А. Круталевіч

Разьвязаньне лікавых раўнаньняў спосабам дэдукцыйнай ітэрацыі

§ 1—Да гісторыі пытаньня.

Як вядома, альгебрычны аналіз на працягу сталецьцяў выпрацаваў некалькі спосабаў прыбліжанага вылічэньня разьвязкаў лікавых альгебрычных раўнаньняў.

Першым з іх па часу быў індускі спосаб „фальшывага правіла“ („*regula falsi*“), прыстасаваны ў пачатку XVI сталецьця італьянскім матэматыкам *Карданам* да вылічэньня разьвязкаў кубічнага раўнаньня. Аднак, гэты мэтод, які заключаецца ў інтэрполяцыі значэньняў зьменнай x па пропорцыянальных частках, быў у руках Кардана яшчэ вельмі грубым. Удасканаленьне яго выпала на долю *Франсуа Віэта* (канец XVI ст.), які ў сваёй працы „*In artem analyticam isagoge*“ дае альгорытм, амаль-што цалкам супадаючы з пазьнейшым мэтодам Ньютона.

Ідучы хронолёгічна далей, мы ўбачым у канцы XVII сталецьця „мэтод каскад“, запрапанаваны *Рольлем*, які заключаецца ў выбары такой падстаноўкі, пры якой знакі раўнаньня чаргуюцца. Посьле выкананьня гэтай опэрацыі разьвязкі знаходзяцца па прынцыпу „*regula falsi*“.

У пачатку XVIII сталецьця *Ньютон* дае вядомы мэтод пасьледаўных прыбліжэньняў“, удасканалены потым *Жозэфам Фур'е* (у сэнсе знаходжаньня для шуканага разьвязка адначасна абедзьвюх граніц замест аднэй Ньютонаўскай), а таксама *Вільлямам Горнэрам*.

У канцы XVIII сталецьця *Лягранж* выпускае сваю працу „*Résolution des équations numériques*“, дзе дае спосаб, які заключаецца ў раскладзе рачавістых разьвязкаў раўнаньня з рацыянальнымі коэфіцыентамі у неперарыўны дроб.

Урэшце, у 1826 годзе францускі мала вядомы матэматык *Дандэлен* дае ідэю, распрацаваную швайцарскім матэматыкам *Грэффэ* (і удасканаленую потым астрономам *Энке* для выпадку ўяўных разьвязкаў).

Вось і ўсе (я не ўспамінаю спосабаў *номографічных*) мэтоды прыбліжанага вылічэньня разьвязкаў лікавых раўнаньняў, вядомыя нашай навуцы, як клясычныя.

З іх практычную каштоўнасьць маюць толькі спосаб Ньютона з папраўкамі Фур'е і спосаб Дандэлена (або Грэффэ),—бо толькі яны дазваляюць вылічыць разьвязкі з наперад заданай дакладнасьцю. Першы спосаб, г. зн. спосаб Ньютона,—больш выгодны для знаходжаньня адных толькі рачавістых разьвязкаў, але затое вымагае папярэдняга аддзяленьня разьвязкаў. Другі-ж спосаб не вымагае аддзяленьня разьвязкаў і больш зручны для адшуканьня ўяўных разьвязкаў, але затое патрабуе адначаснага вылічэньня абсолютна ўсіх разьвязкаў, з якіх некаторыя бываюць для практычных мэтаў зусім непатрэбны.

§ 2.—Мэтоды індукцыйнай ітэрацыі.

Калі мы разгледзім усе, як поўныя, гетак і элемэнтарныя курсы вышэйшай альгебры, як напрыклад: *Вэбэра, Сэррэ, Сальмона, Гравэ, Сохоцкага, Чэзаро, Сомава, Вашчэнка-Захарчэнка, Млодзееўскага* і інш., а таксама спэцыяльныя монографіі па прыбліжаных вылічэньнях, як напрыклад: лекцыі акад. *Крылова, Рунге* („*Praxis der Gleichungen*" і „*Separation und Approximation der Wurzeln*") і інш., то нідзе ня знойдзем іншых спосабаў, апрача пералічаных вышэй.

