В. К. Дыдырко.

Циркулярные кривые 3-го порядка.

Настоящая работа представляет собою попытку систематического изложения свойств циркулярных кривых 3-го порядка при помощи аналитического метода.

Работа состоит из пяти глав. В главе I рассматриваются способы приведения уравнения циркулярных кривых к канонической форме и разбираются главным образом при помощи метода сокращенных обозначений различные свойства этих кривых, относящиеся к их центру, вершинам и главной точке. В основу этих свойств кладется так называемая теорема Eckhardt'a.

Далее указываются различные способы построения циркулярных кривых при помощи проективных пучков прямых и окружностей, а также способы построения их касательных и нормалей. Здесь исследование ведется также с помощью теоремы Eckhardt'a.

В первой же главе рассматриваются двойные точки циркулярных кривых.

Второй основной теоремой общей теории циркулярных кривых является так называемая теорема Casey. На основании этой теоремы чисто аналитическим путем доказывается очень много общих свойств циркулярных кривых.

Глава 2-я посвящена инверсии и ее роли в общей теории циркулярных кривых. Здесь подробно излагается теория фокусов с теоремами Hart'a и теория аналлагматического преобразования.

Последняя теория, как мне кажется, изложена более подробно, чем это сделано у Техейра, Лориа и др. В работе введен термин аллагматического преобразования, при котором не изменяется только тип кривой, с целью указания роли модуля, ибо характер инверсионного преобразования зависит не только от выбора полюса инверсии, но и от модуля ее. Во второй же главе подробно излагаются свойства циркулярных кривых, связанные с автополярными треугольниками полюсов инверсии и с окружностью 9 точек Эйлера. В заключение главы указана теорема Casey и ее следствия применительно к циркулярным кривым. Некоторые из приведенных в конце главы доказательств, мне кажется, не были даны раньше.

В главе III излагаются проективные свойства циркулярных кривых и выясняется с точки зрения проективной геометрии их роль в общей теории кривых 3-го порядка.

Глава IV трактует о метрических свойствах циркулярных кривых.

Здесь выводятся 5 независимых ортогональных инвариантов циркулярных кривых и выясняются различные особенности циркулярных кривых путем исследования как этих инвариантов, так и получаемых из них производных инвариантов.

В главе V рассматриваются некоторые частные виды циркулярных кривых: косые циссоиды и строфоиды, циссоидалы и строфоидалы, фокалы Кэтлэ и Дандэлена, триссектрисса Маклорена и т. п.

Первой работой по теории циркулярных кривых является мемуар Bjerkness'a, помещенный в т. LV Journal de Crelle за 1858 г. Sur une certaine classe de courbes de 3 degré, rapportées á lignes droites, qui dependent de paramètres donnés.

Bjerkness дал способы построения этих кривых при помощи прямых и окружностей и указал некоторые их свойства. Мемуар Bjerkness впрочем читается не легко; геометрическая сторона вопроса в нем затемняется очень сложными преобразованиями уравнений кривых. Bjerkness заменяет ур ие циркулярной кривой пятью уравнениями, вводя четыре параметра.

Второй по времени появления служит работа Eckardt'a. Ueber die Curven 3. Ordnung welche durch die imagrinären Kreispuncte hindurchgehen, помещенная в TX Zeitschrift der Mathematik und Physik за 1866 год. В этом труде автором разобраны при помощи самых элементарных соображений главнейшие свойства циркулярных кривых. Изложение очень сжатое и краткое. В начале настоящей работы мы воспользовались многими из предложений Eckardt'a, изменив и дополнив доказательства. Работа Casey „On Bicirdular Quartics" появилась в Transactions of the Royal Irish Akademy Vol. 24 в 1871 году, и следовательно указание, сделанное F. Fricke в его диссертации (упомянутой в тексте), что работа Casey является первой аналитической работой по теории циркулярных кривых, неверно.

Вопросами, связанными с построениями циркулярных кривых, занимался Durège. Статья его помещена в Zeitschrift für Mathematik und Physik. T. XIV 1869 г. Тем же вопросом занимались Schröter u Peltz Sitzungberichte der Wiener Academie Bd. 64).

Hermes (Crelle's Journal Bd. 99) обобщил результаты Schröter'a u Peltza. Из работ, относящихся сюда, надо упомянуть работу Czuber'a (Zeitschrift f. Math u. Phys. Bd. 32). „Задача" Czuber'a—упомянута в тексте).

Свойствам циркулярных кривых посвящена также диссертация Fr. Fricke, Gotha 1898. Вопрос трактуется автором с точки зрения синтетической геометрии. Мы воспользовались некоторыми из выводов Fricke, изменив метод изложения на аналитический.

Из других работ, связанных более с метрическими свойствами циркулярных кривых, надо отметить работы: Disteli, Die Metrik der Circularcurven 3. Grades. Vierteljahrbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich T. 35 1890, u Stnrnad'a Circularcurven 3. Grades.

К вопросам, связанным с аналлагматиками, относятся, кроме упомянутых в тексте, работы Mannheim'a Jonrnal de Math 2 serie T. VII. 1862 г. Ribauconu'a Nouvelle Correspondance Mathématique TV 1879 г. u Roberts'a Proceedings of the London Mathematical Society T II. Теория циркулярных кривых изложена и в томе I сочинения: Texeira: „Traite de courbes speciales". В этом труде содержится много ценных изложенных с чрезвычайной ясностью, предложений о циркулярных кривых. Автору, повидимому, были близки вопросы, связанные с этой теорией. Ему самому принадлежат несколько теорем о свойствах этих кривых. Трактат Texeira является единственной из работ по общей теории алгебраических кривых, где вопрос о свойствах циркулярных кривых разбирается настолько подробно.

Нам пришлось воспользоваться многим из материала, имеющегося в Трактате Texeira.

Ценный материал, относящийся к нашей теме, нам удалось найти также в книге A. B. Basset An Elementary Treatise on Cnbic and Quartic Curves, Cambridge 1901.

Детальные свойства отдельных кривых имеются в работе Дг. H. Wieleitner Speciele Ebene Kurven Leipzig 1908 Sammlung Schubert LVI.

В известном тракте Loria: Algebraische Curven" глава о циркулярных кривых изложена очень конспективно. Последний труд служил нам главным образом в качестве справочника и богатого указателя литературы вопроса.

В качестве указателя литературы мы пользовались также и геометрическими томами Математической Энциклопедии Из новейших работ, затрагивающих вопросы нашей темы, надо упомянуть труд Hilton Plane Algebraic Curves, Oxford 1920. Теории ортогональных инвариантов кривых 3-го порядка посвящен мемуар. проф. I. Thomae ortogonale Invarianten der Curven 3 Ordnung, помещенный в Leipziger Berichten за 1899 год. Ученик проф. Thomae R. Doelle написал диссертацию Orthogonale Invarianten der Circularcurven 3. Ordnung Iena 1905. Автор при помощи инвариантов разбирает в ней различные метрические свойства циркулярных кривых. Формулы, получаемые Doclle, однако чрезвычайно сложны и несимметричны. Остается открытым вопрос о том, как выбрать систему инвариантов для того, чтобы получить симметричные и удобные формулы.

Некоторое попытки разрешения этого вопроса имеются в настоящей работе.

Более подробный указатель литературы вопроса будет приложен в конце работы.

Циркулярные кривые 3-го порядка.

ГЛАВА I.

Общие свойства циркулярных кривых.

§ 1. Циркулярными кривыми наз. такие кривые, которые изображаются в прямоугольной Декартовой системе координат следующим уравнением:

$$(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=O \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Нетрудно показать прежде всего, что все кривые, изображаемые ур-ием (1), проходят через так называемые круговые точки плоскости.

Еще Плюккер[1]) заметил, что все окружности, взятые на какой-нибудь плоскости, проходят через две мнимые точки, лежащие на пересечении так называемых изотропных прямых с бесконечно удаленной прямой. Это точки, которые называются круговыми или циклическими точками данной плоскости. Эти точки не только вносят надлежащую общность и стройность в теорию кривых 2-го порядка, но и вообще имеют большое значение в различных вопросах геометрии (мероопределение Кэли-Клейна).

Кроме окружности существует бесчисленное множество кривых высших порядков, проходящих через эти же точки. Такие кривые обладают многими интересными свойствами, аналогичными свойствам окружности в теории кривых 2-го порядка.

Предметом настоящей работы является систематическое изложение всех свойств кривых 3-го порядка, проходящих через эти точки.

Если написать уравнение (1) в однородных координатах, то оно получит вид:

$$(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2z+Bxyz+Cy^2z+Dxz^2+Eyz^2+Fz^3=O \quad . \quad . \quad (2)$$

Координаты круговых точек, как легко видеть, будут удовлетворять

$$\left.\begin{matrix} y = +ix+lz \\ z=o \end{matrix}\right\} (\alpha) \qquad \left.\begin{matrix} y = -ix+l_1z \\ z=o \end{matrix}\right\} (\beta)$$

системам (α) и (β). Первые из ур-ий систем (α) и (β) представляют изотропные прямые, вторые—бесконечно-удаленную прямую.

Простая подстановка выражений для y и z из систем (α) и (β) в ур-ие (2) показывает, что ур-ие (2) ими удовлетворяется, чем и доказывается высказанное предложение.

Можно было бы итти и обратным путем, предложив задачу: написать ур-ие кривой 3-го порядка, проходящей через круговые точки". В результате мы получим ур-ие типа (1).

Действительно, изотропные прямые можно назвать круговыми ассимптотами. Наша задача сведется таким образом к разысканию кривой 3-го порядка с круговыми ассимптотами.

Так как у всякой кривой, ассимптоты которой параллельны двум данным прямым: $y-m_1x=o$ и $y-m_1x=o$, сумма старших членов

---

[1]) Понятие о циклических точках дано еще ранее Плюккера Poncelet в 1822 г. в его трудe: „Traitè da proprieles projectives des figures" T. I § 94. Paris 1865 г.

должна делиться на произведение $(y-m_1x)(y-m_2x)$ и так как в данном случае $m_1=+i$, а $m_2=-i$, то сумма старших членов ур-ия кривой должна иметь множителя:

$$x^2+y^2,$$

другими словами, ур-ие искомой кривой 3-го порядка должно иметь вид (1). Последнее же уравнение сразу показывает, что кроме двух изотропных ассимптот кривая имеет и вещественную ассимптоту, которая будет параллельна прямой:

$$ax+by=0$$

§ 2. С целью упрощения ур-ия (1) найдем уравнения всех трех ассимптот кривой (1).

Из Аналит. геометрии известно, что для нахождения ассимптот не параллельных осям (ассимптот || осям у нашей кривой быть не может, ибо коэффициенты при x^3 и y^3 постоянные числа) надо в уравнении кривой положить $y=tx$. Сделав такую подстановку, мы получим:

$$x^3(a+bt).(1+t^2)+Ax^2+Bx^2t+Cx^2t^2+Dx+Ext+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Поделив все члены ур-ия (3) на x^3, находим:

$$(a+bt).(1+t^2)+A.\frac{1}{x}+B.\frac{t}{x}+C.\frac{t^2}{x}+D.\frac{1}{x^2}+E.\frac{t}{x^2}+F.\frac{1}{x^3}=0 \quad . \quad . \quad (4)$$

Положив в ур-ии (4) $x=\infty$, мы получим ур-ие:

$$(a+bt).(1+t^2)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

для нахождения угловых коэффициентов ассимптот.

Корнями ур-ия (5) будут $t_1=+i$; $t_2=-i$; $t_3=-\frac{a}{b}$,

что было впрочем известно и из приведенных в § 1 рассуждений.

Для нахождения свободного члена n в ур-ии ассимптоты $y=mx+n$, как известно, надо подставить в уравнение данной кривой вместо y его выражение $xm+z$ и, положив в результате подставки $x=\infty$, решить получившееся ур-ие относительно z.

Подстановка дает: $y=-\frac{a}{b}x+z$ (для вещественной ассимптоты).

Подставив последнее выражение y в ур-ие (1), находим:

$$bz\left(x^2+\frac{a^2x^2}{b^2}-\frac{2axz}{b}+z^2.\right)+Ax^2-\frac{Bax^2}{b}+Bxz+C\frac{a^2x^2}{b^2}-\frac{2Cazx}{b}+Cz^2+$$

$$+Dx-\frac{Eax}{b}+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Поделив все члены ур-ия (6) на x^2, получим:

$$(7)\ bz\left(1+\frac{a^2}{b^2}-\frac{2az}{b}\cdot\frac{1}{x}+z^2\cdot\frac{1}{x^2}\right)+A-\frac{Ba}{b}+Bz\cdot\frac{1}{x}+\frac{Ca^2}{b^2}-\frac{2Caz}{b}\cdot\frac{1}{x}+$$

$$+Cz^2\cdot\frac{1}{x^2}+D\frac{1}{x}-\frac{Ea}{b}\frac{1}{x}+\frac{F}{x^2}=0$$

при $x=\infty$ ур-ие (7) получит вид:

$$bz\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)+A-\frac{Ba}{b}+\frac{Ca^2}{b^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\text{или}\ \frac{z(a^2+b^2)}{b}+\frac{Ab^2-Bab+Ca^2}{b^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Из ур-ия (9) находим следующее значение для z.

$$z = -\frac{Ab^2 - Bab + Ca^2}{b(a^2+b^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Таким образом ур-ие вещественной ассимптоты будет:

$$ax + by + \frac{Ab^2 - Bab + Ca^2}{a^2+b^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Кроме двух мнимых круговых точек кривая (1) имеет еще одну действительную бесконечно удаленную точку, а именно беск. удаленную точку вещественной ассимптоты (11).

Найдем теперь точку пересечения двух мнимых ассимптот кривой (1). Так как изотропные ассимптоты сопряженны, то точка их пересечения—вещественна. Мы могли бы по предыдущему примеру написать уравнения обеих мнимых ассимптот и непосредственно найти точку их пересечения. Но так как этот способ потребовал бы довольно утомительных вычислений, то мы найдем точку пересечения мнимых ассимптот другим приемом.

Обозначим координаты искомой точки через α и β, тогда ур-ие мнимых ассимптот будет: $y - \beta = \pm i(x - \alpha)$ . . . . (12)

Если мы подставим в ур-ие (1) выражение y из (12), то если прямая (12) есть действительно ассимптота кривой (1), мы должны получить в результате подстановки уравнение относительно a, имеющее двухкратный корень, равный ∞. Другими словами в полученном уравнении должны исчезнуть члены, содержащие x^3 и x_2. Сделав такую подстановку, мы увидим, что член с x^3 действительно сократился сам собою. Приравняв же 0 коэффициент при x^2, мы найдем из этого условия два уравнения (коэффициент этот будет комплексный), из которых сможем найти α и β. Сделав эту подстановку в ур-ие (1) выражение y из (12), получим:

$$[ax + b\beta + ib(x-\alpha)]\,[x^2 + \beta^2 + 2i\beta(x-\alpha) - x^2 + 2\alpha x - \alpha^2] + Ax^2 + Bx\beta + iBx(x-\alpha) + C\beta^2 + 2iC\beta(x-\alpha) - C(x-\alpha)^2 + Dx + E[\beta + i(x-\alpha)] + F = 0 \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Выпишем коэффициент при x^2:

$$\begin{aligned} 2a\alpha - 2b\beta + A - C &= 0 \\ 2b\alpha + 2a\beta + B &= 0 \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Из системы (14) получаем:

$$\alpha = -\frac{\begin{vmatrix} A-C, & -26 \\ B, & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a, & -2b \\ 2b, & 2a \end{vmatrix}} = -\frac{2a(A-C) + 2Bb}{4(a^2+b^2)} = \frac{a(C-A) - Bb}{2(a^2+b^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

$$\beta = -\frac{\begin{vmatrix} 2a, & A-C \\ 2b, & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2a, & -2b \\ 2b, & 2a \end{vmatrix}} = -\frac{2aB - 2b(A-C)}{4(a^2+b^2)} = \frac{-b(C-A) - aB}{2(a^2+b^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Результат подстановки в ур-ие (1) выражения y из ур-ия $y - \beta = -i(x - \alpha)$ даст тот же результат, в чем нетрудно убедиться.

Точка, определяемая координатами α и β, вещественная точка пересечения мнимых ассимптот, наз. особенным фокусом (Laguerre) или центром циркулярной кривой.

§ 3. Ур-ие кривой (1) значительно упростится, если мы перенесем начало координат в центр кривой, оставив оси параллельными прежним.

Такое преобразование всегда возможно, если только α и β не равны ∞, другими словами, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Если $a=0$ и $b=0$ одновременно, то кривая (1) переходит в коническое сечение.

Из ур-ий (15) и (16) легко приходим к заключению, что если $\alpha=0$ и $\beta=0$, то $A=C$ и $B=O$.

Действительно, a и b одновременно не могут равняться O. Значит: или 1) $a=o$, тогда $b \neq o$, в таком случае из (15) и (16) получим: $bB=O$ и $b(C-M)=O$. Откуда $B=O$; $C=A$.

если 2) $b=o$, то $a \neq o$ и те же ур-ия дают $a(C-A)=O$, а $B=O$. Отсюда снова получаем то же самое.

После преобразования ур-ие циркулярной кривой в новых осях получит такой вид: $(ax^1+by^1+A_1)(x^{12}+y^{12})+D_1x^1+E_1y^1+F_1=O$ (17)
$ax^1+by^1+A=O$ есть ур-ие вещественной ассимптоты кривой в новых осях (x^1y^1).

§ 4. Если выполнить указанное преобразование, то нетрудно заметить здесь аналогию с преобразованием ур-ия кривой 2-го порядка к центру.

Возьмем ур-ие (1)

$$(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=O$$

и преобразуем его к новым осям по формулам

$$x=x'+\alpha$$
$$y=y'+\beta.$$

где α и β координаты центра кривой (особенного фокуса).

$$(ax^1+by^1+ax^1+b\beta)(x^{12}+2\alpha x^1+\alpha^2+y^{12}+2\beta y^1+\beta^2)+Ax^{12}+2A\alpha x^1+$$
$$+A\alpha^2+Bx'y'+B\beta x^1+B\alpha y^1+B\alpha\beta+Cy^{12}+2C\beta y^1+C\beta^2+Dx^1+D\alpha+Ey^1+E\beta+$$
$$+F=O. \qquad (18)$$

Покажем, что в ур-ии (18) коэфф. при x^1y^1 будет равен O.

Этот коэфф. будет:

$$2b\alpha+2a\beta+B \qquad (19)$$

Выражение (19) действительно равно нулю с силу 2-го ур-ия (14)

Отберем коэфф. при x^{12} и y^{12} в ур-ии (18), эти коэффициенты будут:

$2a\alpha+b\beta+a\alpha+A$ и $2b\beta+a\alpha+b\beta+C$, но . . . . (19a)
$3a\alpha+b\beta+A=3b\beta+a\alpha+C$ в силу уравнения 1 го системы (14).

Действительно последнее ур-ние будет:

$$2a\alpha-2b\beta+A-C=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Прибавив к обеим частям равенства (20) по равному выражению: $a\alpha+3b\beta+C$, мы получим:

$$3a\alpha+b\beta+A=a\alpha+3b\beta+C \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Таким образом, сопоставляя (21) и (19а), мы заключаем, что коэффициенты при x^{12} и y^{12} в преобразованном ур-ии равны между собою.

Сравнив соотношение 19а с ур-нием (17), мы можем написать, что

$$3a\alpha+b\beta+A=a\alpha+3b\beta+C=A_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Сравнивая коэфф. при x^1 и y^1 в ур-иях (17) и (18), мы получим, что

$$D_1=a(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha(a\alpha+b\beta)+2A\alpha+B\beta+A$$
$$E_1=b(\alpha^2+\beta^2)+2\beta(a\alpha+b\beta)+2C\beta+B\alpha+E$$
$$F_1=(a\alpha+b\beta)(\alpha^2+\beta^2)+A\alpha^2+B\alpha\beta+C\beta^2+D\alpha+E\beta+F$$

Если мы обозначим левую часть ур-ия циркулярной кривой (1) через $\ddot{\varphi}(x_1 y)$, так что

$$\ddot{\varphi}(x_1 y)=(ax+by)\,(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=O,$$

то нетрудно видеть, что

$$A_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x^2}\right\}_{\alpha,\beta}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial y^2}\right\}_{\alpha,\beta}=3a\alpha+b\beta+A=3b\beta+a\alpha+C$$

$$B_1=\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x\,\rho y}\right\}_{\alpha,\beta}=2b\alpha+2a\beta+B=O$$

$$D_1=\left\{\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial x}\right\}_{\alpha\beta},\quad E_1=\left\{\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial y}\right\}_{\alpha,\beta}=;\quad F_1=(\ddot{\omega})\,\alpha,\beta$$

Значки внизу скобок означают результат подстановки вместо x и y соответственно α и β в выражении, стоящем в скобках.

