elementary field", herausgegeben von J. W. A. Young in New-York, sein Axiom IV noch in folgender Weise verstärkt (loc. cit., II, „Assumption I"): „Wenn die Punkte A, B, C in der Ordnung {ABC} sind, dann sind sie verschieden".

Dann gelang es ihm, sein Axiom II als ein Theorem (loc. cit., Seite 6, Theorem 1) mit Hilfe der Axiome VI, III und der „Assumption I" zu beweisen. Er hat auch sein Axiom VII durch Weglassen der vorangestellten Voraussetzung verstärkt und in diesem Zusammenhang natürlich auch sein Axiom I (s. oben) weggelassen.

Meine Untersuchungen bewegten sich dagegen in anderer Richtung.

Wir können nicht nur das Axiom VII, sondern auch die Axiome VI und VIII in folgender Weise ein wenig verändern (und damit verstärken):

„6'. Wenn wir definieren: „Die Punkte A, B, C in einer der Ordnungen ABC, CAB, BCA, CBA, BAC, ACB heissen kollinear („Cl" nach Peano)", und wenn die Punkte A, B, C Cl sind und A, B, D Cl sind, $C \neq D$, so gibt es eine der Ordnungen DCA, CDA oder CAD.

7'. (vgl. Veblen, Art. in „Monographs", „Assumption VI", Seite 6),— Es existieren drei nichtkollineare Punkte.

(Ohne vorangestellte Voraussetzung von VII).

8'. Sind die Punkte A, B, C ($A \neq B$) nicht kollinear, und sind D, E Punkte in den Ordnungen BCD und CEA, so existiert ein Punkt F in der Ordnung AFB und zwar ein solcher, dass D, E, F ein und derselben Geraden angehören".

(Die Definition der Geraden bleibt die vorige).

Dann können wir nicht nur die Axiome I und II, sondern auch das Axiom IV als ein Theorem beweisen:

1) Das Axiom I ist offenbar eine Folge von 7'.

2) Aus 6' folgt unmittelbar:

Sind A, B, C Cl und A, B, D Cl, $C \neq D$, so sind C, D, A Cl.

3) Gehören Punkte X, Y, Z ein und derselben Geraden an und sind sie voneinander verschieden, so sind sie Cl.

In der Tat, wenn diese Punkte einer Geraden AB angehören und wenn:

a) weder A noch B mit einem der Punkte X, Y, Z zusammenfällt, so sind A, B, X Cl, A, B, Y Cl, A, B, Z Cl, $X \neq Y \neq Z \neq X$, folglich nach 2) sind X, Y, A Cl, sowie auch Y, Z, A Cl, und da $X \neq Z$, so sind wieder nach 2) : X, Y, Z Cl.

b) $A = X$, $Y \neq B \neq Z$. Dann sind X, B, Y Cl und X, B, Z Cl, wobei $Y \neq Z$, folglich nach 2): Y, Z, X Cl.

c) $A = X$, $B = Y$. Dann sind A, B, Z Cl, d. i. X, Y, Z Cl.

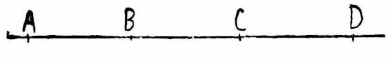
Folglich ist 3) immer wahr.

4) Die Ordnung AAA ist unmöglich.

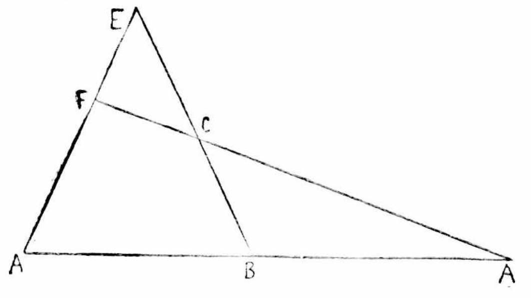
In der Tat, sie widerspricht dem Axiom III.

5) Das Axiom II ist bei $B \neq C \neq A$ wahr.

In der Tat, in diesem Falle bedingt die Ordnung ABC folgendes: nach dem Ax. V existiert ein Punkt D in der Ordnung BCD, der nach dem Ax. III von A verschieden ist. Dann sind nach 2) : A, D, B Cl, sowie auch A, D, C Cl. Aber $B \neq C$, folglich, nach 6', gibt es eine der Ordnungen CBA, BCA oder CAB. Bei der Ordnung ABC aber widersprechen die Ordnungen BCA und CAB dem Ax. III, folglich existiert die Ordnung CBA, was zu beweisen war.



6) Die Ordnung AAB ist unmöglich.