І толькі ў *Б. Млодзееўскага* у яго спэцыяльнай монографіі „Решение численных уравнений" (Москва, 1923), у *Уайтэйкера* у яго „*Calculus of observations*" (Лёндан, 1924) і ў *А. Гаўрылава* ў яго „Практике вычислений" (Ленінград, 1926) мы ўбачым абмежаваныя прыстасаваньні да разьвязаньня лікавых раўнаньняў так званага „мэтоду ітэрацыі".

Як вядома, мэтодам „ітэрацыі" або „паўтарэньня" у матэматыцы называецца спосаб, пры якім невядомая шукаецца шляхам паўтарэньня аднэй і той самай опэрацыі над пасьледаўнымі прыбліжэньнямі гэтай невядомай.

Разгледзім прыстасаваньне гэтага мэтоду, якое прыводзіцца ў памянёнай монографіі Млодзееўскага (стар. 85—87).

Даўшы спачатку тэорэтычные абаснаваньне, Млодзееўскі для ілюстрацыі бярэ раўнаньне:

$$x^3-3x-1=0$$

і, аддзяліўшы рачавісты разьвязак яго ў граніцах 1 і 2, прадстаўляе раўнаньне ў выглядзе:

$$x=x-a(x^3-3x-1)$$

дзе a—сталы лік, які выбіраецца потым.

Абазначаючы правую частку апошняй роўнасьці праз $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=x-a(x^3-3x-1)$$

і знаходзячы выводную яе:

$$\varphi'(x)=1-a(3x^2-3),$$

аўтар паказвае, што, пры $x=2$, $\varphi'(x)$ зьвяртаецца ў $1-9a$, і дзеля гэтага дапускае $a=\frac{1}{9}$, і першае прыбліжэньне разьвязка прымае за $x_1\doteq 2$ ($\doteq$ знак прыбліжанай роўнасьці).

Посьле гэтага ітэрацыя дае (пры 5 знаках):

$$x_2\doteq 2-\frac{\varphi(x_1)}{9}\doteq 2-\frac{8-6-1}{9}\doteq 2-\frac{1}{9}\doteq 1{,}8889$$

$$x_3\doteq 1{,}8889-\frac{\varphi(x_2)}{9}\doteq 1{,}8889-\frac{1{,}889^3-3.1{,}8889-1}{9}\doteq 1{,}8889-0{,}0081\doteq 1{,}8808$$

$$x_4\doteq 1{,}8808-\frac{\varphi(x_3)}{9}\doteq 1{,}8808-0{,}0012\doteq 1{,}8796$$

$$x_5\doteq 1{,}8796-\frac{\varphi(x_4)}{9}\doteq 1{,}8796-0{,}0002\doteq 1{,}8794$$

і ўрэшце: $$x_6\doteq 1{,}8794-\frac{\varphi(x_5)}{9}\doteq 1{,}8794-0{,}0000\doteq 1{,}8794$$

Роўнасьць апошняй папраўкі нулю, а, значыцца, супадзеньне двох апошніх прыбліжэньняў x-а, паказвае на канец процэсу і дае значэньне невядомай з дакладнасьцю да 0,0001.

Як бачым, у гэтым мэтодзе першае прыбліжэньне шукаецца шляхам папярэдняга аддзяленьня разьвязкаў, а другое прыбліжэньне— шляхам дыфэрэнцыяваньня штучна ўтворанай функцыі x-а. І толькі, пачынаючы ад трэцяга прыбліжэньня, уваходзіць у сілу мэтод сапраўднай ітэрацыі.

Гэта дае нам права назваць даны мэтод – мэтодам індукцыйнай і у той-жа час частковай ітэрацыі. Індукцыйнай—таму, што ў ім выходзяць з часнага выпадку прыбліжэньня, частковай—таму, што апрача яе тутака прымаюць удзел такія опэрацыі, як: аддзяленьне разьвязкаў, утварэньне асаблівай функцыі невядомай і дыфэрэнцыяваньне апошняй.

У кожным выпадку спосаб гэты па сваёй практычнай каштоўнасьці мае права на далучэньне да памянёных мэтолаў Ньютона і Дандэлена, бо ў ім разьвязкі могуць быць вылічаны з наперад зададай дакладнасьцю.