Таким образом, получаем теорему, аналогичную известной теореме из элементарной Аналитической геометрии: при преобразовании ур-ия циркулярной кривой к ее центру коэффициенты старших членов (3-го измер.) не изменяются, коэффициенты при x^{12} y^{12} равны соответственно $\frac{1}{2}$ вторых частных производных от левой части ур-ия кривой по x по y (причем выражения этих частных производных вместо текущих координат подставлены координаты центра) $\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x\,\partial y}\right\}_{\alpha\beta}$ всегда равна O. а $\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x^2}\right\}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial y^2}\right\}_{\alpha\beta}$, коэффициенты при x^1 и y^1 равны соответственно: $\left\{\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial\alpha}\right\}_{\alpha\beta}$ и $\left\{\frac{\partial\ddot{\varphi}}{\partial y}\right\}_{\alpha\beta}$ и наконец свободный член F_1 равен результату подстановки в левую часть ур-ия кривой вместо x и y α и β.

Теорема справедлива вообще при параллельном перенесении осей в любую точку $(\alpha_1\,\beta_1)$ плоскости-кривой. В этом случае коэффициенты при x^{12} и y^{12} не будут равны друг другу, а коэффициент при x^1y^1, равный $\left\{\frac{\partial^2\ddot{\varphi}}{\partial x\,\partial y}\right\}_{\alpha_1\beta_1}$, не будет равен O.

§ 5. Не изменяя начала координат, повернем координатные оси так, чтобы ось У стала параллельной вещественной ассимптоте кривой.

Угловой коэффициент вещественной ассимптоты, как видно из ее уравнения, будет $-\frac{a}{b}$ след. $tg\varphi=-\frac{a}{b}$, отсюда

$$sn\varphi=\frac{+a}{\sqrt{a^2+b^2}}\;;\cos\varphi=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Формулы преобразования координат будут:

$$x=x^1\cos\varphi-y^1sn\varphi=\frac{ax^1\quad by^1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$y=x^1sn\varphi+y^1soc\varphi=\frac{bx^1+ay^1}{\sqrt{a^2\;b^2}}$$

В общих формулах надо вместо φ взять $\varphi - 90^0$, ибо угол φ тупой, и поворот оси у до совпадения с ассимптотой должен быть сделан на $\varphi - 90$.

Подставив вместо x и у их выражения в ур-ие (17), мы получим:

$$\left\{\frac{a^2x^1 - aby^1 + b^2x^1 + aby^1}{\sqrt{a^2+b^2}} + A_1\right\}\left\{\frac{a^2x^{12} - 2abx^1y^1 + b^2y^{12} + b^2x^{12} + 2ab\,x^1y^1 +}{a^2+b^2}\right.$$

$$\left. + a^2y^{12}\right\} + \frac{D_1ax^1 - Dby^1 + E_1bx^1 + E_1ay^1}{\sqrt{a^2+b^2}} + F_1 = O. \qquad (23)$$

Произведя приведение подобных членов, мы получим:

$$(\sqrt{a^2+b^2}.x^1 + A_1)\ (x^{12} + y^{12}) + \frac{D_1a + E_1b}{\sqrt{a^2+b^2}}x_1 + \frac{E_1a - D_1b}{\sqrt{a^2+b^2}}y_1 + F_1 = O. \qquad (24)$$

Разделив все члены последнего ур-ия на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим:

$$\left\{x^1 + \frac{A_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}(x^{12}+y^{12}) + \frac{D_1a + E_1b}{a^2+b^2}x^1 + \frac{E_1a - D_1b}{a^2+b^2}y^1 + \frac{F_1}{\sqrt{a^2+b^2}} = O. \qquad (25)$$

Введя новые обозначения коэффициентов, дадим ур-ию следующий вид:

$$(x^1 + A_2)\ (x^{12} + y^{12}) + D_2x^1 + E_2y^1 + F_2 = O. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (26)$$

Значение коэфф. A_2 D_2 E_2 и F_2 легко находятся из сравнения ур-ий (26) и (25).

Ур-ие (26) есть простейшее ур-ие циркулярной кривой. Начало координат в центре кривой, ось $У^1$ параллельна вещественной ассимптоте кривой.

§ 6. Всякая прямая пересекает кривую 3-го порядка, вообще говоря, в трех точках.

Вещественная ассимптота, касаясь кривой на ∞, должна иметь с ней еще одну общую точку. Найдем координаты этой точки.

Возьмем ур-ие кривой в форме

$$(x + A_2)\ (x^2 + y^2) + D_2x + E_2y + F_2 = O. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (27)$$

Ур-ие вещественной ассимптоты будет:

$$x + A_2\ \ O. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (28)$$

Эта прямая имеет с кривой (27) две общие точки на ∞.

Найдем точки пересечения прямой (23) с кривой (27). Решая совместно эти ур-ния, мы получим для опред. ординаты третьей точки пересечения ур-ие: $-D_2A_2 + E_2y + F_2 = O$ . . . . (29)

Членов, содержащих y^3 и y^2, не будет, как и должно быть в этом случае ($y_1 = \infty$ $y_2 = \infty$).

Из ур-ия (20) $y_3 = \frac{D_2A_2\ \ F_2}{E_2}$, а ур-ие (28) дает $x_3 = - A_2$. . (30)

Таким образом, вещественная ассимптота пересекает кривую в точке на конечном расстоянии от начала координат. Эта точка наз. главной точкой циркулярной кривой. Ее координаты даются ур-ием (30).

Средней линией (Mittelinie) или (Orthische Gerade по Thomae) называется линия, проходящая параллельно вещественной ассимптоте через точку М, лежащую посредине отрезка, соединяющего особый фокус с главной точкой.

Ур-ие средней линии циркулярной кривой будет:

$$x + \frac{A_2}{2} = O. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (31)$$

§ 7. Пользуясь формулами, выведенными в предыдущем §, мы можем найти некоторые интересные свойства циркулярных кривых. Для этого надо только дать этим формулам геометрическую интерпретацию.

Возьмем ур-ие (1): $(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx$ . . . . $+Ey+F=0$ и представим левую часть этого ур-ия в сокращенной форме.

Обозначим буквою S левую часть уравнения окружности: $S=x^2+y^2-2Ax-2By-C$, а буквами α β и γ левые части ур-ний прямых в нормальной форме, пусть

$$\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$$
$$\beta = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1$$
$$\gamma = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2$$

Тогда ур-ие (1) можно переписать следующим образом:

$$(x^2+y^2-2Ax-2By-C).\ (ax+by+\kappa)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+$$
$$+Ey+F+(2Ax+2By+C)(ax+by+\kappa)-\kappa(x^2+y^2)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

или $\alpha S+\kappa_1\beta\gamma=0$ . . . . (33)

Многочлен второй степени, состоящий из второго и остальных членов левой части ур-ия (32), всегда можно разложить на линейные множители, пользуясь произвольностью коэффициентов A, B, C и к. Нормирующие множители включены в κ_1.

Разложение левой части ур-ия (1) можно очевидно осуществить бесчисленным множеством способов.

Мы знаем из аналитической геометрии, что S выражает квадрат длины касательной, проведенной из точки (xy) к окружности $S=0$, а α—расстояние той же точки от прямой $\alpha=0$.

Отсюда непосредственно вытекает следующее предложение:

Геометрическое место точек, для которых произведение квадрата длины, проведенной из каждой из них касательной к постоянной окружности ($S=0$) на расстояние их (точек) от постоянной прямой ($\alpha=0$), находится в постоянном отношении ($-\kappa_1$) к произведению расстояний их (точек) от двух других определенные прямых ($\beta=0$ и $\gamma=0$)—есть циркулярная кривая 3-го порядка.

Ур-ие $\alpha S+\kappa_1\beta.\gamma+0$ указывает, что изображаемая им циркулярная кривая проходит:

1) через точки пересечения окружности $S=0$ с прямыми $\beta=0$ и $\gamma=0$;

2) через точки пересечения прямой $\alpha=0$ с $\beta=0$; и $\alpha=0$ с $\gamma=0$.

§ 8. Если через две к.-ниб. точки A и B циркулярной кривой провести пучек окружностей, то каждая из них пересечет данную циркулярную кривую еще в двух точках C и D; C' и D'; C'' и D'' и т. д. Прямые, соединяющие эти точки, пересекаются все в одной постоянной для данного пучка точке E, лежащей также на циркулярной кривой. Если через точку E проведем прямую EG, параллельно вещественной ассимптоте кривой KL, то эта прямая встретит данную циркулярную кривую в точке F, в которой пересекается с циркулярной кривой прямая, проходящая через две точки A и B.

Для доказательства этой теоремы докажем следующее свойство кривых 3-го порядка.

Рассмотрим две кривые 3-го порядка $U=O$; $V=O$, каждая из которых проходит через 8 данных точек. Ур-ие

$U-\kappa V=O$. . . . . (34)

будет уравнением пучка кривых 3-го порядка, проходящих через те же 8 точек.

Так как ур-ие (34) заключает произвольный параметр к, то последний может быть определен таким образом, чтобы кривая (34) прошла еще через какую-нибудь 9-ю точку.

Для этого достаточно взять, очевидно, $к=\frac{U_1}{V_1}$, где U_1 и V_1 суть результаты подстановки координат девятой точки в уравнения $U=O$ и $V=O$.

Для к мы получим вообще определенное значение, за исключением того случая, когда 9-я точка лежит одновременно и на кривой $U=O$ и на кривой $V=O$. В последнем случае к принимает значение $\frac{O}{O}$, Действительно две кривые 3-го порядка пересекаются вообще в 9 точках (33) След. $U=O$ и $V=O$, проходя через 8 данных точек, должны еще пересечься и в некоторой 9-й точке. Координаты этой точки обращают к в $\frac{O}{O}$. Последнее обусловлено тем, что любая кривая, изображаемая ур-ем $U-кV=O$, должна пройти чере все девять точек пересечения кривых $U=O$ и $V=O$. Отсюда и получаем предложение: все кривые 3-го порядка, которые проходят через 8 данных точек, проходят еще и через девятую постоянную точку.

Таким образом девять точек не всегда определяют собою кривую 3-го порядка (парадокс Крамера).

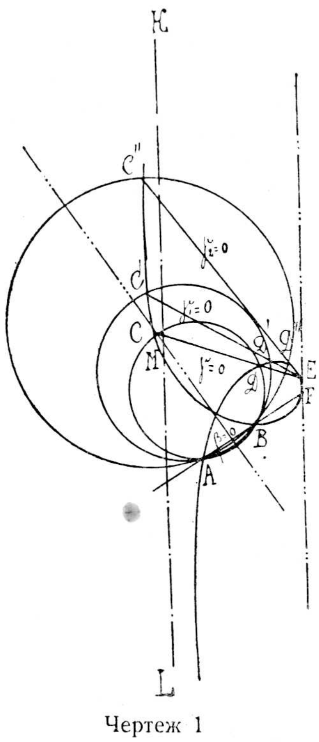
При помощи этой леммы нетрудно доказать высказанное раньше предложение: проводим через две точки A и B данной циркулярной кривой пучек окружностей, каждая из них пересечет нашу кривую еще в двух точках напр. C и D [кривая 3-го порядка с кривой 2-го порядка должна пересечься в 3.2 = 6 точках, но в данном случае пятой и шестой точками, общими окружности и циркулярной кривой, будут круговые точки плоскости J и j.

Прямая, проведенная через точки C и D, пересечет циркулярную кривую еще в третьей точке E, одинаковой для всех окружностей пучка, проходящих через A и B.

Для доказательства возьмем какие-нибудь две окружности $S=O$ и $S^1=O$.

Каждая из этих оружностей пересечет кривую еще в двух точках, лежащих на прямых $\gamma=o$ и $\gamma_1=o$ (чертеж I).

$\gamma_1 . S=o$ и $\gamma . S_1=o$ будут ур-ями циркулярных кривых 3-го порядка, проходящих через одни и те же восемь точек (две точки на прямой $\gamma=o$; две точки на прямой $\gamma_1=o$ и точки A, B, J и j). Данная циркулярная кривая проходит также через эти 8 точек.



Чертеж 1

Значит, на основании предыдущей леммы все эти три кривые должны пройти через одну и ту же девятую постоянную точку. Это будет точка пересечения прамой $\gamma_1=o$ с данной циркулярной кривой. $S=O$ не может иметь еще одной общей точки с данной циркулярной кривой, кроме точек A, B, C, D, J j, но кривая $\gamma_1 . S\ O$ имеет общую девятую точку с данной циркулярной кривой, след. $\gamma_1=o$ и данная циркулярная кривая имеют эту общую точку.

По той же причине эта точка должна лежать на пересечении прямой $\gamma=o$ с данной циркулярной кривой.

Отсюда и вытекает, что прямые $\gamma=o$ и $\gamma_1=o$ пересекаются в точке, лежащей на данной циркулярной кривой.

Ввиду того, что мы взяли две произвольные окружности пучка, теорема справедлива и для всех окружностей пучка.

Для доказательства второй части предложения достаточно обратиться к уравнению кривой

$$\alpha S+к. \beta\gamma=O. \tag{35}$$

Из него видно, что точки пересечения прямых:

$$\left.\begin{matrix}\alpha=o\\ \beta=o\end{matrix}\right\} \text{ и } \left.\begin{matrix}\alpha=o\\ \gamma=o\end{matrix}\right\}$$

лежат на данной циркулярной кривой (ибо координаты их удовлетворяют ее уравнению), а так как прямая $\alpha=o$ параллельна вещественной ассимптоте, то теорему можно считать доказанной. Эта теорема доказана у Texeira аналитическим путем без применения метода сокращенных обозначений.

(см. Texeira Courbes planes T. I page 81, § 96).

У Basset это же предложение доказано при помощи трилинейных координат (стр. 153 § 224).

У Eckhardt'а Zeitschrift für Mathematik und Physik T. X. 1865 г. это предложение приведено без доказательства [1]).

Вторая часть этой теоремы дает возможность легко получить направление вещественной ассимптоты, а, зная координаты главной точки (N) циркулярной кривой, построить и самую вещественную ассимптоту NL.

§ 9. В § 3 мы преобразовали общее ур-ие циркулярной кривой, перенеся начало координат в ее центр, к—виду:

$$(ax+by+A_1).(x^2+y^2)+D_1x+E_1y+F_1=O \quad . \quad . \quad . \tag{36}$$

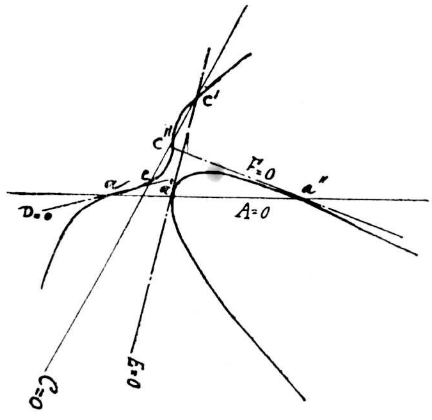
Покажем в настоящем §, какие свойства циркулярных кривых могут быть обнаружены при рассмотрении этого уравнения и выяснении геометрического значения его коэффициентов. Как было показано выше, ур-ие

$$ax+by+A_1=O \quad . \quad . \quad . \tag{37}$$

изображает вещественную ассимптоту нашей кривой. Ур-ие:

$$D_1x+E_1y+F_1=O,$$

как сейчас покажем, выражает прямую, на которой лежат три точки пересечения нашей кривой с ее ассимптотами. Эта прямая называется **спутником** бесконечно-удаленной прямой.



Чертеж 2

Предположим, что прямая линия $A=O$ (черт. 2) пересекает кривую 3-го порядка в трех точках a a^{I} и a^{II}.

Проведем в этих точках касательные к кривой. Эти касательные, уравнения которых пусть будут $D=O$; $E=O$; $F=O$, пересекут нашу

[1]) Так как предложение это впервые высказано Eckhardt'ом, то его и назовем теоремой Eckhardt'а.

кривую в трех точках с c^1 и c^{11}. Требуется показать, что точки с c^1 и c^{11} лежат на одной прямой. Заметим, что точка с, в которой касательная к кривой в точке а пересекает кривую наз. тангенциальной точкой а. Прямая $C=O$, на которой лежат три тангенциальные точки, соответствующие точкам а a^1 и a^{11}, называется спутником прямой А.

Для доказательства того, что три тангенциальные точки лежат на одной прямой, рассуждаем следующим образом: уравнение $D.E.F=O$ есть уравнение кривой третьего порядка, проходящей через девять точек (точки касания считаются за две точки каждая: а a^1 a^{11}; с, c^1 c^{11}). Прямые $A=O$; $A=O$ и $C=O$ (под С подразумеваем пока прямую, проходящую через две точки, напр. с и c^1) образуют вторую кривую 3-го порядка, проходящую через 8 из этих девяти точек (а, a^1, a^{11}; с и c^1). Уравнение такой кривой будет

$$A^2.C=O \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (38)$$

Следовательно эта кривая должна, на основании предыдущей леммы, пройти и через девятую точку c^{11}. А так как точка c^{11} не может лежать на прямой А, которая уже имеет три общих точки с кривой 3-го порядка, то след. точка c^{11} должна лежать на прямой $C=O$.

Предположим теперь, что прямая $A=O$ будет бесконечно удаленной, тогда касательные D, E и F в точках, где $A=O$ встречает кривую, будут ассимптотами кривой. Каждая ассимптота встречает кривую в единственной точке на конечном расстоянии. Эти три точки, как показано выше, должны лежать на одной прямой, которая будет спутником бесконечно удаленной прямой. Ур-ие кривой в этом случае можно написать в форме

$$D.E.F-\kappa C=O \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (39)$$

D.E.F.—произведение трех ассимптот, $\kappa=-1$, $C=D_1x+E_1y+F$, что вполне соответствует ур-ию (36).

Если ур-ие (36) переписать в виде:

$$(x\ +y^2).\left\{\frac{ax+by+A_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}+\frac{\sqrt{D^2,+E^2}}{\sqrt{a+b^2}} \quad \frac{D_1x+E_1+F_1}{\sqrt{D_1^2+E_1}} \quad =O \quad \dots\dots \quad (40)$$

или

$$(x^2+y^2).\frac{ax+by+A^1}{\sqrt{a+b}}=\kappa.\ \frac{D_1x+E_1y+F_1}{\sqrt{D_1^2+E_1^2}},\ \text{где } \kappa=-\frac{\sqrt{D_1^2+E_1^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \dots\dots (41)$$

то на основании ур-ий (41) и (44) можно высказать следующие предложения:

1) геометрическое место точек, для которых квадрат их расстояния от постоянной точки, умноженный на их расстояние от постоянной прямой, находится в постоянном отношении к их расстоянию от другой постоянной прямой, есть циркулярная кривая 3-го порядка, имеющая постоянную точку своим центром, первую постоянную прямую своей вещественной ассимптотой, а вторую прямую—спутником бесконечно удаленной прямой,

2) Если из центра циркулярной кривой опишем каким-нибудь радиусом окружность, то она пересечет кривую в двух точках; прямая, проходящая через эти точки, пересекается с вещественной ассимптотой кривой на самой кривой, другими словами проходит через главную точку циркулярной кривой.

Пусть у-ие этой окружности будет:

$$S=x^2+y^2-r^2=O \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (42)$$

Ур-ию циркулярной кривой (36) можно дать такую форму:

$$(x^2+y^2-r^2)\,(ax+by+A_1)+(D_1+r^2a)x+(E_1+r^2b)y+F_1+r^2A_1=O \quad . \ . \quad (43)$$

или в сокращенном обозначении:

$$\alpha S+\kappa\beta=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (44)$$

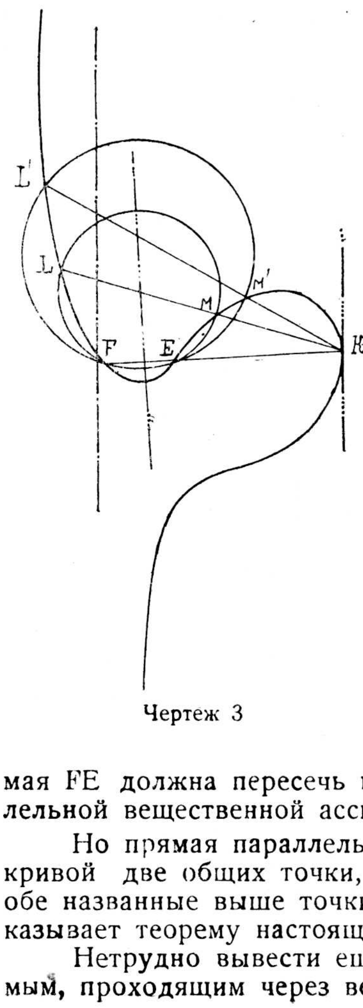
где $\alpha=O$ есть ур-ие вещ. ассимптоты цир. кривой, $S=O$ есть ур-ие, проведенной через центр кривой окружности.

Урие (44) показывает, что циркулярная кривая проходит через точки пересечения:

$$\left.\begin{matrix} S=O \\ \beta=O \end{matrix}\right\} \text{ и } \left.\begin{matrix} \beta=O \\ \alpha=O \end{matrix}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (45)$$

Последние два из ур-ий (45) показывают, что точки пересечения прямой $\beta=O$, с вещ. ассимптотой лежит на цир. кривой. Но $\beta=o$ и есть ни что иное, как прямая, соединяющая точки пересечения окружности (42) с циркулярной кривой (43).