In der Tat, im Falle $A = B$ haben wir schon ihre Unmöglichkeit in 4) gesehen, und in dem Falle $A \neq B$ hat sie, nach 5), die Ordnung BAA zur Folge, welche mit ihr nach dem Axiom III unvereinbar ist.

7). Die Ordnung ABA bei $A \neq B$ ist unmöglich.

Nehmen wir das Gegenteil an, so existiert nach 7 ein Punkt C, verschieden von A und von B und mit denselben nichtkollinear. Nach dem Ax. V existiert ein Punkt E in der Ordnung BCE.

Die Punkte A, B, E sind nicht Cl. Sonst wäre bei B, E, C Cl, B, E, A Cl und bei C$\neq$A, nach 2), C, A, B Cl, was gegen unsere Annahme ist.

Der Punkt E ist von A verschieden (wir wissen aber noch nicht, ob er von B verschieden ist). Sonst wäre die Ordnung BCA und folglich A, B, C Cl, was gegen die Annahme ist.

Wir können folglich das Ax. 8′ anwenden, wonach wir einen Punkt F in der Ordnung EFA haben, der mit C und A auf ein und derselben Geraden liegt.

Es ist F$\neq$C, sonst hätten wir infolge der Ordnung EFA die Ordnung ECA und folglich A, C, E Cl. Aber A, C, E Cl ist unmöglich, weil bei B, C, E Cl und A$\neq$B sie nach 2) A, B, C Cl geben würde, was gegen die Annahme ist.

Ferner haben wir C$\neq$A und F$\neq$A (da A, A, E Cl bei E$\neq$B nach 2) E, B, A Cl geben würde, und wir schon die Unmöglichkeit von A, B, E Cl bewiesen haben). Folglich sind, nach 3), F, C, A Cl.

Dann aber sind A, F, E Cl und A, F, C Cl, E$\neq$C, folglich nach 2): E, C, A Cl, was unmöglich ist, wie wir schon oben gesehen haben.

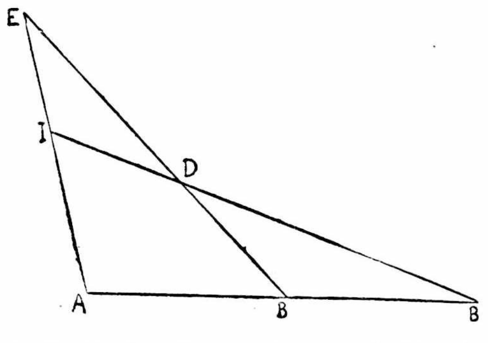
In diesem Beweise ist, da E mit B zusammenfallen kann, die neue Formulierung von 2) in Vergleich mit Ax. VI O. Veblens wesentlich, da in dem letzten A$\neq$B ist und folglich im Falle A, B, E Cl, C, B, E Cl, A$\neq$C, aber B$=$E man aus VI keine Schlüsse ziehen könnte.

7) und 4) beweisen das Axiom IV O. Veblens vollständig.

8). Die Ordnung ABB bei A$\neq$B ist unmöglich.

Bei den neuen Formulierungen und ohne Ax. II kann dies nicht so einfach, wie in dem Artikel von O. Veblen von 1904 (auf Grund der Axiome II und III) bewiesen werden.

Nehmen wir doch die Ordnung ABB an. Dann nach 7′ existiert ein Punkt D, verschieden von A und von B und mit ihnen nichtkollinear. Nach Ax. V existiert ein Punkt E in der Ordnung BDE. Es ist E$\neq$A, sonst wären A, D, B Cl. Die Punkte A, B, E sind nicht kollinear, sonst wären nach 2) A, D, B Cl. Nach 8′ existiert ein Punkt I, in der Ordnung EIA, der mit den Punkten D und B ein und derselben Geraden angehört. Es ist I$\neq$B, sonst hätte man die Ordnung ABE, d. h. A, B, E Cl. Es ist auch I$\neq$D, sonst wären nach 2) infolge der Ordnung ADE, d. h. E, D, A Cl, auch A, B, D Cl. Folglich sind nach 3): I, D, B Cl. Dann sind, nach 2), da I$\neq$E ist, I, E, B Cl, und ferner, wieder nach 2), A, B, E Cl (da wir die Ordnung EIA, folglich I, E, A Cl haben). Aber wir haben oben gesehen, dass A, B, E nichtkollinear sind. Endlich I$=$E ist nach 6) unmöglich.