Што тычыцца мэтоду Гаўрылава (а таксама і Уайтэйкера), то ён таксама павінен быць названы індукцыйнай ітэрацыяй, бо вымагае папярэдняга аддзяленьня разьвязкаў. Заключаецца ён у ізоляцыі першай ступені невядомага і ў наступных прыбліжэньнях, першае з якіх, па выразу самога аўтара, „ищется скорее интуицией вычислителя, чем по правилам“.

Бяручы раўнаньне

$$x^3-5x+0,1=0$$

аўтар разьвязвае яго адносна x у першай ступені:

$$x=\frac{0,1}{5}+\frac{x^3}{5}=0,02+0,2x^3$$

Дапускаючы першае прыбліжэньне x роўным $0,1$, атрымліваем:

$$x_2\doteq 0,02+0,0002\doteq 0,0202$$

$$x_3\doteq 0,02+0,0000016\doteq \underline{0,0200016}$$

$$x_4\doteq 0,02+0,0000016\doteq 0,0200016$$

Адкуль x можа быць прынятым з дакладнасьцю да 2.10^{-6} роўным $0,02$. Прыстасаваньне гэтага спосабу абмяжоўваецца толькі выпадкам, калі x ёсьць малы дроб; прычым, калі вольны член раўнаньня больш-менш вялікі, то прыстасаваньне гэтага мэтоду робіцца цяжкім, а вельмі часта і проста немагчымым.

§ 3.—Метод дэдукцыйнай ітэрацыі.

Мэтод дэдукцыйнай ітэрацыі (я яго называю так таму, што ён не вымагае ніякіх іншых опэрацый апрача чыстай ітэрацы) і грунтуецца на вельмі элемэнтарным факце:

Кожнае раўнаньне, прыведзенае да выгляду

$$x=\varphi(a,x)$$

дзе a ёсьць якая-небудзь сталая велічыня, можа быць прадстаўлена і гэтак:

$$x=\varphi[a,\varphi(a,x)]$$

або далей так:

$$x=\varphi\{a,\varphi[a,\varphi(a,\ldots\ldots\ldots)]\}$$

г. зн. як бяскрайны лік ідэнтычных опэрацый.

Хай, напрыклад,

$$x=a+f(x),$$

тады маем:

$$x=a+f[a+f(x)]=a+f\{a+f[a+f(a+\ldots)]\}$$

Перарываючы такі рад бяскрайных опэрацый у пэўным месцы, мы атрымліваем прыбліжанае значэньне аднаго з шуканых разьвязкаў.

Альгебрычнае раўнаньне n-ай ступені

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

заўсёды можна прадставіць у выглядзе

$$x^n=a_n+a_{n-1}x+\ldots+a_1x^{n-1} \qquad \text{(A)}$$

посьле чаго, дабываючы корань n-ай ступені, атрымаем:

$$x=\sqrt[n]{a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\ldots+a_1x^{n-1}} \qquad \text{(B)}$$

Ясна, што першым прыбліжэньнем аднаго з рачавістых разьвязкаў будзе

$$x_1=\sqrt[n]{a_n+a_{n-1}\sqrt[n]{a_n}+a_{n-2}\sqrt[n]{a_n^2}+\ldots+a_1\sqrt[n]{a_n^{n-1}}}$$

Цяпер другім прыбліжэньнем будзе

$$x_2=\sqrt[n]{a_n+a_{n-1}x_1+a_{n-2}x_1^2+\ldots+a_1x_1^{n-1}}$$

і г. д.

Урэшце, m-ым прыбліжэньнем, якое супадзе з $(m-1)$-ым і дасьць нам прыбліжанае значэньне x з заданай дакладнасьцю, будзе:

$$x_m\doteq\sqrt[n]{a_n+a_{n-1}x_{m-1}+a_{n-2}x_{m-1}^2+\ldots+a_1x_{m-1}^{n-1}}$$