Последнее предложение можно получить и как частный случай теоремы Eckhardt'a, изложенной в § 8.



Чертеж 3

Если за точки A и B (черт. I) примем круговые точки J и j, то прямая $\beta=O$ будет бесконечно удаленной, след. левая часть ее уравнения, т. е. выражение β будет constans. Ур-ие циркулярной кривой (35) примет тогда такой вид:

$$\alpha_1 S+k_1\gamma=, \text{ где } k_1=k\beta=\text{постоянному},$$

т. е. форму соответствующую вполне виду (44).

§ 10. Назовем точку K циркулярной кривой (чер. 3), в которой касательная к кривой параллельна вещественной ассимптоте—вершиной кривой.

Если через к.-ниб. вершину циркулярной кривой K проведем произвольную прямую KF, то эта прямая пересечет кривую еще в двух точках E и F.

Если через точки E и F проведем пучек окружностей, то, на основании теоремы § 8, каждая из окружностей пучка пересечет кривую еще в двух точках ML M^1L^1 и т. д.

Прямые, соединяющие эти точки, снова пройдут через вершину циркулярной кривой K.

По теореме Eckhardt'a прямые LM L^1M^1 и т. д. должны пройти через постоянную точку на кривой. С другой стороны прямая FE должна пересечь кривую в точке встречи ее с прямой, параллельной вещественной ассимптоте.

Но прямая параллельная вещественной ассимптоте KR имеет с кривой две общих точки, совпадающих в K. (точка касания), значит обе названные выше точки должны совпасть с точкой K, что и доказывает теорему настоящего §.

Нетрудно вывести еще и такое предложение, относящееся к прямым, проходящим через вершину циркулярной прямой.

Так как произведение секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное для всех секущих, проведенных из какой-нибудь точки вне окружности к этой последней, то мы можем написать:

$$KL.\ KM = KE.\ KF$$

и $KL^1.\ KM^1 = KE.\ KF$, откуда следует, что

$$KL.\ KM = KL^1.\ KM_1 = \text{constans}$$

для всего пучка окружностей, проходящих через точки E и F.

Таким образом:

Если через вершину циркулярной кривой провести прямые линии, то произведение отрезков, которые кривая отсекает на каждой из них—постоянно.

Последнее свойство будет рассмотрено с другой точки зрения во 2-й главе, которая будет трактовать об инверсионном преобразовании.

§ 11. *Укажем* в настоящем § свойства циркулярных кривых в связи с главной точкой кривой.

Ур-ие циркул. кривой, отнесенное к центру, причем ось У параллельна вещественной ассимптоте (§ 5):

$$(x+A_2)\ (x^2+y^2)+D_2x+E_2y+F_2=0 \quad . \quad . \quad . (46)$$

Перенесем оси параллельно прежним так, чтобы начало координат совпало с главной точкой кривой. Координаты главной точки по отношению к системе координат с началом в центре будет:

$$x= -A_2 = +a_1$$

$$y= \frac{D_2A_2 - F_2}{E_2} = +b_1$$

Формулы преобразования будут: $x = x^1+a_1= x^1-A_2;\ x+A_2=x^1$. (47)

$$y=y^1+b_1$$

После подстановки в ур-ие (46) выражений x и y из уравнений (47) оно примет такой вид:

$$[(x^1-a_1)^2+(y^1-b_1)^2].x^1+\alpha_1.x^1+\beta_1y^1=O \quad . \quad . \quad . (48)$$

Свободного члена в ур-ии (48) быть не должно, ибо начало координат лежит на кривой. Коэффициенты α_1 и β_1 можно было бы вычислить по формулам § 6, но это не представляется нужным для дальнейшего изложения.

Ур-ию (48) можно придать далее следующую форму:

$$(x^1-a_1)^2+(y^1-b_1)^2= -\alpha_1-\beta_1\frac{y^1}{x^1} \quad . \quad . \quad . \quad . (49)$$

Для двух точек M_1 и M_2 прямой, проходящей через начало координат, отношение $\frac{y^1}{x^1}$ одно и то же, следовательно на основании уравнения (49) для таких точек будет постоянным и выражение

$$\sqrt{(x^1-a_1)^2+(y^1-b_1)^2}$$

Последнее соотношение легко интерпретировать геометрически, и мы получим тогда такие теоремы:

1) Всякая прямая линия, проходящая через главную точку циркулярной кривой, пересечет кривую еще в двух точках, равноотстоящая от центра циркулярной кривой.

2) Если в середине отрезков, которая данная циркулярная кривая отсекает на лучах, выходящих из ее главной точки, восставим к ним перпендикуляры, то все они сойдутся в центре кривой.

Это очевидное следствие того свойства равнобедренных треугольников, что перпендикуляр, восстановленный в середине основания к нему, проходит через вершину треугольника.

3) Геометрическое место средин отрезков, какие циркулярная кривая отсекает на лучах, проходящих через ее главную точку, есть окружность, проходящая через главную точку и через центр кривой.

Для доказательства последнего предложения возьмем ур-ие циркулярной кривой (начало координат в главной точке):

$$x^1[(x^1-a_1)^2+(y^1-b_1)^2]+\alpha x^1+\beta y^1=O \qquad . \quad . \quad . \ (50)$$

и проведем через главную точку (начало координат) какой-нибудь луч.

Его уравнение будет:

$$y^1=\kappa^1 x^1 \qquad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (51)$$

Найдем точки пересечения его с циркулярной кривой. Подставив выражение y из (51) в (50), получим:

$$x^1[(x^1-a_1)^2+(\kappa^1x^1-b_1)^2]+\alpha x^1+\beta\kappa^1x^1=O \quad . \quad . \quad . \ (52)$$

Из (52) находим:

$$x_{,,}^1=O;\ x^{12}-2a_1x^1+a_1^2+\kappa^{12}x^{12}-2\kappa^1b_1x^1+b_1^2+\alpha+\beta\kappa^1=O$$

$$\text{или}\quad (1+\kappa^1)x^{12}-2(a_1+\kappa^1b_1)x^1+a_1^2+b_1^2+\alpha+\beta\kappa^1=O \quad \text{или}$$

$$x^{12}-\frac{2(a_1+\kappa^1b_1)}{1+\kappa^1b^2}x^1+\frac{a_1^2+b_1^2+\alpha+\beta\kappa^1}{1+\kappa^1}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (53)$$

Из ур-ия (55) найдутся две остальные точки пересечения K и L. Обозначим координаты середины отрезка KL через ξ и η (это и будут координаты искомого геометрического места точек).

В таком случае можно написать:

$$\xi=\frac{x_1^1+x_2^1}{2}=\frac{a+\kappa^1b_1}{1+\kappa^{12}};\ \eta=\kappa^1\xi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (54)$$

Для получения ур-ия искомого геометрического места достаточно исключить параметр κ^1 из двух последних уравнений (54). Тогда мы получим:

$$\xi=\frac{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}{1+\frac{\eta^2}{\xi^2}};\ \xi=\frac{(a_1\xi+b_1\eta)\xi}{\xi^2+\eta^2} \quad \text{или окончательно}$$

$$\xi^2+\eta^2-a_1\xi-b_1\eta=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (55)$$

Последнее ур-ие (55) очевидно представляет окружность, проходящую через точки (0,0) и (a_1 b_1), чем вполне доказывается предложение 3.

Если главные точки кривой на ∞ (кривая в таком случае имеет так называемую Unflexions assymptote — ассимптоту в точке перегиба — об этом будет сказано ниже), то все лучи, проходящие через главную точку, параллельны, а окружность (55) обратится в прямую, и последняя теорема может быть тогда формулирована в следующей редакции: У циркулярной кривой 3-го порядка с вещественной ассимптотой в точке перегиба, перпендикуляр, опущенный из центра на эту ассимптоту, делит пополам все хорды кривой, параллельные этой ассимптоте.

4) Если главная точка является тангенциальной точкой какой-нибудь касательной к циркулярной кривой, то нормаль к циркулярной кривой в точке касания проходит через центр (особенный фокус) циркулярной кривой.

Ур-ие цир. кривой, отнесенное к центру ее, будет

$$(x+A_2)(x^2+y^2)+D_2x+E_2y+F_2=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (56)$$

Перенеся начало координат в точку

$$-A_2=a \qquad \frac{D_2A_2-F_2}{E_2}=b$$

главную точку по формулам $x=x^1-A_2$

$$y=y^1+b$$

мы приведем ур-ие (56) к виду:

$$x'.[(x^1-A_2)^2+(y^1+b)^2]+D_2x^1+E_2y^1=0 \quad . \ . \ . \ . \ (57)$$

Значки у х у A D и E в дальнейшем мы опустим для упрощения.

Напишем ур-ие касательной к кривой (57) в какой-ниб. точке x y ее. Текущие координаты касательной обозначим ξ и η.

$$\eta-y=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(\xi-x) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (58)$$

где $f(x_1y)=0$ ур-ие кривой.

Произведя выкладки применительно к ур-ию (57), получим:

$$\eta-y=-\frac{(x-A)^2+(y+b)^2+2x(x-A)+D}{2x(y+b)+E}\cdot(\xi-x) \quad . \ . \ . \ (59)$$

Если касательная (59) проходит через главную точку (начало координат), то мы имеем такое условие:

$$-y=\frac{(x-A)^2+(y+b)^2+2x(x-A)+D}{2x(y+b)+E}\cdot x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (60)$$

так как из ур-ия кривой $(x-A)^2x+(y+b)^2x=-Dx-Ey$, то (60) можно переписать следующим образом:

$$y=\frac{Dx+Ey-2x^2(x-A)-Dx}{2x(y+b)+E} \quad \text{или}$$

$$2xy(y+b)+Ey=\quad 2x^2(x\quad A)+Ey \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (61)$$

В окончательной форме условие (61), чтобы касательная в точке xy циркулярной кривой прошла через ее главную точку, может быть переписано таким образом: $y(y+b)=-x(x-A)$ . . . . (62)

Ур-ие нормали к кривой (57) как известно будет:

$$\eta-y=\frac{2x(y+b)+E}{(x-A)^2+(y+b)^2+2x(x-A)+D}(\xi-x) \qquad (63)$$

Заменив здесь попрежнему сумму двух первых членов знаменателя из ур-ия кривой через

$$-D-\frac{Ey}{x}, \tag{63}$$

мы получим:

$$\eta-y=\frac{2x\,(y+b)+E}{-D-\frac{Ey}{x}+2x\,(x-A)+D}\,(\xi-x)$$

или по упрощении:

$$\eta-y=\frac{2x\,(y+b)+E}{2x^2(x-A)-Ey}\,.\,x\,.\,(\xi-x) \tag{64}$$

Если нормаль (64) проходит через центр цирк. кривой, то координаты центра (по отношению к новой системе осей, проходящих через главную точку) должны удовлетворять уравнению (64).

Если координаты главной точки A по отношению к осям XOУ с началом в центре кривой были A и $+b$, то координаты центра 0 по отношению к осям $x'AУ'$ будут $+A$ и $-b$.

Подставив последние выражения вместо текущих координат в уравнение нормали (64), мы получим:

$$-b-y=\frac{2x(y+b)+E}{-2xy\,(y+b)-Ey}\,.\,x\,(A-x) \tag{65}$$

$2x^2(x-A)=-2xy(y+b)$ из уравнения (62).

После несложных преобразований ур-ия (65) мы получим:

$$y+b=-\frac{2x(y+b)+E}{y\,[2x\,(y+b)+E]}\,.\,x\,(x-A)$$

или по сокращении:

$$y.(y+b)=-x\,(x-A) \tag{66}$$

(66) Удовлетворяется тождественно в силу (62).

Таким образом нормаль к циркулярной кривой, изображаемая уравнением (64), действительно проходит через центр кривой.

Ур-ие (56) дает возможность получить так называемую задачу Czuber'a. Действительно, ур-ие (56) может быть переписано в следующем виде:

$$(x+A_2)\ (x^2+y^2)+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

Это уравнение, как нетрудно видеть, может быть получено путем исключения R из системы уравнений:

$$x^2+y^2=R^2 \text{ и } (x+A_2)\ (R^2+D_2)+E_2\left\{y-\frac{D_2A_2-F_2}{E_2}\right\}=0 \tag{67}$$

Первое из ур-ий (67) (при переменном R) дает пучек концентрических окружностей с центром в особенном фокусе кривой, а второе — пучек прямых, проходящих через главную точку кривой.

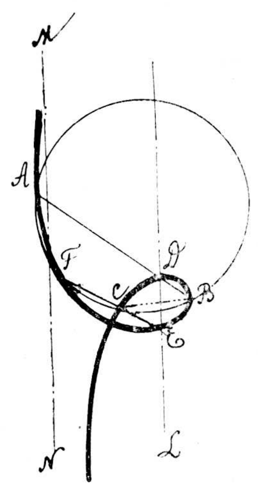
Отсюда и получается теорема Czuber'a:

Всякая циркулярная кривая 3-го порядка может быть образована при помощи пучка прямых и проективного к нему пучка концентрических окружностей. Центром пучка прямых служит главная точка, общим центром всех окружностей служит особенный фокус или центр циркулярной кривой.

Отсюда же непосредственно может быть получена, как следствие теорема I § 11 (теорема Eckhardt'а).

§ 12. Теорема о пучке окружностей, проходящих через две точки циркулярной кривой, может служить для решения задачи о построении касательной к циркулярной кривой в данной на ней точке. Для решения поставленной задачи рассмотрим предварительно такую вспомогательную задачу:

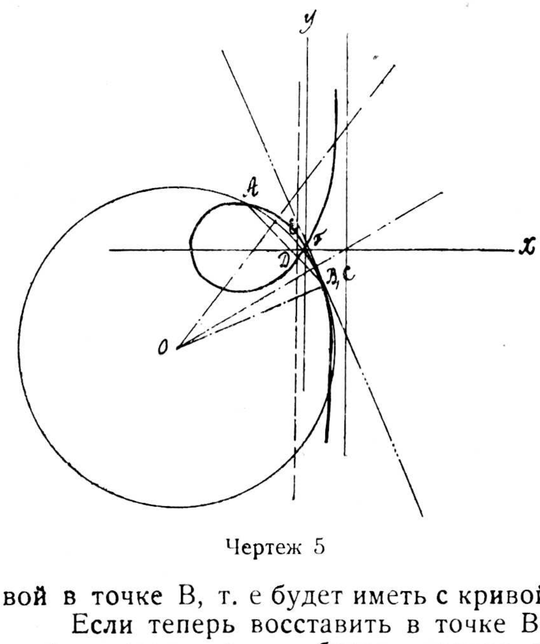
Даны три точки A, B и C на циркул. кривой. Найти четвертую точку F, в которой окружность, проходящая через точки A, B и C, пересечет циркулярную кривую, не проводя самой окружность.



Чертеж 4

Для построения искомой точки F проведем прямую AB (черт. 4) и через точку D ее пересечения с циркулярной кривой проведем прямую DL, параллельную вещественной ассимптоте кривой MN. Точку E пересечения этой прямой с кривой соединяем с третьей точкой C прямой и продолжаем отрезок EC до пересечения с циркулярной кривой. Точка пересечения и будет искомой точкой F. Действительно, на основании теоремы § 8, окружность, проведенная через точки A и Б кривой, пересечет кривую еще в двух точках C и F, соединяющая эти точки прямая должна пересечь кривую в постоянной для всех окружностей пучка AB точке (E); прямая, проведенная через последнюю точку, параллельно вещественной ассимптоте кривой, должна пересечь кривую в точке, лежащей на прямой (AB) (или ее продолжений) в точке D.

Предположим, что через точку A (черт. 5) циркулярной кривой нужно провести окружность, которая бы коснулась ее в некоторой заданной наперед точке B. Эта задача может быть легко сведена к предыдущей. Будем искать точку F, в которой искомая окружность еще раз пересечет кривую. Будем считать точку C совпадающей с точкой B.



Чертеж 5

Соединяем попрежнему точку A с B; через точку D пересечения AB с кривой проводим параллельно вещественной ассимптоте кривой прямую, а точку E пересечения этой прямой с кривой соединяем снова с точкой B.

Точка F пересечения EB с кривой и будет искомой. Остается только провести через точки A F, B окружность. Эта окружность и будет касаться кривой в точке B, т. е будет иметь с кривой в точке B общую касательную.

Если теперь восставить в точке B перпендикуляр к радиусу OB, то полученная таким образом кривая и будет касательной к циркулярной кривой в данной точке B.

§ 13. Теорема, изложенная в начале § 8, есть основная теорема теории циркулярных кривых. Из нее непосредственно вытекает, что циркул. кривая 2-го порядка может быть образована при помощи пучка окружностей и проективного к нему пучка прямых на той же плоскости.

Образуемая таким образом кривая проходит через центры A и B пучка окружностей (см. черт. № 8) через центр E пучка прямых и через две круговых точки плоскости.

Это предложение есть частный случай предложения, что всякая кривая 3-го порядка может быть образована при помощи пучка конических сечений и проективного к нему пучка прямых. При помощи последней теоремы может быть построена методами проективной геометрии теория как кривых 3-го порядка вообще (Schröter Die Theorie der Ebenen Curven dritter Ordnung auf synthetisch-geometrischem Wege Leipzig 1888), так и в частности теория циркулярных кривых (Dissertation von F. Fricke: Ueber ebene Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispuncte gehen. Gotha 1898).

В задачи настоящей работы не входит развитие указанных методов. Все изложение в ней ведется аналитическим методом. Проективные свойства циркулярных кривых будут изложены в следующих главах также при помощи аналитического метода. В этом § будут изложены по методу prof. Durège Über eine leichte Construction der Kurven 3 Ordnung, wielche durch die imaginären Kreispuncte hindurchgehen. Prof H. Durège in Prag, Zeitschr. Math. u. Phys. XIV 1869), способы легкого построения циркулярных кривых.

Это построение также основано на теории § 8, которую для настоящего случая удобнее редактировать следующим образом: если из точек E и F (см. черт. § 8), в которых циркулярная кривая пересекается с прямой параллельной вещ. ассимптоте, проведены две прямые, напр. FA и EC, то они пересекут кривую каждая еще в двух точках A и B, D и C. Все эти четыре точки всегда лежат на одной и той же окружности. Если возьмем за прямую EF самое вещественную ассимптоту, тогда одна из точек E будет, как нетрудно сообразить, главной точкой кривой, а точка F уйдет на ∞.

В таком случае прямая FA будет параллельна вещественной ассимптоте.

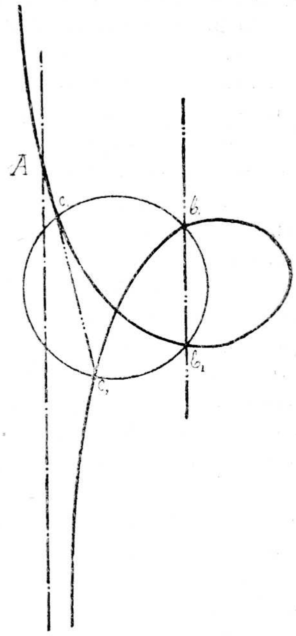
Теорема Eckhardt'a (§ 8) получит тогда такую форму: Если одна прямая, параллельная вещественной ассимптоте, пересечет кривую в точках $b_1 b_2$, а другая прямая, проходящая через главную точку в, c_1 и c_2, то точки b_1, b_2, c_1, c_2 лежат на одной окружности (черт. 6 см. стр. 65).

Таким образом, если мы возьмем общую хорду пучка окружностей параллельно вещественной ассимптоте кривой, то центром соответственного пучка прямых будет главная точка кривой. При помощи теорем § 11 легко установить соответствие между окружностью 1-го пучка и прямой 2-го пучка.

Действительно, теорема 2-я § 11 говорит, что перпендикуляр, восстановленный в середине отрезка $c_1 c_2$ к нему, пройдет через центр циркулярной кривой. Центр M окружности пучка, проходящей через четыре точки $b_1 b_2 c_1 c_2$, также должен лежать на этом перпендикуляре. Отсюда непосредственно вытекает, что линия Ac_1, проходящая через главную точку, перпендикулярно к линии MC, соединяющей центр кривой с центром окружности пучка, пересечет эту окружность в точках c_1 и c_2, лежащих на циркулярной кривой. Таким образом, вопрос об определении луча, соответствующего данной окружности пучка, разрешается вполне.

Самое построение кривой выполняется следующим образом: выбирают две произвольные точки b_1 и b_2. Также произвольно выбирается главная точка A кривой и ее центр C. Точками b_1 и b_2 определяются концы общей хорды пучка окружностей и направление вещественной ассимптоты кривой,

Проводим затем через точки b_1 и b_2 произвольную окружность, соединим ее центр M с центром кривой C и из главной точки кривой A опускаем на MC перпендикуляр, последний пересечет окружность в двух точках, лежащих на циркулярной кривой. Такое построение может быть повторено для каждой из окружностей пучка и, следовательно, мы можем построить таким способом, сколько угодно точек кривой.