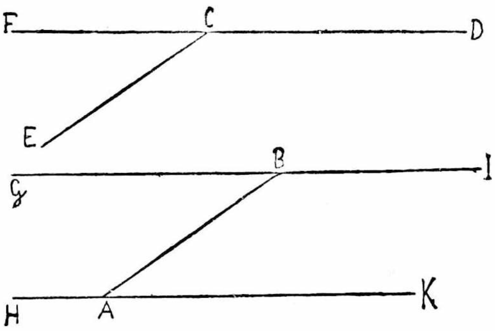


Das Axiom XII von O. Veblen kann folgendermassen abgeschwächt werden:

„12′. Existieren 2 verschiedene Punkte, so existieren 2 solche verschiedene Punkte A und B, dass es für jede Gerade CD, die durch A geht, in der Ebene BCD nicht mehr als eine Gerade gibt, die durch B geht und CD nicht schneidet“.

Denn da durch jeden Punkt, der ausser der Ebene CDB liegt, auch nur eine Parallele (im Sinne Gauss') zu CD geht, was leicht nach Bonola

(Artikel in den „Questioni riguardanti la geometria elementare“ unter der Red. von Enriques, 1900, II Teil) bewiesen werden kann,—so ist es auch für den ganzen Raum für alle Gerade der Richtung von CD wahr. Und dann ist es noch—um das vorige Ax. XII abzuleiten—nur für die Gerade AB selbst und irgend einen ausser ihr liegenden Punkt C zu beweisen.



Nehmen wir an, dass durch C zwei Parallelen CD zu AB und CE zu BA (der Richtung nach) gehen. CF sei die Verlängerung von CD, BG—die Parallele zu CF durch B, und AH—durch A, BI—die Verlängerung von BG, und AK—die Verlängerung von AH.

Dann ist AH parallel zu BG, also nach 12′ auch AK zu BI. Da AH≠BA (der Richtung nach) ist (wäre AH=BA, so wären CF parallel zu BA und CE parallel zu BA, was in ein und derselben Richtung nicht möglich ist),—so ist AK≠AB. Auch ist nach obigem CD parallel zu AK, aber CD ist parallel zu AB, also AB=AK—ein Widerspruch mit dem oben Bewiesenen.

Es geht also auch durch irgend einen Punkt ausser der Geraden AB nur eine Parallele zu dieser Geraden AB, was noch zu beweisen war.

Die Unabhängigkeitsproben, die O. Veblen für die Axiome VIII und VII gegeben hat, gelten auch für 8′ und 7′. Die oben erwähnten Proben von III mittels K'_3 und K''_3 behalten auch ihre Geltung. Aber die Veblenschen Proben der Ax. VI und V gelten nicht mehr. Denn K_5 enthält nur 2 verschiedene Punkte, und nach 7′ existieren 3 verschiedene Punkte. In K_6 gehören alle Punkte der Geraden P_1 P_2 an und somit ist die Bedingung des Ax. VIII nicht erfüllt, die Punkte 0, 1, 2 sind aber nicht nach der neuen Definition kollinear und somit ist die Bedingung des Ax. 8′ erfüllt, und doch ist dieses Axiom selbst nicht wahr, genauwie in K_8. Folglich muss man andere Unabhängigkeitsproben für Ax. V und 6′ bringen.

Für Ax. V nehmen wir K'_5 aus 4 Punkten ohne jede Ordnungsbeziehung. In der Tat ist die Existenz dieser Beziehung in der Punktklasse gerade nur vom Axiom V postuliert,—die übrigen Axiome enthalten diese Beziehung schon in den Bedingungen (Prämissen).

Fur 6′ nehmen wir ein System „S {3, 7}“ aus 7 Elementen nach dem Muster des Veblenschen S {3, 2, 5} mit den „Ordnungen“:

123 234 345 456 567 671 712 : 135 357 572 724 246 461 613 :
321 432 543 654 765 176 217 : 531 753 275 427 642 164 316 :

147 473 736 362 625 251 514
741 374 637 263 526 152 415

und die Punktklasse „K'_6“ aus denselben 7 Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Dann haben wir die Kollinearitäten 2, 3, 1 Cl, 2, 3, 4 Cl, nicht aber 1, 2, 4 Cl (oder 1, 3, 4 Cl). Im Ax. IX besteht die „Ebene“ 124 nur aus 1, 2, 4 und 7, folglich gehört ihr z. B. der Punkt 5 nicht an.