Для ілюстрацыі возьмем ужо разгледжанае раўнаньне Млодзееўскага:

$$x^3-3x-1=0,$$

адкуль:

$$x=\sqrt[3]{1+3x}$$

Ітэрацыя дасьць нам (з 5 знакамі[1]):

$$x_1=\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{1}}=\sqrt[3]{4}=1,5874$$

$$x_2\doteq\sqrt[3]{1+3\,.\,1,5874}\doteq\sqrt[3]{5,7622}\doteq1,7928$$

$$x_3\doteq\sqrt[3]{1+3\,.\,1,7928}\doteq\sqrt[3]{6,3784}\doteq1,8546$$

$$x_4\doteq\sqrt[3]{1+3\,.\,1,8546}\doteq\sqrt[3]{6,5638}\doteq1,8723$$

$$x_5\doteq\sqrt[3]{6,6169}\doteq1,8774$$

$$x_6\doteq\sqrt[3]{6,6322}\doteq1,8788$$

$$x_7\doteq\sqrt[3]{6,6364}\doteq1,8792$$

$$x_8\doteq\sqrt[3]{6,6376}\doteq1,8793$$

і

$$x_9\doteq\sqrt[3]{6,6379}\doteq1,8793$$

[1]) Пры помачы табліц лёгарытмаў.

Увага.—Калі-б заданая дакладнасьць была абмяжована толькі 4 знакамі, то адказ $x = 1{,}879$ мы-б знайшлі не на 7-аіі ітэрацыі (як гэта можа здавацца на першы погляд), а на 5-аіі.

Для знаходжаньня другога рачавістага разьвязка (калі толькі раўнаньне яго мае) дзелім раўнаньне (А) на x і дабываем з абедзьвюх яго частак корань $(n-1)$-ай ступені[1]). Тады атрымаем:

$$x = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{x} + a_{n-1} + a_{n-2}x + \ldots + a_1 x^{n-2}}$$

або

$$x = \sqrt[n-1]{a_{n-1} + \frac{a_n}{x} + a_{n-2}x + \ldots + a_1 x^{n-2}}$$

Першае прыбліжэньне гэтага разьвязка будзе:

$$x_1 = \sqrt[n-1]{a_{n-1} + \frac{a_n}{\sqrt[n-1]{a_{n-1}}} + a_{n-2}\sqrt[n-1]{a_{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \sqrt[n-1]{a_{n-1}^{n-2}}}$$

Другім прыбліжэньнем будзе:

$$x_2 = \sqrt[n-1]{a_{n-1} + \frac{a_n}{x_1} + a_{n-2}\cdot x_1 + \ldots + a_1 \cdot x_1^{n-2}} \quad \text{і г. д.}$$

Трэці рачавісты разьвязак знойдзем пры помачы дзяленьня раўнаньня (А) на x^2 і дабываньня корня $(n-2)$-ай ступені. Тады атрымаем

$$x = \sqrt[n-2]{\frac{a_n}{x^2} + \frac{a_{n-1}}{x} + a_{n-2} + a_{n-3}\cdot x + \ldots + a_1 \cdot x^{n-3}}$$

або

$$x = \sqrt[n-2]{a_{n-2} + \frac{a_n}{x^2} + \frac{a_{n-1}}{x} + a_{n-3}x + \ldots + a_1 x^{n-3}} \quad \text{і г. д.}$$

Лёгка відаць, што калі толькі лік рачавістых разьвязкаў, напр. k, менш за ступень раўнаньня, то пэўныя k опэрацыі дадуць нам k рачавістых разьвязкаў, а пазасталыя дадуць нам некаторыя з знойдзеных раней значэньняў. Гэта пакажа, што пазасталыя разьвязкі-уяўныя.

У гэтым выпадку прыходзіцца ўводзіць у вылічэньне першпачатковыя корні n-ай ступені з I, г. зн. разьвязкі двучленнага раўнаньня

$$\alpha^n - 1 = 0,$$

а імення:

$$\alpha_k = cs\frac{2k\pi}{n} + i\, sn\frac{2k\pi}{n}$$

Тады першым прыбліжэньнем будзе:

$$x_1 = \alpha_k \sqrt[n]{a_n + a_{n-1}\cdot\alpha_k\sqrt[n]{a_n} + a_{n-2}\alpha_k^2\sqrt[n]{a_n^2} + \ldots + a_1\, \alpha_k^{n-1}\sqrt[n]{a_n^{n-1}}}$$

Другім прыбліжэньнем будзе:

$$x_2 = \alpha_k \sqrt[n]{a_n + a_{n-1}\, x_1 + a_{n-2}x_1^2 + \ldots + a_1\, x_1^{n-1}} \quad \text{і г. д.}$$