Чертеж 6

Точки b_1 и b_2 совершенно произвольны. Точка A подчинена только одному условию: она не должна лежать на прямой, проходящей через b_1 b_2. [Если бы сама прямая $b_1 b_2$ была вещественной ассимптотой, то точки b_1 и b_2 должны были бы уйти на ∞].

Точка C подчинена одному условию: она не должна лежать на линии центров пучка окружностей. Если точка C лежит на этой линии, то MC сохраняет постоянное направление—линии центров пучка окружностей, и предыдущее построение не дает определенных точек кривой, ибо все точки пересечения луча с окружностями пучка лежат на одной и той же прямой b_1b_2.

Примечание к § 13.

На основании редакции 1-й и 2-й теоремы Eckhardt'a, приведенных в § 13, можно высказать еще такие 2 предложения:

Если прямая, параллельная вещественной ассимптоте, циркулярной кривой, пересекает эту кривую в точках a и c и если касательные к цирк. кривой в точках a и c пересекут кривую в точках A и C, то 1) четыре точки a, c A и C лежат на одной окружности, 2) прямая AC пройдет через главную точку циркулярной кривой. Доказательство предоставляем читателю.

§ 14. Посмотрим, определенно-ли указанное в § 13 построение циркулярной кривой вообще, т. е. при выборе точек b_1 b_2 A и C получается ли единственная циркулярная кривая.

Решим сначала вопрос о том, сколько точек кривой задается таким построением. Мы имеем две точки b_1 и b_2. Точкой A задается вещественная ассимптота кривой, на которой лежат еще две точки искомой кривой на ∞ (ассимптота касается кривой на ∞). Таким образом имеем 5 точек кривой. Точкой C определяются две мнимых ассимптоты кривой, каждая из них содержит по две точки кривой, совпадающих в круговых точках J и j. Таким образом искомая кривая задается 9-ю ее точками.

Но через 9 точек при особом их расположении на плоскости может проходить пучек кривых 3-го порядка (Лемма § 8).

Является теперь вопрос, не представляют ли эти 9 точек такого исключительного расположения?

Известно, что если 9 точек образованы пересечением двух циркулярных кривых 3-го порядка и три из них лежат на одной прямой, то остальные 6 должны лежать на одной окружности. (Лемма § 8 примечание).

И обратно, если из 9 точек циркулярной кривой три лежат на одной прямой, а 6 остальных на окружности, то через эти 9 точек проходит бесчисленное множество циркулярных кривых.

Из 9 точек искомой циркулярной кривой три лежат на одной прямой (вещественной ассимптоте), именно точка A и две совпадающие ∽ в точке касания ее с кривой.

Если циркулярная кривая не однозначно определяется, то остальные 6 точек должны по предыдущему лежать на одной окружности.

Мнимые ассимптоты искомой кривой должны быть также ассимптомами этой окружности (в точках j и J совпадают по две точки кривой).

Ассимптоты всегда пересекаются в центре. Значит точка C должна быть центром этой окружности. Но центры всех окружностей, проходящих через точки b_1 b_2, лежат на перпендикуляре, проведенном к отрезку b_1 b_2 через его средину. Таким образом построение становится неопределенным тогда и только тогда, когда центр C лежит на этом перпендикуляре. За исключением этого случая кривая определяется указанным построением однозначно.

При построении кривой можно точки b_1 и b_2 совместить в одну точку O. В таком случае остается произвольным направление линии центров пучка окружностей. Если, кроме того, выбрать точки A и C так, чтобы угол AOC был прямым, то построенная кривая будет иметь двойную точку b O. [Это свойство является непосредственным следствием теоремы 2 § 11. В двойной точке длина отрезка становится равной O, и перпендикуляр из его средины к нему и будет перпендикуляром к прямой, соединяющей главную точку кривой и ее двойную точку в последней точке].

Это свойство кривых с двойной точкой будет указано ниже.

Примечание к § 14.

Кривая может быть задана или достаточным числом ее точек или другими условиями, эквивалентными такому числу ее точек. Напр., окружность однозначно задается тремя ее точками, не лежащими на одной прямой.

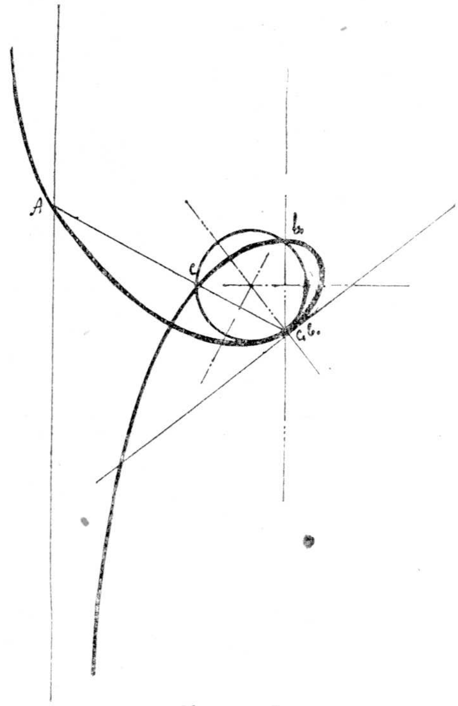
Эти три точки вместе с двумя круговыми точками j и J дают 5 точек, какими вообще задается кривая 2-го порядка. Но окружность можно также однозначно задать по ее центру и одной какой-либо точке, лежащей на ней. Легко показать, что такое задание сводится также к заданию 5 точек окружности. Действительно, заданием центра окружности вполне определяются ее две мнимых ассимптоты (изворотные прямые). На каждой из этих прямых лежит по две совпадающих точки окружности (ассимптота касается кривой на ∽). Таким образом мы имеем 4 точки кривой, а вместе с отдельно заданной— пять точек. Аналогичный прием задания циркулярной кривой применен в § 14 при задании циркулярной кривой по точкам. Ур-ие циркулярной кривой содерж. 8 коэффициентов, следовательно она зависит от 7 параметров. Так как координаты центра выражаются через коэффициенты общего уравнения (формулы § 2), то заданием координат центра мы уменьшаем число независимых коэффициентов до 6.

Задание координат главной точки уменьшает это число до 4.

Два центра пучка (они лежат на кривой) сводят это число до 2.

Задание направления вещественной ассимптоты позволяет написать ее уравнение (главная точка дана выше). Условия двойного бесконечного корня для уравнений вещественной ассимптоты и кривой дают возможность определить два последних коэффициента уравнения кривой.

§ 15. Теоремой Eckhardt'a во второй редакции ее § 13 можно также воспользоваться для более простого построения касательной к циркулярной кривой в данной точке; если главная точка кривой не лежит на ∞, для этого достаточно (черт. 7) совместить точку c_1 с точкой b_2, тогда проведенная окружность коснется кривой в этой точке.



Чертеж 7

Отсюда вытекает следующее построение касательной к циркулярной кривой в данной точке: соединяют данную точку ($c_1 b_2$) с главной точкой кривой и проводят через эту же данную точку прямую параллельную вещественной ассимптоте. Первая прямая пересечет кривую еще в точке c_2, вторая в точке b_1. Из средины отрезков ($c_1 b_2$) c_2 и ($c_1 b_2$) b_2 восставляют к ним перпендикуляры. Точка их пересечения очевидно будет центром окружности, касающемся кривой в данной точке. Соединив этот центр с данной точкой на кривой, найдем нормаль в данной точке. Построение касательной сведется к проведению прямой, перпендикулярной к нормали.

Чертежи 8—14 изображают циркулярные кривые при различных положениях центров пучка.

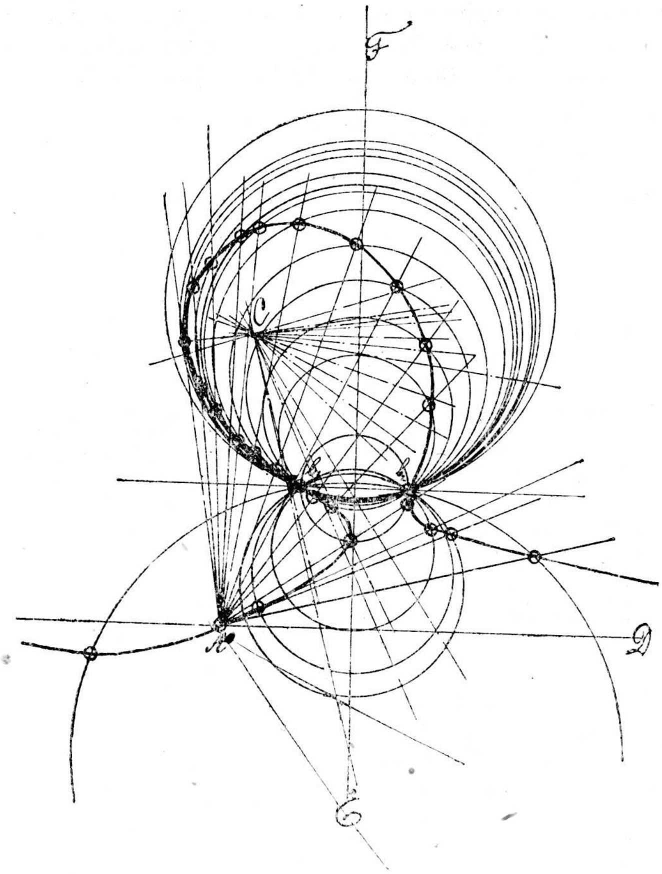
Чертеж 8 соответствует общему случаю, когда центры пучка различны. Полученная циркулярная кривая состоит из одной ветви. EF—линия центров пучка окружностей. C—центр кривой; A—главная точка; b_1 и b_2—центры пучка окружностей; AD вещественная ассимптота.

Черт. 9 изображает циркулярную кривую, состоящую из двух ветвей: бесконечной ветви и замкнутого овала.

EF линия центров пучка. A главная точка. C центр циркулярной кривой. AD вещественная ассимптота. Центры пучка окружностей совпадают в одной точке. Все окружности пучка касательны в точке $b_{1,2}$.

Черт. 10 изображает циркулярную кривую, состоящую из одной ветви, и имеющую двойную узловую точку в центре пучка окружностей. Центры пучка окружностей совпадают в точке $b_{1,2}$. Главная точка кривой A и ее центр C взяты так, чтобы $\angle A b_{12} C$ был прямым. EF—линия центров пучка окружностей. AD вещественная ассимптота.

Таким образом циркулярная кривая: 1) состоит из одной ветви, если пучек окружностей имеет два центра (черт. 8);



Чертеж 8

2) состоит из двух отдельных ветвей незамкнутой и эллинтического овала, если пучек окружностей имеет один центр, но прямые, соединяющие этот центр с главной точкой и центром кривой, не взаимно перпендикулярны (черт. 9);

3) состоит из одной ветви с двойной точкой, если окружности пучка имеют один центр и, кроме того, прямые, соединяющие его с главной точкой и центром кривой, взаимно перпендикулярны (черт. 10).

§ 16. Такие точки кривой, касательные в которых пересекаются на самой кривой, наз. сопряженными точками.

Если точка пересечения мнимых ассимптот (касательных к кривой на ∽)—центр кривой лежит на самой циркулярной кривой, то точки J и j будут сопряженными точками на ней. Свойства таких циркулярных кривых будут указаны ниже в главе о фокальных кривых. Такие кривые называются иногда Kreispunctkurven (Müller, Zeitshr. für Math. LX 1895). Здесь укажем лишь их общие свойства в связи с их построением. Если уравнение такой кривой привести к виду 18 § 5, то она примет форму

$$(x+A_2)\,(x^2+y^2)+D_2+E_2y=O, \qquad (68)$$

свободный F_2 должен обратиться в нуль, так как начало координат лежит на кривой. Координаты главной точки будут:

$$x = -A_2 \,;\; y = \frac{D_2 A_2}{E_2} \qquad (69)$$

а уравнение средней линии:

$$x = -\frac{A_2}{2}$$

Ур-ие кривой может быть получено путем исключения параметра k из системы уравнений:

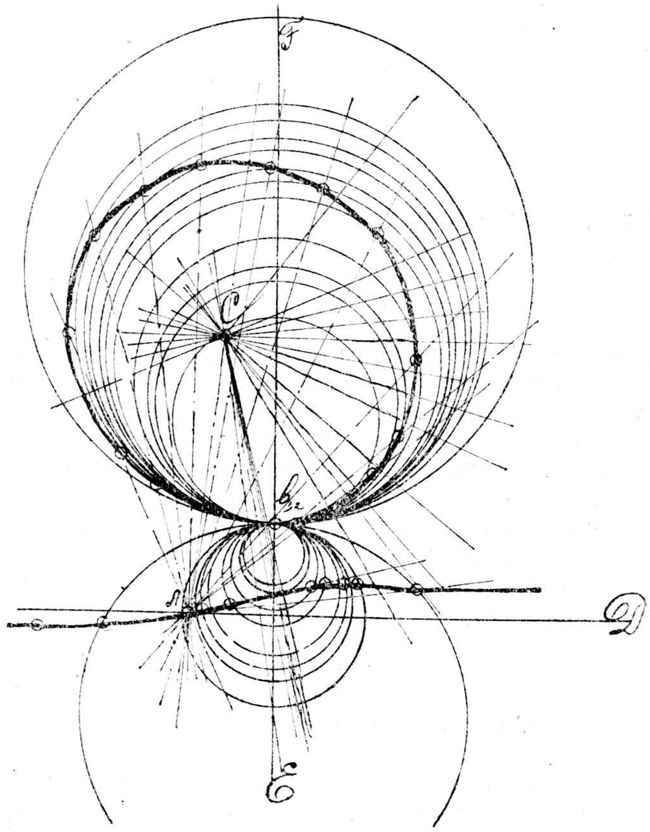
$$y = kx \,;\; \left(x + \frac{A_2}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{kA_2}{2}\right)^2 = \frac{1+k^2}{4} A_2^2 - D_2 - E_2 k \qquad (70)$$

Первое из ур-ий (70) представляет пучек прямых, а второе пучек окружностей, которых центры лежат в точках пересечения средней линии циркулярной кривой с соответственными лучами пучка прямых.

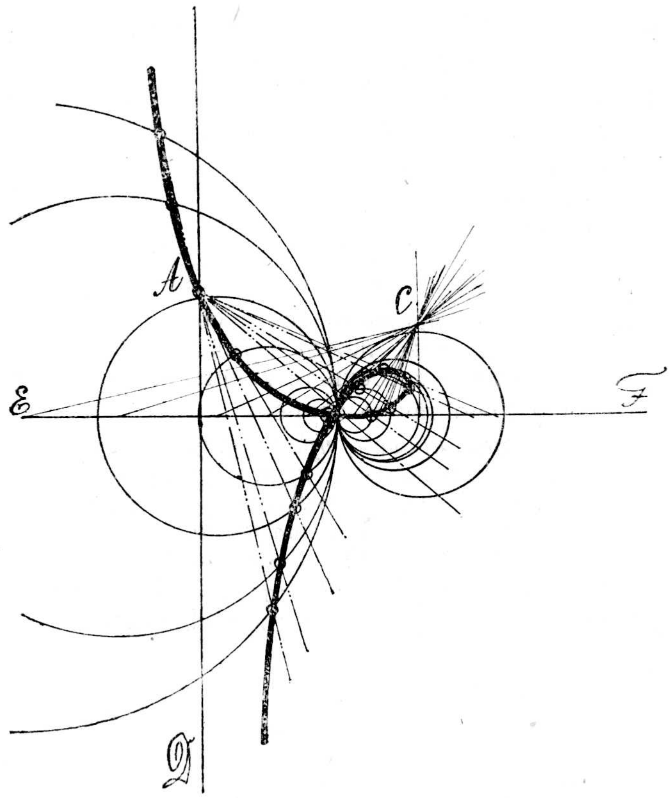
Имеем следовательно такую теорему:

Всякая циркулярная кривая, проходящая через свой центр, может быть образована при помощи пучка прямых, проходящих через центр и проективного к нему пучка оиружностей, причем центр каждой из окружностей пучка лежит на соответственном луче и на медиане (средней линии) циркулярной кривой.

Последняя теорема дает легкий способ построения таких кривых: соединив главную точку A с центром C, строим на отрезке AC,



Чертеж 9



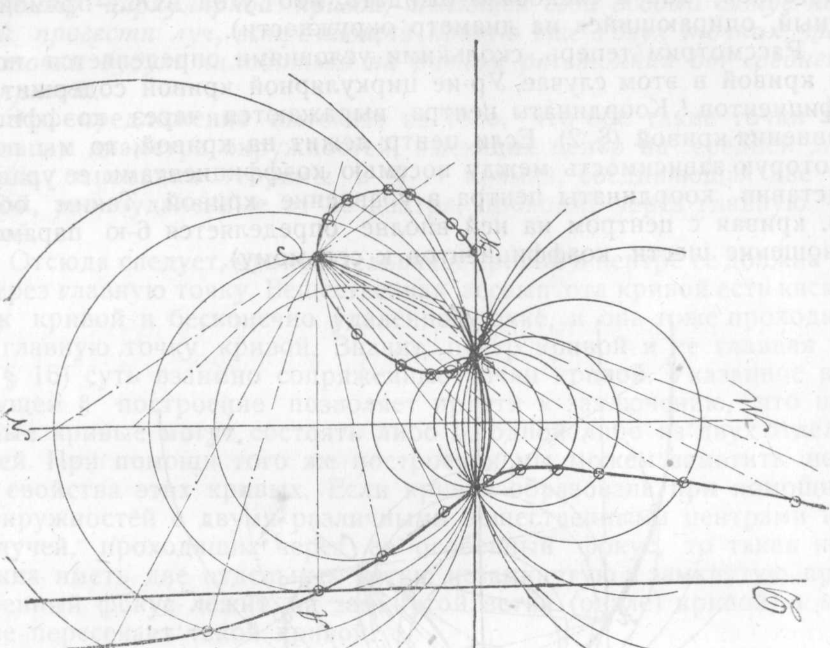
Чертеж 10

как на диаметре, окружность. Это будет одна из окружностей пучка, соответствующая значению.

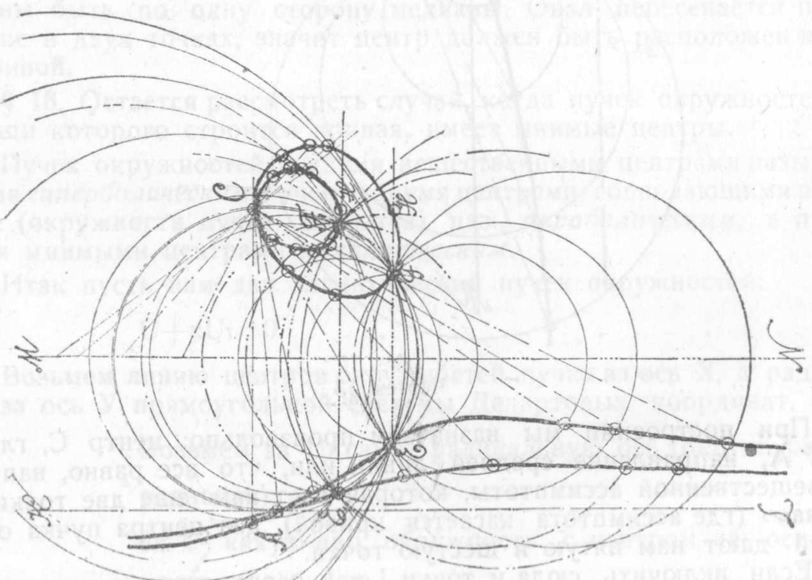
$$к = -\frac{D_2}{E_2}$$

Через центр этой окружности проводим произвольную прямую, которая будет средней линией нашей кривой. Проведем через какую-нибудь точку средней линии перпендикулярную к ней прямую. Она пересечет окружность в двух точках. Примем эти точки за точки кривой и центры пучка окружностей. Лучи, проведенные из центра кривой в центры окружностей пучка, пересекут каждую окружность, соответствующую этому лучу, в двух точках, которые и должны быть точками искомой кривой. Прямая, параллельная средней линии и проходящая через центр, пересечет продолжение перпендикуляра к средней линии также в точке, которая должна лежать на искомой кривой. Все сказанное непосредственно вытекает из основной теоремы § 8.

Проведя через главную точку A и какую-нибудь, из определенных указанным выше способом, точку кривой M луч AM, мы на пересечении этого луча с окружностью проведенной из центра кривой C, радиусом MC, получим новую точку искомой кривой. Сказанное есть простое следствие теоремы 2-й § 11. На чертежах 11 и 12 выполнено такое построение. Чертеж 12 показывает кроме того, как изменяется кривая при изменении центров пучка окружностей при прочих равных условиях.