Alle 7 Punkte gehören dem „Raume“ (nach der „tetraëdrischen“ Definition von O. Veblen—das Tetraëder 1245 hat nur zwei „Wände“ 124 und 245) 1245 an und jeder von ihnen ist mit seinen zwei Punkten, in Uebereinstimmung mit dem Axiom X von O. Veblen, kollinear.

Uns ist es gelungen, das Axiom IV von O. Veblen zu beweisen, u. a. dadurch, dass wir die vorangestellte Voraussetzung „Existieren 3 verschiedene Punkte, so...“ im Axiom VII von O. Veblen weggelassen haben.

Es entsteht also die Frage: Ist das System auf diesem Wege weiter vereinfachbar? Aehnliche vorangestellte Voraussetzungen sind noch in den Ax. IX, X, XI geblieben und in Ax. 12′ (nach seiner „Abschwächung“ und in Verbindung mit dem Axiom I oder Theorem 1)) hinzugefügt worden.

Wir müssen in Bezug auf IX, XI und 12′ diese Frage verneinen. Das Axiom XI kann durch das Axiom Dedekinds in der Form: „Existieren 2 verschiedene Punkte, so existieren 2 solche verschiedene Punkte A und C, dass, wenn wir die Gesamtheit aller Punkte der Strecke AC, die auf Grund aller übrigen Axiome existieren, in 2 solche nicht leere Klassen verteilen, dass kein Punkt H der einen Klasse mit zwei Punkten K, M der anderen Klasse in der Ordnung KHM liegt, so existiert zum mindesten ein solcher Punkt P, dass zwei Punkte X und Y der Strecke AC, die in der Ordnung XPY liegen, verschiedenen Klassen der gemachten Teilung angehören“— ersetzt werden.

Nach solcher Ersetzung können wir die Axiome 7′, IX, 12′ und das Axiom Dedekinds in ein Postulat mit vier Subpostulaten vereinigen:

„Es existieren 4 solche verschiedene Punkte A, B, C, D, dass:

1) die Punkte A, B, C nicht kollinear sind,

2) der Punkt D nicht der Ebene ABC angehört“;

als 3) folgt das Ax. 12′ für die Punkte A und B, ohne vorangestellte Voraussetzung,

als 4) folgt das Axiom von Dedekind für die Punkte A und C (oder A und B) ohne vorangestellte Voraussetzung.

Das Ax. X von O. Veblen könnte auch als ein fünftes Subpostulat in das obige Postulat (Axiom) eingehen. Aber wir können es gänzlich weglassen, wenn wir unser System zu einem explizite definitorischen machen, z. B. in folgender Weise (diesen Gedanken verdanke ich zum Teil meinem Warschauer Nachfolger Heinrich Kapłański):

1. In der Ordnung ABC liegend nennen wir die Objekte A, B, C, wenn sie in einer Beziehung bestehen, die folgenden 2 Postulaten genügt:

1,1. Ax. III ohne Prämissen: „Ist A ein Punkt“ u. s. w.

1,2. Ax. 6′ mit Ersetzung des Worts „Punkt“ durch das Wort „Objekt“ (im Allgemeinen).

2. Punktklasse nennen wir eine Menge, die folgenden 3 Postulaten genüge leistet:

2,1. Ax. V mit Ersetzung des Wortes „existiert“ durch die Worte: „der Punktklasse angehört“.

2,2. Ax. 8′ mit derselben Ersetzung.

2,3. Das obige Postulat mit 4 Subpostulaten, mit derselben Ersetzung.

3. Definition des Raumes nach O. Veblen.

Dann ist das Ax. X überflüssig, da wir nur die Geometrie des tetraëdrischen „Raums“ aufbauen und uns zur Zeit gar nicht mit der Frage der Existenz der ausser ihm liegenden Punkte beschäftigen. Bei solcher Anordnung wird die Definition 3 das Axiom X ersetzen.

Es werden formell nur 5 **Axiome** bleiben.

Ausserdem wird die Geometrie des tetraëdrischen **Raums** (in **sich**) **apodiktisch** und nicht mehr hypothetisch sein, da wir, **anstatt** zu **sagen**: „die Theoreme sind wahr, wenn die Axiome es sind", jetzt sagen können: „alle Theoreme sind unbedingt wahr, da ihre Objekte (Punkte, Gerade, Ebenen, Ordnungen u. s. w.) nur die Gegenstände und Beziehungen bezeichnen, die unseren Postulaten (Axiomen), und folglich auch den Theoremen genügen".

Dies wird logisch viel bequemer sein.

Minsk, den 28-XI 1927.