---

[1]) У выпадку раўнаньня цотнай ступені для знаходжаньня другога разьвязка лепей браць корань n-ай ступені з знакам мінус. Напр. для раўнаньня

$x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x - 13 = 0$ узяць $x = -\sqrt[4]{13 + 3x - x^2 - 2x^3}$ адкуль першае прыбліжэньне будзе:

$$x_1 = -\sqrt{13 - 3\sqrt[4]{13} - \sqrt[4]{13^2} + 2\sqrt[4]{13^3}}$$

Такім шляхам мы вылічым усе ўяўныя разьвязкі, калі толькі данае раўнаньне мае іх. У праціўным выпадку ўвесь шэраг такіх опэрацый прывядзе нас ізноў да значэньня першага (або першых двух) рачавістага разьвязку[1]).

§ 4. Лікавы прыклад.

Для ілюстрацыі вылажанага мэтоду дэдукцыйнай ітэрацыі разьвяжам раўнаньне, дадзенае Б. Кояловічам у яго лекцыях (1923, стар. 85):

$$x^5-5x+1=0$$

На аснове формулы (B) маем:

$$x=\sqrt[5]{-1+5x}$$

Першым прыбліжэньнем першага рачавістага разьвязку будзе (з 4 знакамі):

$$x_1\doteq\sqrt[5]{-1+5\sqrt[5]{-1}}\doteq\sqrt[5]{-1-5}\doteq\sqrt[5]{-6}=-\sqrt[5]{6}\doteq-1{,}431$$

Далей пойдуць:

$$x_2\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}431}\doteq-\sqrt[5]{8{,}155}\doteq-1{,}522$$

$$x_3\doteq\sqrt[5]{-1\quad 5\ .\ 1{,}552}\doteq-\sqrt[5]{8{,}610}\doteq-1{,}538$$

$$x_4\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}538}\doteq-\sqrt[5]{8{,}690}\doteq-1{,}541$$

$$x_5\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}541}\doteq-\sqrt[5]{8{,}705}\doteq\underline{-1{,}542}$$

і, урэшце:

$$x_6\doteq\sqrt[5]{-1-5.\ 1{,}542}\doteq-\sqrt[5]{8{,}710}\doteq-1{,}542$$

(Большая дакладнасьць дае —1,541652)

Другі рачавісты разьвязак знойдзем наступным чынам:

$$x^5=5x-1$$

$$x^4=5-\frac{1}{x}$$

$$x=\sqrt[4]{5-\frac{1}{x}}$$

$$x_1\doteq\sqrt[4]{5-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}}\doteq\sqrt[4]{5-0{,}669}\doteq\sqrt[4]{4{,}331}\doteq1{,}442$$

$$x_2\doteq\sqrt[4]{5-\frac{1}{1{,}442}}\doteq\sqrt[4]{5-0{,}694}\doteq\sqrt[4]{4{,}306}\doteq1{,}440$$

і, урэшце $x_3\doteq\sqrt[4]{5-\frac{1}{1{,}440}}\doteq\sqrt[4]{5-0{,}694}\doteq\sqrt[4]{4{,}306}\doteq1{,}440$

(Большая дакладнасьць дае 1,440499).

---

[1]) На практыцы гэта выліваецца ў наступную форму. Нейкае m-ае прыбліжэньне будзе:

$$x_m\doteq(\alpha+\beta i)\sqrt[n]{A+Bi}\doteq(\alpha+\beta i)\ .\ (M+Ni)\doteq\alpha M-\beta N+(\beta M+\alpha N)\,i.$$

прычым выраз ($M\beta+\alpha N$) будзе прадстаўляць 0 цэлых і столькі нулёў пасьля коскі, якая ступень дакладнасьці, г. зн. уяўная частка прападае і застаецца толькі рачавістая.

Для адшуканьня трэцяга рачавістага разьвязка ізолюем x у першай ступені.

Тады маем:

$$x=\frac{1}{5}+\frac{x^5}{5}$$

$$x_1\doteq\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5\doteq 0,2+0,2^6\doteq 0,2+0,000064\doteq 0,2$$

Ясна, што 0,2 і будзе шуканым значэньнем трэцяга разьвязка, бо x_2 дасьць паўтарэньне яго.
(Большая дакладнасьць дае *як-раз* 0,200064).