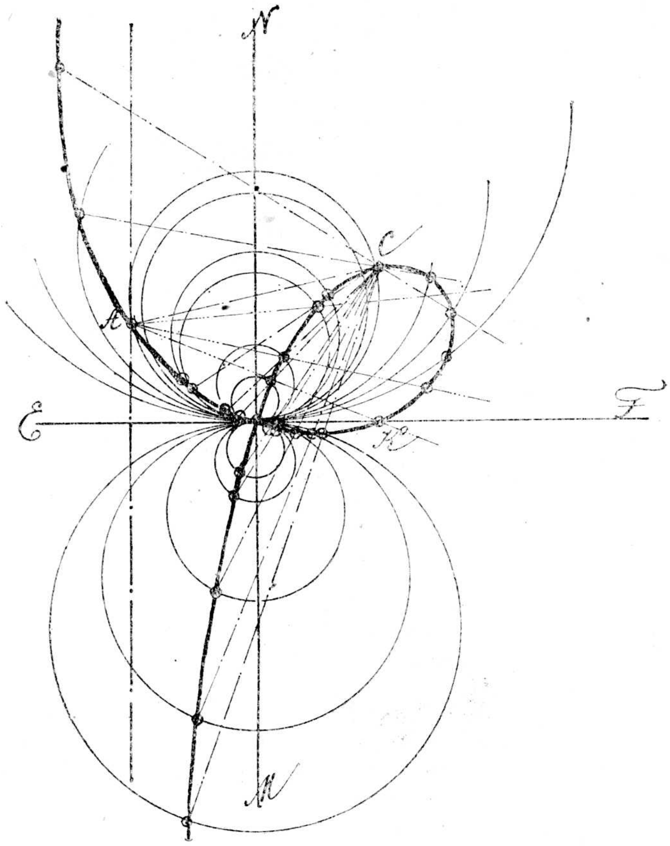
Чертеж 11



Чертеж 12

Чертеж (13) изображает кривую, получившуюся при совмещении центров пучка окружностей в одну точку. Кривая получилась с двойной точкой, как и следовало ожидать, ибо угол АОС—прямой (вписанный, опирающийся на диаметр окружности).

Рассмотрим теперь, сколькими условиями определяется построение кривой в этом случае. Ур-ие циркулярной кривой содержит 8 коэффициентов. Координаты центра выражаются через коэффициенты уравнения кривой (§ 2). Если центр лежит на кривой, то мы получим некоторую зависимость между восемью коэффициентами ее уравнения, подставив координаты центра в уравнение кривой. Таким образом, цир. кривая с центром на ней вполне определяется 6-ю параметрами (отношение шести коэффициентов к седьмому).



Чертеж 13

При построении мы назначаем произвольно: центр С, главную точку А, направление средней линии или, что все равно, направление вещественной ассимптоты, которая дает нам еще две точки кривой на ∞ (где ассимптота касается кривой), два центра пучка окружностей дают нам пятую и шестую точки.

Если включить сюда и точки I и Ī, через которые проходит наша кривая, то можно сказать, что кривая определяется 8-ю ее точками вместо 9 у циркулярных кривых общего вида. Число точек уменьшается на одну вследствие добавочного условия относительно нахождения центра на самой кривой.

§ 17. Относительно кривых последнего рода в связи с указанным построением их можно высказать следующую теорему: *если через центр циркулярной кривой, имеющей свой особый фокус на ней самой, провести луч, встречающий кривую еще в двух точках, то обе эти точки будут находиться на равном расстоянии от средней линии кривой.*

Это предложение вытекает из того, что обе такие точки лежат на концах диаметра окружностей, имеющих центр на средней линии.

На основании теоремы 2 § 11 прямая, соединяющая две точки кривой, равноудаленные от ее центра, проходит через главную точку кривой.

Отсюда следует, что касательная к кривой в центре ее должна пройти через главную точку. Вещественная ассимптота кривой есть касательная к кривой в бесконечно удаленной точке, и она тоже проходит через главную точку кривой. Значит центр кривой и ее главная точка (см. § 16) суть взаимно сопряженные точки кривой. Указанное в предыдущем § построение позволяет притти к заключению, что циркулярные кривые могут состоять либо из одной либо из двух отдельных ветвей. При помощи того же построения мы можем заметить некоторые свойства этих кривых. Если кривая образована при помощи пучка окружностей с двумя различными вещественными центрами и пучка лучей, проходящих через ее особенный фокус, то такая кривая должна иметь две отдельных ветви: незамкнутую и замкнутую, при чем особенный фокус лежит на замкнутой ветви (овале) кривой, а медиана не пересекает такой кривой.

Действительно, из построения вытекает, что у линейного пучка не может быть ни одного луча, который пересек бы кривую в двух совпадающих точках. Значит всякая прямая, проходящая через центр кривой, пересекает ее еще в двух различных точках, равноудаленных от медианы кривой. Следовательно центр и одна из таких точек должны быть по одну сторону медианы. Овал пересекается прямой вообще в двух точках, значит центр должен быть расположен на овале кривой.

§ 18. Остается рассмотреть случай, когда пучек окружностей, при помощи которого строится кривая, имеет мнимые центры.

Пучек окружностей с двумя вещественными центрами называется иногда *гиперболическим*, пучек с двумя центрами, совпадающими в одной точке (окружности пучка касаются) наз. *параболическим*, а пучек с двумя мнимыми центрами *эллиптическим*.

Итак пусть нам дан эллиптический пучек окружностей:

$$U+\kappa U_1=0. \qquad (71)$$

Возьмем линию центров окружностей пучка за ось X, а радикальную за ось У прямоугольной системы Декартовых координат.

Возьмем за U_1 самое радикальную ось (окруж. радиуса, равной ∞), а

за U какую-ниб. окружность с центром на оси X. Ее уравнение будет:

$$x^2+y^2+Ax+C=0 \qquad (72)$$

где A и C некоторые постоянные. Уравнение пучка напишется тогда в такой форме:

$$x^2+y^2+Ax+C+кx=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

ибо уравнение рад. оси в нашем случае будет $x=0$.

Ур-ие пучка может быть переписано таким образом:

$$x^2+y^2-2\alpha x+m^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

где $2\alpha=-(A+к)$, $m^2=C$.

Геометрическое значение m есть длина касательной, проведенной из начала координат к любой из окружностей пучка. Действительно,

$OM=\sqrt{ON^2-MN^2}$ но $ON=\alpha$; $MN^2=\alpha^2-C=\alpha^2-m^2$, $OM=\sqrt{\alpha^2-\alpha^2+m^2}=m$

(черт. 15.) число m постоянно для всех окружностей пучка. Оно вещественно, если $\alpha^2>r^2$, ибо $MN=r$—радиусу окружности пучка, и мнимо в случае $\alpha^2<r^2$.

Таким образом, уравнение (74) зависит от одного только параметра α и выражает все окружности пучка с линией центров на оси x. Если положим в уравнении (74) $\alpha=\mp m$, то мы получим:

$$(x\mp m)^2+y^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Ур-ие (75) выражают две окружности нулевого радиуса с координатами центров $(+m, o)$ и $(-m, o)$ Следовательно, если мы имеем эллиптический пучек окружностей (не пересекающихся с радикальной осью), то на линии центров их существуют две действительные точки, находящиеся от радикальной оси в расстояниях $+m$ и $-m$. Их можно считать за две бесконечно малые окружности пучка. Эти точки называются *предельными* точками эллиптического пучка (*Poncelet*).

Найдем ур-ие пучка ортогонального данному эллиптическому пучку. Для этого напишем общее уравнение окружностей в нормальной форме:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

и подберем его коэффициенты так, чтобы окружности, изображаемые уравнением (76), были ортогональны к окружностям пучка, изображаемого уравнением (74) при всяком α. Как известно, условие ортогональности двух окружностей ($r_1^2+r^2=d^2$) в данном случае будет:

$$-2a\alpha+b.0=2(m^2+c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Так как условие (77) должно выполняться при всяком α, то мы должны иметь:

$$a=o\ ;\ m^2+c=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Значит уравнение (76) может быть на основании (78) переписано так:

$$x^2+y^2+by-m^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Обозначив для симметрии b через -2β, перепишем ур-ие (79) в следующей форме:

$$x^2+y^2-2\beta y-m^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Ур-ие (80) также зависит от одного параметра β и след. выражает пучек окружностей с линией центров на оси У и с радикальной осью на оси X. Сравнив уравнения (74) и (80)

$$x^2+y^2-2\alpha x+m^2=0 \text{ и} \qquad (81)$$
$$x^2+y^2-2\beta y-m^2=0 \qquad (82)$$

мы видим, что (81) дает пучек окружностей *с мнимыми центрами*, ибо для координат точек пересечения с осью x получаем ур-ие:

$$y^2+m^2=0$$

из которого координаты центров пучка (81) будут $(0, +mi)$ и $(0, -mi)$ —мнимые.

Окружности же второго пучка (82) имеют вещественные центры $(+m, 0)$ и $(-m, 0)$. При $m=o$ центры обоих ортогональных пучков совпадают в начале координат.

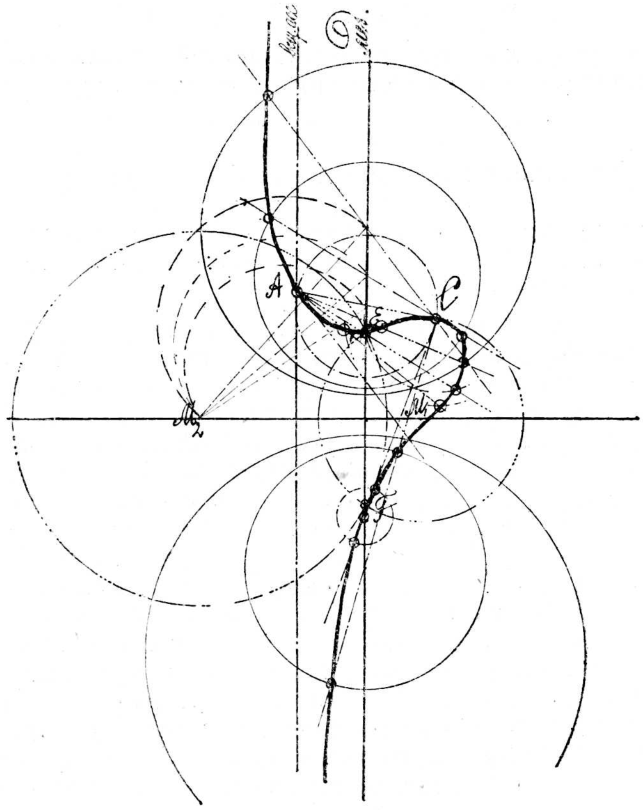
§ 19. На основании соображений § 18 нетрудно построить по точкам циркулярную кривую, у которой пучек образующих окружностей будет эллиптического типа. Такое построение сделано на чертеже 14. Получается кривая, состоящая из одной ветви (*unzügige*). Для построения кривой строим одну из окружностей эллиптического пучка на отрезке AC, соединяющем главную точку и центр кривой, как на диаметре. Проведя произвольно вещественную ассимптоту и параллельно ей медиану кривой, на последней берем центр второй окружности пучка, проведя через него окружность, не пересекающую первой, получим две основных окружности эллиптического пучка. Строим при помощи радикального центра радикальную ось этих окружностей. Взяв произвольную точку на этой оси (можно взять точку пересечения α с линией центров), проводим из нее касательную к одной из данных окружностей (обе касательные равны между собою). Из взятой точки, радиусом, равным длине касательной, проводим дугу, которая пересечет линию центров в предельных точках. Через эти предельные точки, как через два вещественных центра проводим две окружности. Все окружности эллиптического пучка получим, если будем проводить из различных точек линии центров (средней линии кривой) касательные к одной из окружностей гиперболического ортогонального пучка, и описывать около взятой точки окружности радиусами, равными длине проведенной касательной.

В остальном построение точек искомой кривой делается попрежнему: через особый фокус и центр окружности пучка проводят луч и отмечают точки его пересечения со взятой окружностью пучка.

Любое число окружностей эллиптического пучка можно получить из соображений § 18 относительно геометрического значения коэффициента c в уравнениях ортогональных пучков.

Для этого достаточно из точки пересечения средней линии и радикальной оси провести касательную к одной из окружностей пучка. Описав радиусом, равным длине этой касательной, окружность (она даст в пересечении с медианой кривой предельные точки), будем проводить по различным направлениям радиусы этой окружности, а в концах их, лежащей на ней, восстановим перпендикуляры к ним. Точки пересечения последних с медианой определят центры соответствующих окружностей эллиптического пучка, а длины перпендикуляров дадут радиусы этих окружностей.

При вычерчивании точек кривой при помощи циркуля и двух наугольников последний способ значительно проще. Если оба центра совпадают, то этот случай принадлежит к предельным, и мы будем иметь два ортогональных пучка окружностей, касающихся в общей точке. Кривая в этом случае, как показано на черт. 13, имеет двойную точку.



Чертеж. 14

§ 20. Кривая с центром на ней самой может быть рассматриваема как геометрическое место точек прикосновения касательных, проведенных из ее центра, к каждой из окружностей гиперболического пучка, причем радикальною осью этого пучка будет медиана кривой, а линией центров перпендикуляр к последней в точке, делящей пополам расстояние между вещественными центрами гиперболического пучка.

Действительно, возьмем гипербол. пучек окружностей

$$x^2+y^2-2\alpha x-m^2=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (83)$$

Проведем из центра кривой C(a,b) касательные к какой-нибудь из окружностей пучка (83). Пусть координаты точки касания M будут (x_1 y_1). Тогда уравнение касательной к одной из окружностей (83) в точке M будет:

$$xx_1+yy_1-\alpha(x+x_1)-m^2=0 \quad \dots\dots\dots \quad (84)$$

Так как касательная должна пройти через центр кривой, то мы должны иметь условие:

$$ax_1+by_1-\alpha(a+x_1)-m^2=0 \quad \dots\dots\dots \quad (85)$$

Кроме того, точка x_1 y_1 лежит на окружности пучка следовательно:

$$x_1^2+y_1^2-2\alpha x_1-m^2=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (86)$$

Исключив из уравнений (86) и (85) параметр α и рассматривая $x_1\, y_1$ как текущие координаты, получим уравнение искомого геометрического места точек прикосновения касательных из точки C(a,b) ко всевозможным окружностям пучка. Из (86)

$$\alpha = \frac{x_1^2+y_1^2-m^2}{2x_1}\ , \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

Подставив выражение α из (87) в (85), мы найдем

$$ax_1+by_1 - \frac{x_1^2+y_1^2-m^2}{2x_1}(a+x_1)-m^2=0 \quad \ldots \quad (88)$$

После упрощения (88) легко находим

$$(a+x_1)\,(x_1^2+y_1^2)-2ax_1^2-2bx_1y_1+m^2x_1-m^2a=0 \quad \ldots\ldots \quad (89)$$

Ур-ие (89) показывает, что искомое геометрическое место есть *циркулярная кривая 3-го порядка*. Точка C (a,b) лежит на искомой кривой (89), ибо после подстановки в уравнении (89) a и b вместо текущих координат мы получим тождество:

$$a^2+b^2-a^2-b^2=0.$$

Перенеся начало координат в точку C(a,b) по формулам

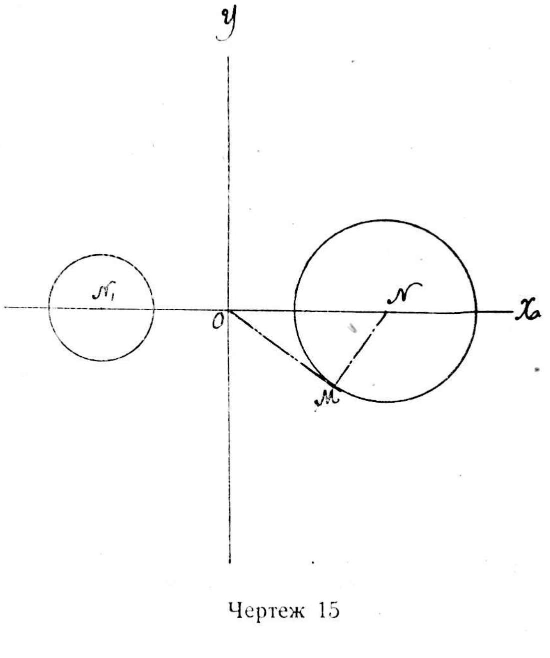
$$a_1=x^1+a$$
$$y_1=y^1+b,$$

мы получим после некоторых упрощений:

$$(x^1+2a)\,(x^{12}+y^{12})+(m^2-b^2-a^2)x^1+2aby^1=0, \quad \ldots\ldots, \quad (90)$$

т. е. уравнение вида (68) § 16.

Итак, в случае гиперболического пучка получается кривая, состоящая из одной ветви (черт. 16).



Чертеж 15

В случае эллиптического пучка получается кривая, состоящая из двух ветвей черт. 17. (Обратно построениям, сделанным в § 19).

Таким образом, изложенные только что способы построения позволяют высказать следующее предложение: Всякая циркулярная кривая с особенным фокусом на ней самой может быть получена, как геометрическое место точек прикосновения касательных, проведенных из некоторой точки (центра кривой) к пучку окружностей с вещественными или мнимыми центрами. Если пучек гиперболический, то кривая состоит из одной ветви. В случае эллиптического пучка получается кривая, состоящая из двух ветвей.

Сопоставив эту теорему с теоремой предыдущего §, можно сказать, *что одна и та же циркулярная* кривая с центром на ней самой может быть образована либо при помощи пучка окружностей и проективного к нему пучка лучей-диаметральных соответственным окружностям пучка, либо при помощи ортогонального к первому пучка окружностей и пучка лучей, касательных к этому ортогональному пучку, проведенных из того же центра.

§ 21. Рассмотрим, сколько точек искомой кривой задается при ее построении по способу § 20. Заданием центра кривой (одна точка) вполне определяются обе изотропные прямые—мнимые ассимптоты искомой кривой; на каждой из этих ассимптот находятся по две точки искомой кривой (на ∞) [итого с прежней имеем 5 точек].

Два центра окружностей пучка задают 6-ю и 7-ю точки. Заданием радикальной оси пучка—медианы искомой кривой—при заданном центре вполне определяется вещественная ассимптота кривой, на ней лежат 8-я и 9-я точки искомой кривой (в точке пересечения вещественной ассимптоты с бесконечно-удаленной прямой).

На ассимптоте совпадают две точки кривой. Итого имеем 9 точек, как и в предыдущем построении.

Чертеж 16. С центр кривой. E и E_1 центры гиперболического пучка окружностей [1])

MN вещественная ассимптота

EE_1—радикальная ось пучка и медиана кривой

A главная точка кривой. Лучи, начерченные пунктиром—суть касательные из точки C к соответственным окружностям пучка.

Кривая $AECE_1$ состоит из одной ветви.

KL—линия центров эллиптического пучка. (черт. 17) MN—радикальная ось пучка и медиана искомой кривой. C—центр кривой. EF—вещественная ассимптота. G и H—предельные точки пучка. G—совпадает с главной точкой кривой.

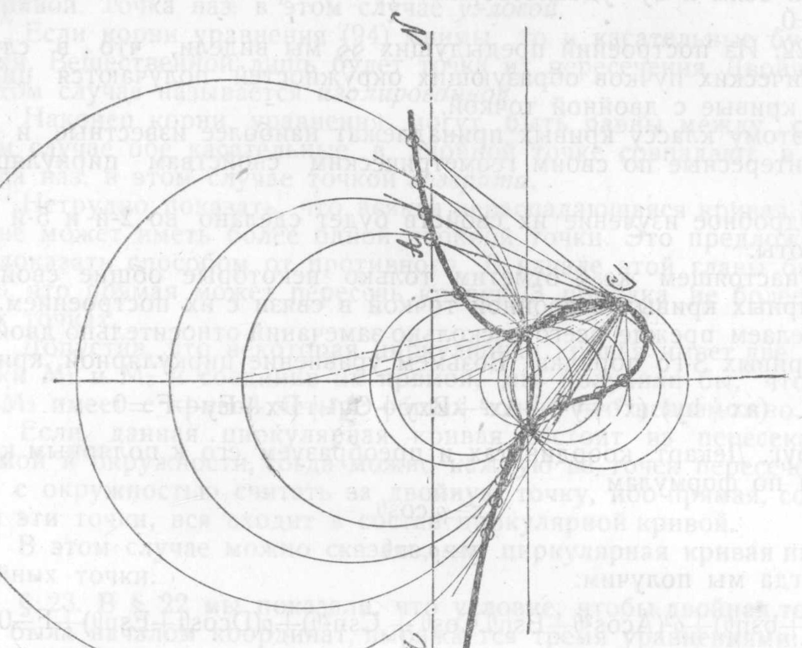
Так как вещественная ассимптота искомой кривой задается в построении § 20 при помощи медианы кривой и ее центра, то главная точка кривой в этом случае не задается наперед, как это было сделано в предыдущем случае.

Ее координаты легко найти, имея уравнение кривой и ее вещественной ассимптоты. Эти же координаты могут быть сразу написаны по формулам (69) § 16

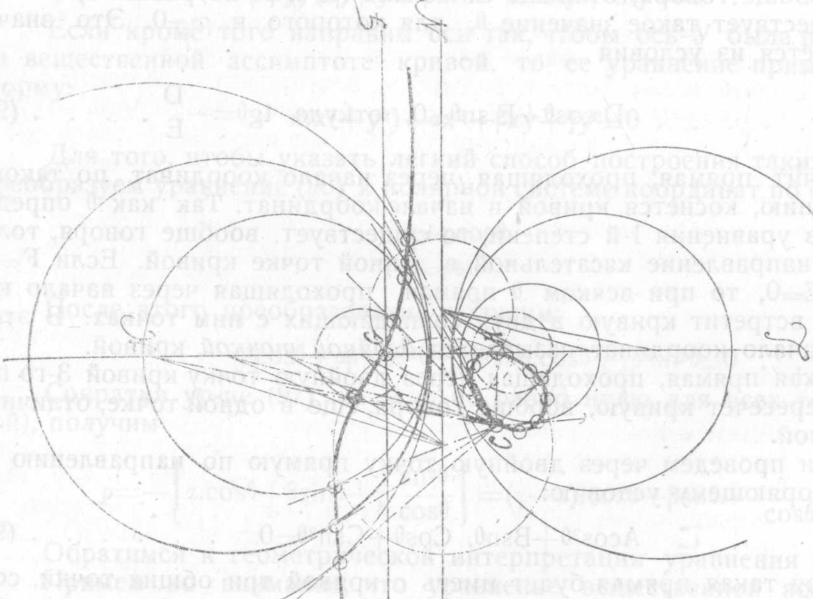
$$x=-2a$$
$$y=\frac{m^2+a^2-b^2}{b}$$

При m=o пучек окружностей будет параболическим. Кривая в этом случае, как и раньше, будет иметь двойную точку в пересечении

[1]) Буквы E и E_1 на чертеже не поставлены.



Чертеж 16



Чертеж 17

медианы с линией центров. Координаты этой точки (—a,—b) по отношению к осям x^1Cy^1 удовлетворяют ур-ию кривой: $a(a^2+b^2)-a^3+ab^2-2ab^2=0$.

§ 22. Из построений предыдущих §§ мы видели, что в случае параболических пучков образующих окружностей получаются циркулярные кривые с двойной точкой.

К этому классу кривых принадлежат наиболее известные и наиболее интересные по своим геометрическим свойствам циркулярные кривые.

Подробное изучение их свойств будет сделано во 2-й и 5-й главах работы.

В настоящем же § отметим только некоторые общие свойства циркулярных кривых с двойной точкой в связи с их построением.

Сделаем прежде всего несколько замечаний относительно двойных точек кривых 3-го порядка. Возьмем уравнение циркулярной кривой:

$$(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

в прямоуг. Декарт. координатах и преобразуем его к полярным координатам по формулам

$$x=\rho.\cos\theta$$
$$y=\rho.\sin\theta$$

Тогда мы получим:

$$\rho^3(a\cos\theta+b\sin\theta)+\rho^2(A\cos^2\theta+B\sin\theta.\cos\theta+C\sin^2\theta)+\rho(D\cos\theta+E\sin\theta)+F=0.(92)$$

Если $F=0$, то начало координат лежит на кривой. Ур-ие (92) имеет в таком случае один корень $\rho_1=0$ при всяком θ.

Всякая прямая, проходящая через начало координат, встречает кривую в одной точке (в начале же). Две другие точки пересечения будут, вообще говоря, отличны от начала (ρ_2 и ρ_3 не равны 0).

Существует такое значение θ, для которого и $\rho_2=0$. Это значение найдется из условия

$$D.\cos\theta+E.\sin\theta=0, \quad \text{откуда} \quad tg\theta=-\frac{D}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

Значит прямая, проходящая через начало координат по такому направлению, коснется кривой в начале координат. Так как θ определяется из уравнения 1-й степени, то существует, вообще говоря, только одно направление касательной в данной точке кривой. Если $F=O$; $D=O$ и $E=0$, то при всяком θ прямая, проходящая через начало координат, встретит кривую в двух совпадающих с ним точках. В этом случае начало координат называется *двойной точкой* кривой.

Всякая прямая, проходящая через двойную точку кривой 3-го порядка, пересечет кривую, вообще говоря, еще в одной точке, отличной от двойной.

Если проведем через двойную точку прямую по направлению θ, удовлетворяющему условию:

$$A\cos^2\theta+B\sin\theta.\ \cos\theta+C\sin^2\theta=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

то каждая такая прямая будет иметь с кривой три общих точки, совпадающих в начале координат. (Ур-ие 92 примет в этом случае вид $\rho^3=0$ и будет иметь тройной корень, равный 0; $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0$).

Такие прямые называются касательными в двойной точке кривой.

Угол θ определяется из квадратного уравнения (94). Отсюда заключаем, что касательных в двойной точке будет две. Корни последнего уравнения могут быть вещественны и различны. В таком случае в двойной точке существуют две различных вещественных касательных к кривой. Точка наз. в этом случае *узловой*.

Если корни уравнения (94) мнимы, то и касательные будут мнимыми. Вещественной лишь будет точка их пересечения. Двойная точка в этом случае называется *изолированной*.

Наконец корни уравнения могут быть равны между собою, в этом случае обе касательные в двойной точке совпадают в одну, и точка наз. в этом случае точкой *возврата*.

Нетрудно показать, что всякая нераспадающаяся кривая 3 порядка не может иметь более одной двойной точки. Это предложение легко доказать способом от противного. В начале этой главы было указано, что прямая может пересечь кривую 3 порядка не более, чем в трех точках.

Допустив, что некоторая циркулярная кривая имеет две двойных точки M_1 и M_2 и соединив их прямой, мы получили бы, что прямая $M_1 M_2$ имеет с кривой четыре общих точки, что невозможно.

Если данная циркулярная кривая состоит из пересекающихся прямой и окружности, тогда можно каждую из точек пересечения прямой с окружностью считать за двойную точку, ибо прямая, соединяющая эти точки, вся входит в состав циркулярной кривой.

В этом случае можно сказать, что циркулярная кривая имеет две двойных точки.

§ 23. В § 22 мы показали, что условие, чтобы двойная точка кривой была началом координат, выражается тремя уравнениями:

$$D=0;\ E=0;\ F=0.$$

Следовательно, если мы перенесем начало координат в двойную точку, то ур-ие (91) § 22 примет вид:

$$(ax+by)(x^2+y^2)+A_1x^2+B_1xy+C_1y^2=0 \quad \ldots\ldots (95)$$

Если кроме того направим оси так, чтобы ось У была параллельна вещественной ассимптоте кривой, то ее уравнение примет такую форму:

$$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots (96)$$

Для того, чтобы указать легкий способ построения таких кривых, преобразуем уравнение (96) к полярной системе координат по формулам

$$x=\rho\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\theta$$

После этого преобразования получим:

$$\rho^3\cos\theta+\alpha\rho^2\cos^2\theta+\beta\rho^2\sin\theta.\cos\theta+\gamma\rho^2\sin^2\theta=0 \quad \ldots\ldots (97)$$

Сократив ур-ие (97) на ρ^2 (ρ не равно нулю для всех точек кривой), получим

$$\rho=-\left\{\alpha.\cos\theta+\beta\sin\theta+\gamma\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right\}=(\gamma-\alpha).\cos\theta-\beta\sin\theta-\frac{\gamma}{\cos\theta} \quad . \ (98)$$

Обратимся к геометрической интерпретации уравнения (98).

Примем во внимание, что уравнение вещественной ассимптоты нашей кривой по формуле (8) § 2 будет

$$x+\gamma=0.$$

или, в полярной системе координат, $\rho=-\dfrac{\gamma}{\cos\theta}$. (99)

Ур-ие (98) может быть переписано следующим образом:

$$\rho=\left\{-\frac{\gamma}{\cos\theta}\right\}-\left[(\alpha-\gamma)\cos\theta+\beta\sin\theta\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (100)$$

или

$$\rho=OM-ON, \text{ где } OM=\rho_1=-\frac{\gamma}{\cos\theta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (101)$$

$$ON=\rho_2=[(\alpha-\gamma)\cos\theta+\beta\sin\theta] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (102)$$

Очевидно, что $\rho_1=OM$ есть радиус вектор вещественной ассимптоты кривой, а $ON=\rho_2$ есть радиус вектор некоторой окружности, проходящей через двойную точку (начало координат), причем ее диаметр составляет некоторый угол φ с осью OX (полярной осью).

В таком случае уравнение окружности в полярных координатах будет:

$$\rho=2r\cos(\theta-\varphi)=2r\cos\varphi\cos\theta+2r\sin\varphi\sin\theta$$

где r—радиус окружности; в данном случае

$$\begin{aligned} 2r\cos\varphi&=\alpha-\gamma \\ 2r\sin\varphi&=\beta \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (103)$$

Следовательно радиус окружности r из системы (103) определится следующим образом:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (104)$$

Уравнение

$$\rho=\rho_1-\rho_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

показывает, что для любой амплитуды радиус—вектор циркулярной кривой с двойной точкой равен разности между радиусом вектором ее вещественной ассимптоты и радиусом вектором окружности (102)

При построении циркулярных кривых с двойной точкой получаются кривые трех видов в зависимости от того, пересекает ли вещественная ассимптота окружность (102), касается ли ее, или лежит вне этой окружности. В первом случае получается *узловая точка кривой*, во втором—*точка возврата*, в третьем—*изолированная точка*.

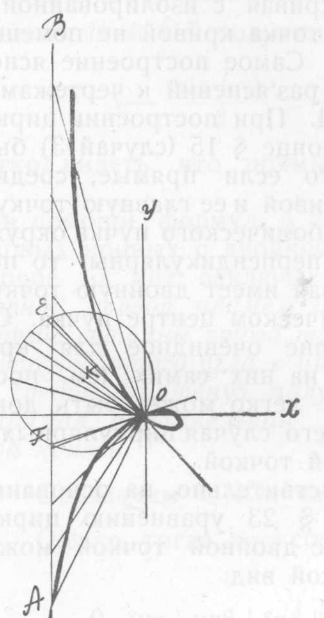
О двойная точка. К—центр окружности (102) OE и OF касательные к кривой в двойной точке. Кривая черт. 18 имеет узловую точку в начале координат.

Для построения искомой кривой надо согласно уравнению (105) из конца радиуса вектора ассимптоты отложить радиус вектор окружности, соответствующий тоже амплитуде или, что одно и то же, отложить от двойной точки разность этих отрезков.

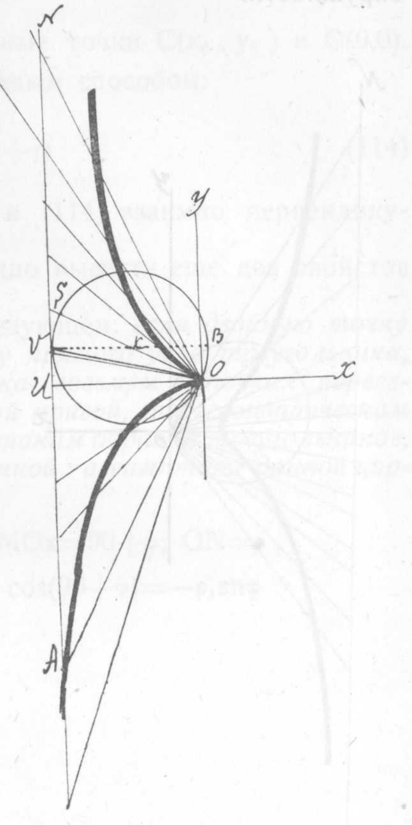
Луч OA, перпендикулярный к диаметру образующей окружности, дает в пересечении с вещественной ассимптотой главную точку кривой. Лучи, соединяющие точку О с точками ниже А (не помещены на чертеже), пересекут окружности по другую сторону от точки О, такие отрезки надо считать отрицательными и прибавлять к радиусу вектору вещественной ассимптоты.

Тогда получатся точки кривой по другую сторону ассимптоты.

Нетрудно сообразить, что лучи, соединяющие двойную точку с точками E и F пересечения вещественной ассимптоты и образующей окружности, будут касательными в двойной точке кривой. Если вещественная ассимптота будет диаметром образующей окружности, то угол EOF будет прямым, и кривая следовательно будет иметь в двойной точке две взаимно перпендикулярные касательные.



Чертеж 18



Чертеж 19

На черт. 19 вещ. ассимптота касается образующей окружности, и построенная кривая имеет точку *возврата*.

Из черт. 19 видно, что ($\alpha-\gamma$, β) суть координаты точки S^1—конца диаметра образующей окружности, проходящей через точку 0. В случае кривой с точкой возврата

$$OU=\gamma=VK+KB=r+r\cos\varphi=2r\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

но так как $2r\cos\varphi=\alpha-\gamma$; $2r\sin\varphi=\beta$, то (106)

$$\gamma=\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2} \quad . \quad . \quad (107)$$

Если φ—0 то из (106)

$$\beta=0\,;\ 2r=\alpha-\gamma$$

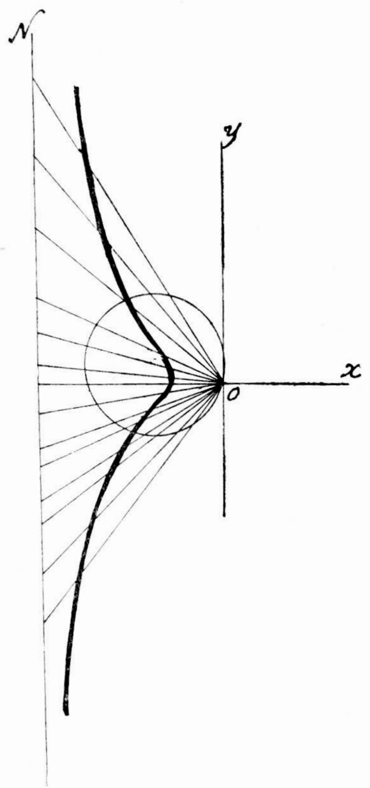
а из (107) $\gamma=\alpha-\gamma$ или $2\gamma=\alpha$ . . . . . . (108)

Подставив выражение α из (108) в уравнение циркулярной кривой, мы получим:

$$(x+2\gamma)(x^2+y^2)-\gamma y^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Это уравнение, как увидим ниже, есть уравнение цирк. кривой называемой *циссоидой Диоклеса.*

На черт. 20 вещественная ассимптота не пересекает образующей окружности.



Чертеж 20

В этом случае получается циркулярная кривая с изолированной точкой. Главная точка кривой не помещается на чертеже. Самое построение ясно на основании раз'яснений к чертежам 19 и 20.

§ 24. При построении циркул. кривой в конце § 15 (случай 3) было указано, что если прямые, соединяющие центр кривой и ее главную точку с центром параболического пучка окружностей, взаимно перпендикулярны, то построенная кривая имеет двойную точку в этом параболическом центре пучка. Свойство это вполне очевидное для кривых с центром на них самих (см. построение на черт.) легко может быть доказано и для общего случая циркулярных кривых с двойной точкой.

Действительно, на основании соображений § 23 уравнению циркулярной кривой с двойной точкой можно придать такой вид:

$$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

если двойную точку возьмем за начало координат, а ось 0У выберем параллельно вещественной ассимптоте кривой.

Остается найти координаты центра кривой и ее главной точки.

Координаты центра на основании общих формул § 2 будут

$$Xc=\frac{a(C-A)-Bb}{2(a^2+b^2)}=\frac{\gamma-\alpha}{2}, \text{ ибо } \begin{matrix} a=1\ \ b=0\,;\ C=\gamma\,;\ A=\alpha \\ B=\beta \end{matrix} \quad . \quad . \quad (111)$$

$$Уc=\frac{-b\,(C-A)-a\,B}{2\,(a^2+b^2)}=-\frac{\beta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Координаты главной точки мы также могли бы найти по общим формулам § 5, но в данном случае проще получить их как координаты точки пересечения кривой (110) с вещественной ассимптотой, уравнение которой также найдено в § 23.

$$x+\gamma=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

Решив совместно уравнения (110) и (111), мы и получим искомые координаты главной точки кривой А.

$$x=-\gamma$$

$$y=\frac{\gamma(\alpha-\gamma)}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Ур-ие прямой OC будет:

$$y+\frac{\beta}{2}=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}\left(x-\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (113)$$

как ур-ие прямой, соединяющей две данные точки $C(x_c, y_c)$ и $O(0,0)$.

Ур-ие прямой OA получим аналогичным способом:

$$y-\frac{\gamma(\alpha-\gamma)}{\beta}=-\frac{\alpha-\gamma}{\beta}(x+\gamma) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (114)$$

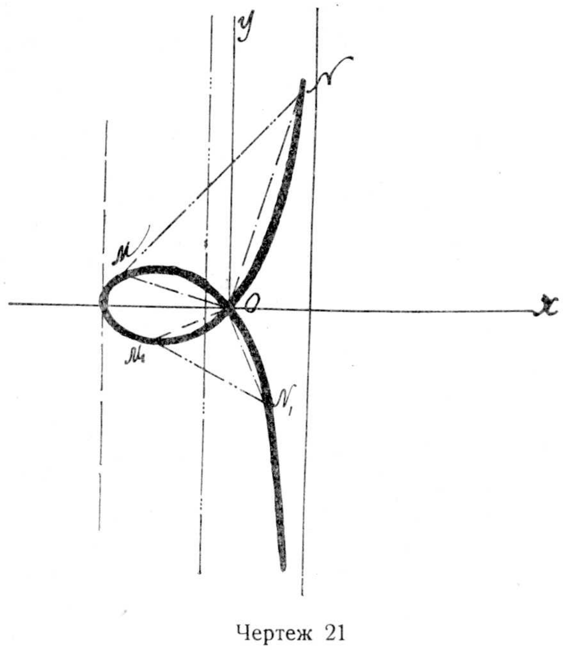
Легко видеть, что прямые (113) и (114) взаимно перпендикулярны.

При помощи формул § 23 не трудно вывести еще два свойства циркулярных кривых с двойной точкой.

Первое из них заключается в следующем: *если двойную точку циркулярной кривой примем за вершину прямого угла треугольника, а две другие вершины этого треугольника возьмем в точках пересечения сторон этого угла с циркулярной кривой, то геометрическим местом средин гипотенуз, получаемых таким образом треугольников, будет прямая, параллельная вещественной ассимптоте данной циркулярной кривой.*

Обозначим $\angle NOx$ через φ; $\angle MOx=90+\varphi$; $ON=\rho$

$OM=\rho_1$ тогда $x=\rho.\cos\varphi$; $x_1=\rho_1 \cos(90+\varphi)=-\rho_1 \operatorname{sn}\varphi$



Чертеж 21

Полярное уравнение циркулярной кривой с двойной точкой на основании соображений § 23 будет:

$$\rho=(\gamma-\alpha)\cos\varphi-\beta\operatorname{sn}\varphi-\frac{\gamma}{\cos\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (115)$$

или

$$\rho\cos\varphi=(\gamma-\alpha).\ \cos^2\varphi-\beta\,\mathrm{sn}\varphi\ \cos\varphi-\gamma \ \ldots\ldots \qquad (116)$$

Подставив в уравнение (116) выражения $\rho\cos\varphi$ из 114а, находим

$$x=(\gamma-\alpha)\cos^2\varphi-\beta\,\mathrm{sn}\varphi\ \cos\varphi-\gamma \ \ldots\ldots \qquad (117)$$

или

$$x=-\alpha\cos^2\varphi-\beta\,\mathrm{sn}\varphi\ \cos\varphi-\gamma\,\mathrm{sn}^2\varphi \ \ldots\ldots \qquad (118)$$

из 114а имеем $x_1=-\rho_1\,\mathrm{sn}\varphi$, но из ур-ия кривой (115)

$$\rho_1=-(\gamma-\alpha)\,\mathrm{sn}\varphi-\beta\cos\varphi+\frac{\gamma}{\mathrm{sn}\varphi}$$

и следовательно

$$x_1=(\gamma-\alpha)\mathrm{sn}^2\varphi+\beta\,\mathrm{sn}\varphi\ \cos\varphi-\gamma=-\alpha\,\mathrm{sn}^2\varphi+\beta\,\mathrm{sn}\varphi\cos\varphi-\gamma\cos^2\varphi \ . \qquad (119)$$

Сложив почленно (118) и (119), получим:

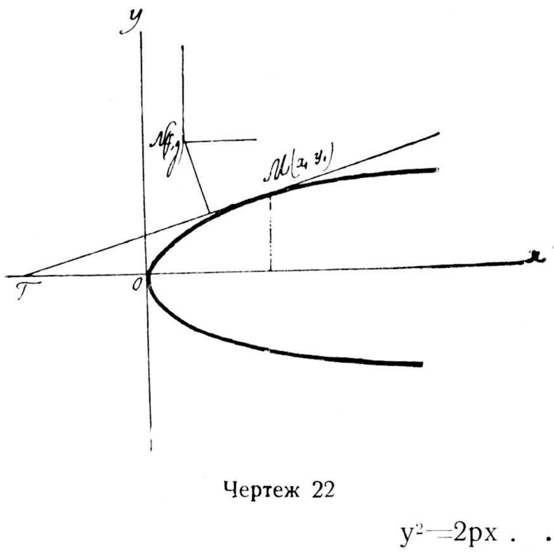
$$x_1+x=-(\alpha+\gamma)=constans.\ \ldots\ldots \qquad (120)$$

т. е. абсцисса средины гипотенузы таких треугольников

$$\left\{\frac{x+x_1}{2}=-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right\}$$

не зависит от угла φ, чем и доказывается требуемое предложение.