Чацьвёрты і пяты разьвязкі данага раўнаньня будуць пэўна ўяўнымі, бо пры дзяленьні яго на x^2 і на x^3 мы не атрымліваем вольнага члена. Для знаходжаньня гэтых разьвязкаў выпішам першапачатковыя корні пятай ступені з I.

Яны будуць:

$$\alpha=cs72^0+i\ sn72^0$$
$$\alpha^2=-cs36^0+i\ sn36^0$$
$$\alpha^3=-cs36^0-i\ sn36^0$$
$$\alpha^4=cs72^0-i\ sn72^0$$

Тады будзем мець *(для чацьвёртага разьвязка)*:

$$x=\alpha\sqrt[5]{-1+5\alpha\,.\,x}$$

Першае прыбліжэньне дасьць:

$$x_1\doteq\alpha\sqrt[5]{-1+5\alpha\sqrt[5]{-1}}\doteq(cs72^0+i\ sn72^0)\sqrt[5]{-1-5(cs\,72^0+i\,sn72^0)}\doteq$$

$$\doteq(cs72^0+i\,sn72^0)\sqrt[5]{-1-5(0,3090+0,9511\ i)}\doteq$$

$$\doteq(cs72^0+i\ sn72^0)\sqrt[5]{-2,545-4,755\ i}$$

Хай $\sqrt[5]{-2,545-4,755\ i}=\rho(cs\varphi+i\ sn\varphi)$

Тады $\rho\doteq\sqrt[5]{\sqrt{2,545^2+4,755^2}}\doteq\sqrt[10]{29{,}07}\doteq 1,401$

$$tg\,5\varphi\doteq\frac{4,755}{2,545};\ 5\varphi\doteq 61^0 51';\ \varphi\doteq 12^0\ 22'$$

Адсюль

$x_1\doteq\rho[cs\ (72^0+\varphi)+i\ sn\ (72^0+\varphi)]\doteq 1,401\ (cs\ 84^0\ 22'+i\,sn\ 84^0\ 22')$

Паўтарыўшы гэткую опэрацыю пару разоў, атрымаем канчаткова

$$x_1\doteq 1,500.\ (cs\ 91^0\ 53'+i\ sn\ 91^0\ 53').$$

Адкуль спрэжаны разьвязак:

$$x_5\doteq 1,500\ (cs\ 91^0\,53'-i\ sn\ 91^0\ 53')$$

Большая дакладнасьць дае:

$$x_{1,5}\doteq 1,500256.\ (cs91^0 53' 21''\pm i\,sn91^0 53' 21'')$$

Раўнаньне разьвязана.

§ 5. Заключэньне.

Як бачым, з пункту погляду *мэтодолёгічнага* мэтод дэдукцыйнай ітэрацыі валадае некаторымі плюсамі, якія заключаюцца ў поўнай дэдукцыйнасьці, у неабавязковасьці рацыянальных і цэлых коэфіцыентаў у неабавязковасьці прыведзенай формы, у неабавязковасьці аддзяленьня разьвязкаў і, урэшце, у вылічэньні з наперад заданай дакладнасьцю.

З пункту погляду *мэтодычнага* гэты мэтод валадае плюсам, які заключаюцца ў яго элементарнасьці (прынамсі ў стасунку да вылічэньня рачавістых разьвязкаў).

Затое з пункту погляду *практычнага* гэты спосаб, наагул кажучы, менш выгодны, чымся спосаб Ньютона і Дандэлена, бо аднімае больш часу, асабліва ў разе знаходжаньня ўяўных разьвязкаў. У адным толькі выпадку мэтод гэты зьяўляецца больш выгодным, чымся памянёныя способы—гэта ў выпадку неабходнасьці знайсьці толькі рачавістыя разьвязкі няпоўнага раўнаньня (асабліва, калі апошняе мае вялікія коэфіцыенты). Тутака аддзяленьне разьвязкаў па способу, напрыклад, Штурма і наступныя опэрацыі Ньютонаўскага способу аднімаюць вельмі многа часу, тады як мэтод дэдукцыйнай ітэрацыі ў гэтым выпадку хутчэй прыводзіць да супадзеньня прыбліжэньняў.