Второе общее свойство всех циркулярных кривых с двойной точкой заключается в том, что все они суть *подеры* параболы для некоторого полюса, причем полюс совпадает с двойной точкой кривой. Зависимость вида кривой от выбора полюса подэры будет отмечена во 2 главе. Сейчас покажем только, как можно доказать это общее предложение при помощи тех же формул § 23, какими мы только что пользовались.



Чертеж 22

Возьмем параболу (черт. 22)

$$y^2=2px\ \ldots\ldots \qquad (121)$$

Ур-ие касательной к этой параболе в точке $M(x_1y_1)$ будет:

$$yy_1=p(x+x_1) \ \ldots\ldots \qquad (122)$$

Нормаль к этой касательной, проходящая через полюс $N(f,g)$, будет иметь своим уравнением:

$$y-g=-\frac{y_1}{p}(x-f) \ \ldots\ldots \qquad (123)$$

Так как точка x_1y_1 лежит на параболе, то

$$y_1^2=2px_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

Для получения уравнения подеры данной параболы относительно полюса $N(f,g)$ надо исключить x_1 и y_1 из уравнений (122), (123), (124).

Из (125) находим:

$$y_1=-\frac{p(y-g)}{x-f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

Подставив это выражение y_1 в (124), найдем:

$$x_1=\frac{p(y-g)^2}{y(x-f)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (126)$$

Подставив же найденные x_1 и y_1 из (126) и (125) в (122), получим после некоторых упрощений:

$$-2y\,(y-g)\,(x-f)=2x\,(x-f)^2+p\,(y-g)^2 \quad \ldots\ldots \quad (127)$$

Сохраняя прежнее направление осей, перенесем начало координат в точку $N\,(f,g)$ по формулам:

$$x=x^1+f$$

$$y=y^1+g$$

тогда уравнение (127) примет такой вид:

$$-2(y^1+g)x^1y^1=2(x^1+f)x^{12}+py^{12} \quad \ldots\ldots \quad (128)$$

Преобразуем уравнение (128) к полярным координатам по формулам

$$x^1=\rho\cos\varphi$$

$$y^1=\rho\,\mathrm{sn}\varphi$$

Тогда ур-ие (128) получит такую формулу:

$$\rho=-g\,\mathrm{sn}\varphi-f\cos\varphi-\frac{p}{2}\frac{\mathrm{sn}^2\varphi}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (129)$$

Сравнив ур-ие (129) с уравнением (98) § 23, мы приходим к заключению, что уравнение (129) выражает циркулярную кривую с двойной точкой в начале координат. В этом случае $\alpha=f\ \beta=g\,;\gamma=\frac{p}{2}$.

Теорема таким образом доказана.

Справедливо и обратное предложение: Если циркулярная кривая 3-го порядка имеет двойную точку, то ее отрицательная первая подера по отношению к последней (двойной точке) есть парабола.

(Roberts, Journal de Liouville X и Hirst, Quarterly Journal II). К этому вопросу мы вернемся в главе об инверсионных преобразованиях.

§ 25. Покажем еще одно общее свойство циркулярных кривых в заключение I-й главы.

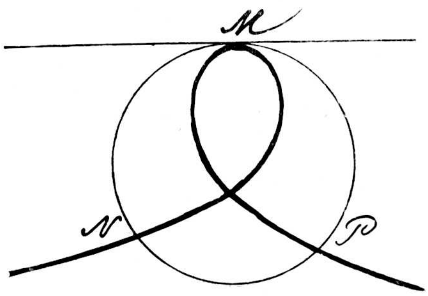
Всякая циркулярная кривая есть огибающая системы окружностей, имеющих с ней двойное касание, причем центры этих окружностей находятся на некоторой параболе.

Эта теорема является второй основной теоремой циркулярных кривых. Из нее, как и из теоремы Eckhardt'a, может быть получен целый ряд важных свойств циркулярных кривых. Это предложение должно быть названо теоремой *Casey*, ибо *Casey* пришел к нему впервые в 1867 году, рассматривая свойства бициркулярных кривых 4-го порядка. [On Bicircular Quartics, Transactions of. the Roy. I r. Academy, Vol 24].

Докажем это предложение аналитическим путем, следуя изложению H. Texeira в его труде: Traite' des courbes spéciales remarquables, Coïmbra 1908, § 76, page 64.

Texeira воспользовался методом, предложенным G. Darboux, при помощи которого знаменитый геометр трактует вопрос „Sur les sphères doublement tangentes" в своем труде „Sur une classe remarquable de courbes et de Surfaces algébriques". Paris 1894, pages 113—117.

В настоящем § сделаны некоторые упрощения в зависимости от выбора системы координат. К геометрическим соображениям Casey мы вернемся в конце главы 2-й.



Чертеж 23

Сделаем одно предварительное замечание относительно двойного касания кривых. Окружность с циркулярной кривой 3-го порядка пересекается вообще в 4 точках кроме, конечно, круговых точек на ∞.

Если две из точек пересечения совпадают, то соединяющая их хорда обращается в общую касательную. Две другие точки N и P (черт. 23) вообще не совпадают. Если же N и P, не совпадая с точкой M, совпадут друг с другом, то окружность и кривая будут касаться друг друга в двух точках или будут, как говорят, иметь двойное касание или соприкосновение.

Итак, возьмем окружность:

$$x^2+y^2=2(\alpha x+\beta y+\gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

и циркулярную кривую, отнесенную к осям с началом координат в ее центре и осью ОУ, параллельной ее вещественной ассимптоте.

(Форма ур-ия гл. I § 5)

$$x(x^2+y^2)+Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

и найдем условия их двойного соприкосновения.

Нетрудно видеть, что точки пересечения окружности (130) и циркулярной кривой (131) совпадают с точками пересечения той же окружности с кривой 2-го порядка:

$$2x(\alpha x+\beta y+\gamma)+Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

ибо системы уравнений (130) и (131) и (130) и (132)—эквивалентны.

Таким образом, условие двойного соприкосновения кривых (130) и (131) можно заменить условием двойного соприкосновения кривых (130) и (132).

Возьмем уравнение:

$$2x(\alpha x+\beta y+\gamma)+Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F+k(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma)=0 \; (133)$$

Ур-ие (133), как нетрудно видеть, представляет пучек кривых 2-го порядка, проходящих через точки пересечения кривых (130) и (132).

Для того, чтобы последние кривые имели двойное соприкосновение, надо, чтобы кривая (133) превратилась в пару совпадающих прямых.

Выразим аналитически последнее условие. Ур-ие (133) после группировки членов его получает такой вид:

$$(2\alpha+A+k)x^2+2\beta xy+(A+k)y^2+(2\gamma+D-2\alpha k)x+(E-2\beta k)y+F-2k\gamma=0 \quad (134)$$

Для того, чтобы уравнение (134) выражало две совпадающие прямые, как известно из элементов Аналитической геометрии необходимы и достаточны следующие три условия:

$$1)\ \beta^2-(A+k)(2\alpha+A+k)=0 \qquad (B^2-4AC=0) \quad . \ (135)$$

$$2)\ \beta(E-2\beta k)-(A+k)(2\gamma+D-2\alpha k)=0 \qquad (BE-2CD=0) \quad . \ (136)$$

$$3)\ (E-2\beta k)^2-4(A+k)(F-2k\gamma)=0 \qquad (E^2-4CF=0) \quad . \ (137)$$

Из (135) находим выражение α:

$$\alpha=-\frac{1}{2}\left\{A+k\right\}+\frac{\beta^2}{2(A+k)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (138)$$

Из (137) определяем γ:

$$\gamma=\frac{1}{2k}\left[F-\frac{(E-2\beta k)^2}{4(A+k)}\right], \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (139)$$

а подставив найденные выражения α и γ в ур-ие (136), придадим последнему такой вид, после некоторых упрощений:

$$(A+k).^2k^2+(A+k).F+kD(A+k)-\frac{E^2}{4}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (140)$$

Ур-ие (140) дает, вообще говоря, четыре значения для k, а уравнения (139) и (138) дают соответственные значения α и γ, при которых окружность (130) будет иметь двойное соприкосновение с циркулярной кривой (131).

Что касается параметра β, входящего в эти уравнения, то он остается неопределенным.

Сказанное позволяет заключить, что, вообще говоря, существуют четыре серии окружностей, имеющих двойное соприкосновение с рассматриваемой циркулярной кривой.

Так как эти окружности и циркулярная кривая имеют в общих точках общие касательные, то рассматриваемая циркулярная кривая есть огибающая каждой системы окружностей.

Заметив, что α и β выражают координаты центра окружностей, заданных уравнением (130) и приняв во внимание уравнение (138), связывающее α и β, мы можем сказать, что центры окружностей каждой серии лежат на одной и той же параболе, ибо уравнение (138) и есть уравнение этой кривой.

Подставив в уравнение окружности (130) вместо γ его выражение из (139), найдем уравнение окружностей, имеющих двойное касание с рассматриваемой циркулярной кривой в такой форме:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2.\ \beta y-\frac{1}{k}\left[F-\frac{(E-2\beta k)^2}{4(A+k)}\right]=0 \quad . \ . \ . \ . \ (141)$$

После несложных преобразований, имеем в виду, что из уравнения (135)

$$\frac{\beta^2}{A+k}=(2\alpha+A+k)$$

мы можем переписать уравнение (141) в такой форме:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{F}{k}-\frac{E\beta}{A+k}+\frac{E^2}{4k(A+k)}+\kappa(2\alpha+A+k)=0 \quad . \ (142)$$

Здесь α и β должны удовлетворять уравнению (138), а k должно быть одним из корней уравнения (140).

Если мы в уравнении (142) заменим α и β через x и y, то оно примет следующий вид:

$$x^2+y^2+\frac{F}{k}+\frac{Ey}{A+k}-\frac{E^2}{4k(A+\kappa)}-2kx-k(A+k)=0 \quad . \ . \ (143)$$

Далее, уравнение (143) может быть преобразовано в следующей форме:

$$(x-k)^2+\left\{y+\frac{E}{2(A+\kappa)}\right\}^2=\kappa^2+\frac{E^2}{4(A+\kappa)^2}+\frac{E^2}{4\kappa(A+\kappa)}-\frac{F}{\kappa}+\kappa(A+\kappa) \quad (144)$$

Третий и четвертый члены 2-й части уравнения (144) преобразуем при помощи формул (135), (136) и (137).

Если мы подставим в уравнение (136) выражения α и γ из (138) и (139), то мы получим:

$$\beta(E-2\beta k)-(A+\kappa)\left[\frac{F}{k}-\frac{(E-2\beta k)^2}{4k(A+\kappa)}\right]-(A+\kappa)D-k(A+\kappa)^2+\kappa\beta^2=0 \quad (145)$$

Из последнего уравнения находим:

$$\frac{(E-2\beta\kappa)^2}{4k(A+k)}-\frac{F}{k}=D+k(A+k)+\frac{\beta^2k-\beta E.}{A+\kappa} \quad , \ . \ . \ . \ . \ . \ (146)$$

или

$$\frac{E^2}{4k(A+k)}-\frac{F}{k}=D+Ak+k^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (147)$$

Подставив полученное в левой части ур-ия (147) выражение в уравнение (144), найдем:

$$(x-k)^2+\left\{y+\frac{E}{2(A+\kappa)}\right\}^2=3k^2+2Ak+\frac{E^2}{4(A+\kappa)^2}+D \quad . \ (148)$$

Уравнение (148) представляет окружность, постоянную для всех двояко касательных окружностей одной из 4-х серий (при данном значении k).

Эта окружность называется *направляющей окружностью* (*cercle directeur*) двояко касательных окружностей данной серии.

Нетрудно показать, что все окружности, соответствующие одному и тому же отличному от 0 и от —A корню уравнения (140), пересекают ортогонально соответствующую им направляющую окружность.

Действительно, координаты центра и радиус какой-нибудь из окружностей, имеющих двойное касание с циркулярной кривой, на основании уравнения (141) будут иметь следующие выражения:

$$\alpha, \ \beta, \ r^2=\alpha^2+\beta^2+\frac{F}{k}-\frac{(E-2\beta k)^2}{4k(A+\kappa)}$$

Точно также из уравнения (143) можем написать координаты центра и квадрат радиуса r_1 направляющей окружности:

$$k\,, -\frac{E}{2(A+k)}\,;\; r_1^2 = k^2 + \frac{E^2}{4(A+k)^2} + \frac{E^2}{4k(A+k)} - \frac{F}{k} + k(A+k)$$

Условие ортогональности двух окружностей будет:

$r^2+r_1^2=d^2$, где d расстояние центров данных окружностей, а r и r_1 их радиусы.

В нашем случае

$$d^2=(\alpha-k)^2+\left\{\beta+\frac{E}{2(A+k)}\right\}^2=\alpha^2+\beta^2-2ak+k^2+\frac{\beta E}{A+k}+\frac{E^2}{4(A+k)^2}$$

Подставив выражения d^2 r^2 и r^2 в уравнение:

$$r_1^2+r^2=d^2$$

мы найдем:

$$\alpha^2+\beta^2+\frac{F}{k}-\frac{E^2}{4k(A+k)}+\frac{\beta E}{A+k}-\frac{\beta^2 k}{A+k}+k^2+\frac{E^2}{4(A+k)^2}+\frac{E^2}{4k(A+k)}$$

$$-\frac{F}{k}+k(A+k)=\alpha^2+\beta^2-2\alpha k+k^2+\frac{\beta E}{A+k}+\frac{E^2}{4(A+k)^2}\quad .\ .\ (149)$$

По приведении подобных членов уравнение (149) принимает вид:

$$-\frac{\beta^2 k}{A+k}+k(A+k)=-2ak\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (150)$$

по сокращении на k $(k\neq o)$ мы приведем ур-ие (150) к форме:

$$\beta^2-(A+k)(2\alpha+A+k)=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (151)$$

Но ур-ие (151) есть ни что иное, как полученное раньше уравнение (135). Таким образом, условие ортогональности окружностей можно считать доказанным.

§ 26. Рассмотрим некоторые частные случаи изложенной теоремы.

Если один из корней уравнения (140) будет равен 0, что возможно при условии:

$$E^2-4AF=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (152)$$

то уравнения (135), (136) и (137) получают такую форму:

$$\beta^2-A(2\alpha+A)=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (153)$$

$$\beta E-A(2\gamma+D)=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (154)$$

$$E^2-4AF=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (155)$$

Из последних уравнений мы находим:

$$\alpha=-\frac{A}{2}+\frac{\beta^2}{2A}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (156)$$

$$\gamma=\frac{\beta E-AD}{2A}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (157)$$

Ур-ие направляющей окружности, соответствующей значению $k=o$, очевидно будет:

$$x^2+\left\{y+\frac{E}{2A}\right\}^2=D+\frac{E^2}{4A^2}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (158)$$

Если один из корней ур-ия (140) будет $-A$, т. е. если $A+k=0$, то предыдущие рассуждения должны быть изменены. Ур-ие (135) дает в этом случае $\beta=0$, что указывает на то обстоятельство, что центры двояко касательных окружностей, соответствующих взятому значению k, находятся на оси абсцисс. Уравнения же (136) и (137) обращаются в тождества и не дают возможности определить соответствующее значение γ.

Для разрешения вопроса в этом частном случае поступают следующим образом. Заметим прежде всего, что из уравнения (140) при условии $A+k=0$ мы найдем, что $E=0$. Обратимся к уравнению (134), но при $E=0$ $A+k=0$ и $\beta=0$ оно получает такой вид:

$$2\alpha x^2+(2\gamma+D-2\alpha k)x+F-2k\gamma=0 \quad \ldots\ldots \quad (159)$$

Так как уравнение (159) в случае двойного соприкосновения циркулярной кривой с окружностью должно представлять пару совпадающих прямых, то следовательно мы имеем условие:

$$(2\gamma+D-2ak)^2-4.2\alpha(F-2k\gamma)=0 \quad \ldots\ldots \quad (160)$$

Уравнение (160) и дает нам значение параметра γ, соответствующее серии двояко касательных окружностей для $k=-A$.

В случае $k=o$ уравнение (142), дающее уравнения двояко касательных окружностей, принимает неопределенный вид.

Уравнение таких окружностей можно найти, однако, непосредственно из уравнения (130)

$$x^2+y^2=2\alpha x+2\beta y+2\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (161)$$

подставив в него вместо γ его выражение из уравнения (157), тогда уравнение (161) принимает такую форму:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=\frac{\beta E-AD}{A} \quad \ldots\ldots \quad (162)$$

Аналогичным путем находится и уравнение двояко касательных окружностей в случае $k=-A$.

Если рассматриваемая циркулярная кривая имеет двойную точку, то в таком случае одна из четырех серий двояко касательных окружностей сводится к окружностям просто касательным к кривой в двойной точке, так как каждая из таких окружностей может быть рассматриваема, как встречающая кривую в двух парах совпадающих точек.

§ 27. Возьмем пример для иллюстрации изложенного.

Рассмотрим циркулярную кривую

$$(x+2)(x^2+y^2)+x+6y+1=0$$

Составим прежде всего уравнение для определения параметра k. Оно будет иметь такой вид:

$$(2+k)^2k^2-(2+k)+k(2+k)-9=0$$

или

$$k^4+4k^3+5k^2+k-11=0.$$

Один из его корней $k_1=1$.

Напишем уравнение серии двояко касательных окружностей, соответствующих $\kappa_1=1$:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+1-2\beta+3+2\alpha+3=0$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-7+2\beta-2\alpha$$

Уравнение (135) в этом случае будет:

$$\alpha=-\frac{3}{2}+\frac{\beta^2}{6} \text{ или } \alpha=\frac{\beta^2-9}{6}$$

Подставив это выражение α в предыдущее уравнение, найдем

$$\left\{x-\frac{\beta^2-9}{6}\right\}^2+(y-\beta)^2=\frac{\beta^4+6\beta^2+72\beta-63}{36}$$

Давая различные значения параметру β, получим сколько угодно двояко касательных окружностей.

Найдем уравнение направляющей окружности, соответствующей корню $k_1=1$. Это уравнение будет:

$$x^2+y^2-2x+2y-7=0 \text{ или}$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=3^2.$$

Уравнение двояко касательных окружностей:

$$\text{при } \beta=0: \left\{x-\frac{3}{2}\right\}^2+y^2=-\frac{63}{36} \text{ (мнимая)}$$

$$\text{при } \beta=2 \left\{x+\frac{5}{6}\right\}+(y-2)^2=\frac{121}{36}=\left\{\frac{11}{6}\right\}^2; \; R=1\tfrac{5}{6}$$

$$\text{при } \beta=3 \; x^2+(y-3)^2=\frac{288}{36}=\left\{\frac{17}{6}\right\}^2; \; R=2\tfrac{5}{6}$$

$$\text{при } \beta=-5: \left\{x-\frac{8}{3}\right\}^2+(y+5)^2=\frac{352}{36}=(3{,}13)^2; \; R=3{,}13^{1)}.$$

Построение кривой:

при $x=o$ $2y^2+6y-1=0$; $y=-\dfrac{3\pm\sqrt{11}}{2}$; $y_1=0{,}15$; $y_2=-3{,}15$

при $x=-1$ $y=-3\pm\sqrt{10}$ $y_1=0{,}2$; $y_2=-6{,}2$

при $x=+1$ $(y+1)^2=0$ $y_1=y_2=-1$.

Уравнение вещественной ассимптоты будет: $x+2=0$.

Координаты главной точки кривой A; $x=-2$; $y=\dfrac{1}{2}$

Кривая, начерченная на чертеже (24), есть огибающая серии окружностей, начерченных сплошными линиями.

Центры этих окружностей лежат на параболе, начерченной пунктирной линией. Направляющая окружность начерчена пунктиром с тире.

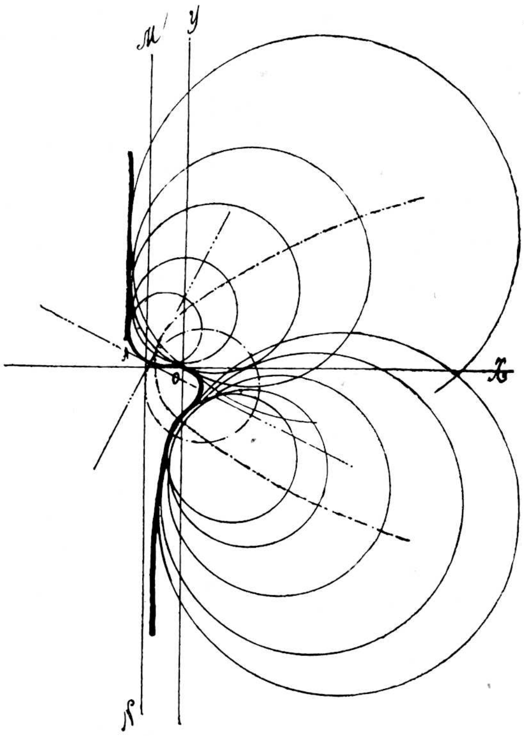
Окружности, начерченные сплошной линией, ортогональны к направляющей. Пунктиром с двумя точками начерчены две касательные к двум окружностям.

Эти касательные взаимно перпендикулярны.

1) Значения R вычислены приближенно.

Окружности, центры которых расположены на части параболы в третьем из координатных углов,—мнимы как показывает вычисление. Кривая не проходит через начало координат, ибо при $x=o$ $y_1=+0,16$; $y_2=-3,16$.

§ 28. Теорема, указанная в начале § 25, есть, как уже было замечено, вторая основная теорема общей теории циркулярных кривых.



Чертеж 24

Из нее можно получить, между прочим, аналитический признак существования двойной точки у циркулярной кривой.

Это нетрудно сделать на основании соображений §§ 26 и 27.

Перенесем начало координат в центр одной из направляющих окружностей, оставляя оси параллельными прежним. Формулы преобразования в силу уравнения § 25 будут

$$x=x^1+k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

$$y=y^1-\frac{E}{2(A+k)}$$

Уравнение (131) § 25 после преобразования по формулам (163) получит вид:

$$(x^1+k)\left[x^{12}+2kx^1+k^2+y^{12}-\frac{Ey^1}{A+k}+\frac{E^2}{4(A+k)^2}\right]+A(x^{12}+2kx^1+k^2)+$$

$$+A\left\{y^{12}-\frac{Ey^1}{A+k}+\frac{E^2}{4(A+k)^2}\right\}+Dx^1+Dk+Ey^1-\frac{E^2}{2(A+k)}+F=0. \quad (164)$$

Исключив из (164) F при помощи уравнения (147) § 25, мы получим:

$$(x'+k)(x'^2+y'^2)+2kx'^2+2k^2x'+k^3-\frac{Ex'y'}{A+k}+\frac{Eky'}{A+k}+\frac{E^2x'}{4(A+k)^2}+\frac{E^2k}{4(A+k)^2}+$$

$$Ax'^2+2Akx'+Ak^2+Ay'^2-\frac{AEy'}{A+k}+\frac{AE^2}{4(A+k)^2}+Dx'+Dk+E'y'$$

$$\frac{E^2}{2(A+k)}+\frac{E^2}{4(A+k)}-Dk-Ak^2-k^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (165)$$

или

$$x'(x'^2+y'^2)+(A+3k)x'^2-\frac{Ex'y'}{A+k}+(A+k)\,y'^2+x'\left[3k^2+2Ak+D+\right.$$

$$\left.\frac{E^2}{4(A+k)^2}\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

Члены, подчеркнутые ~~~~~~, равны в сумме 0.

Ур-ию (166) при помощи формулы (148) § 25 может быть придан следующий вид:

$$x'(x'^2+y'^2)+(A+3k)x'^2+(A+k)y'^2-\frac{E}{A+k}x'y'+r.^2x'=0\,, \quad . \quad . \quad (167)$$

где r — радиус направляющей окружности.

Выражение, стоящее в квадратных скобках левой части уравнения (166), есть ничто иное, как квадрат радиуса направляющей окружности.

Таким образом, уравнение (166) после всех преобразований примет вид уравнения (110) § 24, т. е.

$$x'(x'^2+y'^2)+Mx'^2+Nx'y'+Py'^2=0\,, \text{ если } r=0.$$

Отсюда приходим к заключению, что если радиус направляющей окружности равен 0, то циркулярная кривая имеет двойную точку, совпадающую с центром этой направляющей окружности.

Таким образом, если для какого-нибудь значения k, определяемого уравнением (140) § 25:

$$3k^2+2Ak+D+\frac{E^2}{4(A+k)^2}=0$$

то координаты этой двойной точки кривой находятся по формулам

$$x=k$$

$$y=\frac{E}{2(A+k)}$$

§ 29. Уравнение (134) пучка кривых 2-го порядка, проходящих через точки пересечения циркулярной кривой с окружностью (1) § 25, может быть представлено следующим образом:

$$(A+k)^2y^2+(E-2\beta k+2\beta x).(A+k).y+(A+k)\,[(2\alpha+A+k)x^2+(2\gamma+D-2\alpha k)$$

$$x+F-2k\gamma]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168)$$

или

$$\left[(A+k)y+\frac{E-2\beta k+2\beta x}{2}\right]^2=\frac{(E-2\beta k+2\beta x)^2}{4}-(A+k)\,[(2\alpha+A+k)$$

$$x^2+(2\gamma+D-2\alpha k)x+F-2k\gamma] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169)$$

Разрешив уравнение (169) относительно y, мы получим:

$$(A+\kappa)y=-\beta(x-\kappa)-\frac{E}{2}\pm\sqrt{\frac{(E-2\beta\kappa+2\beta x)^2}{4}-(A+\kappa)[2\alpha+A+\kappa)x^2+(2\gamma+D-2\alpha\kappa)\mathbf{x}+\mathbf{F}-2\kappa\gamma} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (170)$$

Прямая $(A+\kappa)\mathbf{y}=-\beta(x-\kappa)-\frac{E}{2}$ . . . . (171)

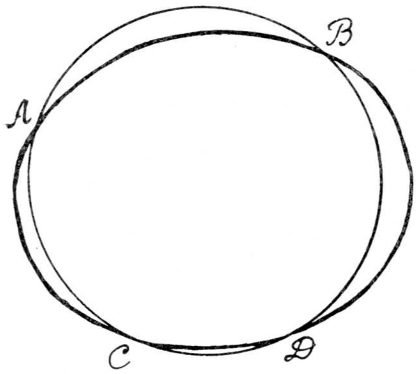
проходит через точки касания циркулярной кривой с двояко касательной окружностью, соответствующей тому же значению k и β.

Эта прямая называется *хордой соприкосновения или касания.*

Уравнение (171) показывает, что хорда касания проходит также и через точку $\kappa, -\frac{E}{(2A+\kappa)}$, т. е. через центр направляющей окружности.

Отсюда имеем предложение: *все хорды касания, которые принадлежат одной и той же серии двояко касательных к данной циркулярной кривой окружностей, пересекаются в центре соответствующей этой серии направляющей окружности.*

§ 30. Окружность с кривой 2 порядка, а также и с циркулярной кривой вообще пересекается в 4 точках A, B, C, *D*. Если A и B совпадают, то окружность называется касательной к кривой в точке A.



Чертеж 25

Если и третья точка пересечения C совпадает с A и B, то говорят, что окружность и кривая имеют в точке A касание 2-го порядка. Если все четыре точки совпадают в точке A, то говорят, что окружность в точке A имеет с кривой касание 3-го порядка.

Покажем теперь, что в точках пересечения направляющей окружности с циркулярной кривой, огибаемые циркулярной кривой двояко касательные окружности имеют с циркулярной кривой касание 3-го порядка.

Действительно, для того, чтобы четыре общих точки двояко касательной окружности и кривой совпали, надо, чтобы хорда соприкосновения обратилась в общую касательную к окружности и циркулярной кривой в одной и той же точке. Эта же точка должна лежать на окружности, направляющего круга, ввиду того, что последний должен оригинально пересекать каждую из двояко касательных окружностей серии.

Центр же направляющей окружности должен лежать на этой касательной в силу той же ортогональности. Таким образом точка, в которой совмещаются четыре общих точки двояко касательной окружности и циркулярной кривой, должна лежать на окружности направляющего круга.

Последние строки предыдущей теоремы (центр направляющей окружности...) позволяют непосредственно высказать следующее предложение:

Всякая, направляющая окружность проходит через точки касания касательных к циркулярной кривой, проведенных из центра этой окружности.

Если $E=O$, то циркулярная кривая симметрична относительно оси OX. Если эту ось симметрии примем за направляющую окружность бесконечно большого радиуса (с центром на ∞), то теорема будет справедлива и для этого частого случая.

§ 31. Уравнение циркулярной кривой

$$(x+A)(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0 \tag{171a}$$

можно написать в форме:

$$(x+A)^2y^2 = +(x+A)^2x^2-(x+A)(Dx+Ey+F) \tag{172}$$

или

$$(x+A)^2y^2+E(x+A)y+\frac{E^2}{4}=\frac{E^2}{4}+E(x+A)y-(x+A).(x^3+Ax^2+ +Dx+Ey+F) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{173}$$

Уравнение же (173) после несложных преобразований принимает вид:

$$\left[(x+A)y+\frac{E}{2}\right]^2=\frac{E^2}{4}-(x+A)\left[x^3+Ax^2+Dx+F\right] \tag{174}$$

Извлекши квадратный корень из обеих частей равенства, (174) мы получим:

$$(x+A)y=-\frac{E}{2}\pm\sqrt{\frac{E^2}{4}-(x+A)\left[x^3+Ax^2+Dx+F\right]} \tag{175}$$

Уравнение:

$$(x+A)y=-\frac{E}{2} \tag{176}$$

представляет *гиперболу*, проходящую через средины хорд циркулярной кривой (171-а), параллельных их общей ассимптоте. (вещественная ассимптота цир. кривой 171а совпадает с одной из ассимптот гиперболы (176).

При помощи гиперболы (176) можно найти некоторые свойства циркулярных кривых. Таким методом пользовался уже Bjerkness в своем мемуаре „Sur une classe de courbes de 3 degrée“, rapportèes á lignes droites, qui dependent de paramétres donnés“, помещенном в Journal de Crelle за 1858 г. TLV, Работа *Bjerkness* является первой работой о циркулярных кривых 3-го порядка.

Настоящий § изложен по *Texeira*, которому принадлежат некоторые теоремы о свойствах этой гиперболы, помещенные в *Annali de Matematica (TXI Sertie 3), а также в его Traitè de courbes speciales*, стр. 69, *TI.*

Координаты точек пересечения гиперболы (176) *с циркулярной кривой* (171а) даются уравнениями:

$$y(x+A)=-\frac{E}{2} \quad \text{и} \tag{177}$$

$$(x+A)(x^3+Ax^2+Dx+F)-\frac{E^2}{4}=0, \tag{178}$$

ибо значения x и y, удовлетворяющие системе уравнений (177) и (178) удовлетворяют также системе (175) и (176).

Исключив k из уравнения (140) § 25

$$(A+k)^2 . k^2 + (A+k)F + kD(A+k) - \frac{E^2}{4} = 0,$$

и уравнений, определяющих координаты центра направляющей окружности:

$$x = k$$

$$y = \frac{E}{2(A+k)}$$

мы получим, как нетрудно видеть, в результате систему (175) и (176). Следовательно: *центры направляющих окружностей совпадают с точками пересечения циркулярной кривой с гиперболой, проходящей через средины хорд кривой, параллельных ее вещественной ассимптоте.*

Из свойств гиперболы (176) проходить через средины хорд циркулярной кривой параллельных вещественной ее ассимптоте непосредственно вытекает, что эта гипербола проходит через вершины циркулярной кривой (точки, в которых касательные к кривой параллельны вещественной ассимптоте ее) и что она проходит через двойную точку циркулярной кривой, если только таковая имеется у кривой.

Далее, гипербола (176) вообще пересекается с циркулярной кривой в четырех точках. Если цир. кривая имеет двойную точку, то в ней совпадают две из точек пересечения, а если двойная точка будет точкой возврата, то в ней совпадают три точки перечисления. (гипербола и циркулярная кривая касаются в точке возврата).

В общем случае центры направляющих окружностей все различны, во втором или третьем случаях два или три из них совпадают в двойной точке, которая служит тогда центром двух или трех направляющих окружностей нулевого радиуса (§ 28).

§ 32. Теорема § 8 также может быть применена к двояко касательным окружностям. В этом случае получится такое предложение: *касательные к циркулярной кривой в точках касания двояко касательных окружностей пересекают кривую в двух точках, лежащих на прямой, параллельной вещественной ассимптоте ее.*

Для доказательства этого предложения достаточно (см. черт. 1, § 8-го) только совместить между собою точки C и D, равно, как и точки A и B. В таком случае и получится окружность, имеющая двойное касание с данной циркулярной кривой. CE и AF будут общими касательными к последней окружности и циркулярной кривой, а точки E и F пересечения этих касательных с циркулярной кривой будут лежать на прямой, параллельной вещественной ассимптоте кривой, чем и доказывается теорема.

§ 33. Отметим теперь некоторые свойства циркулярных кривых, связанные с характером корней уравнения (140) § 25. Корни этого уравнения 4 степени относительно k связаны с коэффициентами кривой. Геометрическое значение каждого корня — абсцисса центра направляющей окружности, соответствующей серии двояко касательных к данной циркулярной кривой окружностей. Значения k зависят, таким образом, от выбора координатных осей.

Можно выбрать эти оси так, чтобы один (или несколько в случае кратности их) из корней уравнения (140) обратился в нуль.

Мы знаем, что если кривая имеет двойную точку, то радиус направляющей окружности обращается в нуль, а сама окружность совпадает со своим центром—двойной точкой.

Определив абсциссу центра соответствующей направляющей окружности по уравнению (140), мы можем перенести начало координат, оставив оси параллельными, в точку с такой абсциссой (ордината может быть произвольна) и тогда соответствующий корень k уравнения (140), составленного для новых осей, обратится в нуль.

Если уравнения (140) имеет кратный корень, то кривая имеет двойную точку.

Действительно, уравнение (140) по разделении всех его членов на $(A+k)$ получит такой вид:

$$f(k)=k^3+Ak^2+F+Dk-\frac{E^2}{4(A+k)}=0. \tag{179}$$

Условие кратности его корней будет, как известно,

$$f^1(k)=3k^2+2Ak+D+\frac{E^2}{4(A+k)^2}=0. \tag{180}$$

Левая часть уравнения (180) представляет собою ни что иное, как квадрат радиуса направляющей окружности. В § 28 было показано, что при $r=o$ циркулярная кривая имеет двойную точку в начале координат—центре направляющей окружности нулевого радиуса. Таким образом оба эти условия равносильны.

Справедливо и обратное предложение: *если циркулярная кривая имеет двойную точку (узловую или изолированную), то уравнение (140) имеет корень двойной кратности, а если двойная точка кривой есть точка возврата, то уравнение (140) будет иметь корень третьей кратности.*

Для доказательства возьмем уравнение циркулярной кривой с двойной точкой в форме (96) § 23.

$$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2=0. \tag{181}$$

Для уничтожения в уравнении (181) члена с произведением xy перенесем начало координат, оставляя оси параллельными прежним в точку

$$\left(0,-\frac{1}{2}\beta\right)$$

В таком случае абсцисса не изменится. Старое начало координат в двойной точке кривой, следовательно и в новых осях абсцисса центра направляющей окружности равна 0, т. е. уравнение (140) будет иметь нулевой корень.

Выполним указанное преобразование: формулы преобразования будут:

$$x=x^1\quad y=y^1-\frac{\beta}{2}.$$

Уравнение циркулярной кривой после преобразования получит такой вид:

$$x^1(x^{12}+y^{12})-\beta x^1y^1+\frac{\beta^2}{4}x^1+\alpha x^{12}+\beta x^1y^1-\frac{\beta^2x^1}{2}+\gamma y^{12}-\beta\gamma y^1+\gamma\frac{\beta^2}{4}=0.$$

или

$$x^1(x^{12}+y^{12})+\alpha x^{12}+y\gamma^{12}-\frac{\beta^2}{4}x^1-\beta\gamma y^1+\gamma\frac{\beta^2}{4}=0. \tag{182}$$

В уравнении (182) коэффиценты при x^{12} и y^{12} не равны. В таком случае уравнение (140) примет несколько иной вид, его нетрудно получить, заменив в уравнении (131) § 25 коэффициент у y^2 буквою A_1, тогда вместо уравнения (140) § 25, мы получим следующее уравнение:

$$(A+k)(A_1+k)k^2+(A_1+k)F+kD(A_1+k)-\frac{E^2}{4}=0. \qquad (183)$$

Подставив в уравнение (183) коэффициенты уравнения (182), мы найдем

$$(\alpha+k)(\gamma+k).k^2+(\gamma+k)\frac{\beta^2\gamma}{4}-\frac{k\beta^2}{4}(\gamma+k)-\frac{\gamma^2\beta^2}{4}=0. \qquad (184)$$

или

$$\alpha\gamma k^2+k^3(\gamma+\alpha)+k^4+\frac{\gamma.^2\beta^2}{4}+\frac{k\beta^2\gamma}{4}-\frac{k\beta^2\gamma}{4}-\frac{k.^2\beta^2}{4}-\frac{\gamma^2\beta^2}{4}=0. \qquad (185)$$

Упростив уравнение (185), найдем окончательно:

$$k^4+(\alpha+\gamma)k^3+(\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}), k^2=0. \qquad (186)$$

Уравнение (186) имеет двукратный корень $k=o$, если

$$\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}\neq 0.$$

Если же

$$\alpha\gamma-\frac{\beta^2}{4}=0,$$

то уравнение (186) будет иметь нулевой корень тройной кратности. Приняв во внимание, сказанное в § 22 относительно видов двойной точки циркулярных кривых, видим, что обратная теорема также справедлива.

Таким образом, в общем случае, когда все корни уравнения (140) различны, циркулярная кривая есть огибающая четырех серий двояко касательных окружностей. Если циркулярная кривая имеет двойную точку (узловую или изолированную), то она есть огибающая двух серий окружностей, а в случае точки возврата—циркулярная кривая есть огибающая одной серии двояко касательных окружностей. В двух последних случаях кривая есть также и огибающая серии окружностей, просто касательных к ней (проходящих через двойную точку кривой). Последняя серия окружностей соответствует четвертому простому корню уравнения (140).

§ 34. Для иллюстрации изложенного возьмем пример. Рассмотрим циркулярную кривую, изображенную на чертеже 26. Ее ур-ие:

$$x(x^2+y)^2+x^2+4xy+4y^2=0.$$

Она есть огибающая двух серий окружностей.

Первая серия сплошные окружности—суть окружности просто касательные к кривой (все они проходят через двойную точку—точку возврата нашей кривой). Вторая серия окружностей, начерченных пунктирными линиями, есть серия двояко касательных k кривой окружностей. Все это подтверждает соображения § 33.

Если перенести начало координат в центр кривой, то ее уравнение получит вид:

$$x_1(x_1^2+y_1^2)+\frac{11}{2}x_1^2+\frac{11}{2}y_1^2+\frac{23}{4}x_1-16y_1+\frac{125}{8}=0.$$

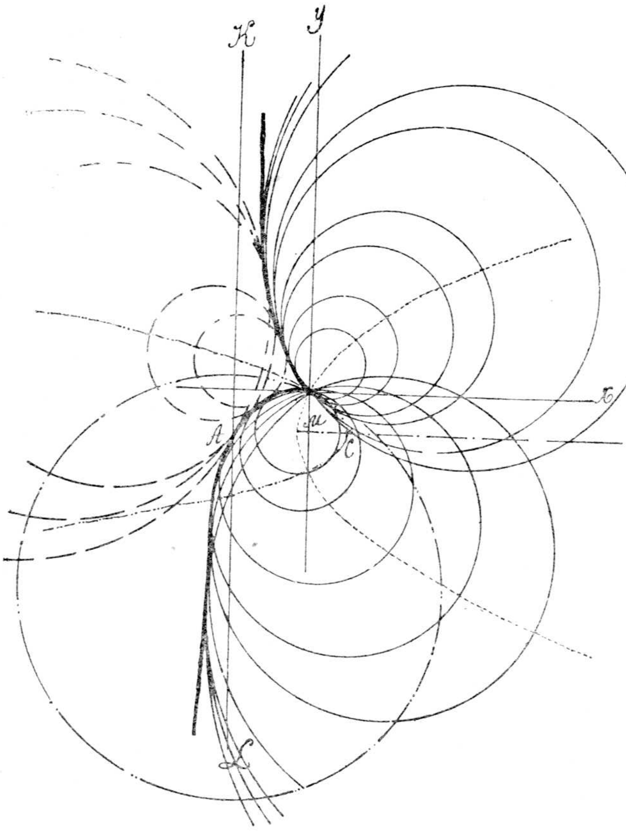
Ур-ие (140) в нашем случае будет:

$$k^4+11k^3+36k^2+\frac{189}{4}k+\frac{351}{16}=0.$$

Ур-ие (140) значительно упростится, если мы перенесем начало координат в точку $M(0,2)$. Формулы этого преобразования будут:

$$x = x^1$$

$$y = y^1 - 2.$$



Чертеж 26

Кривая в новых осях выразится следующим уравнением:

$$x^1(x^{12}+y^{12})+x^{12}+4y^{12}-4x^1-16y^1+16=0.$$

Уравнение (140):

$$(A+k)(A_1+k\, k^2+(A_1+k).F+kD(A_1+k)-\frac{E^2}{4}=0$$

принимает следующий вид

$$(1+k)(4+k)k^2+(4+k)16-4k(4+k)-64=0$$

или по раскрытии скобок:

$$k^4+5k^3+4k^2+64+16k-16k-4k^2-64=0.$$

По приведении подобных членов, находим, что

$$k^4+5k^3=0.$$

Полученный результат вполне согласуется с теорией § 33. Корни последнего уравнения:

$$k_1=k_2=k_3=0;\ k_4=-5.$$

Координаты центра направляющей окружности нулевых корней будут

$$x^1=0;\ y^1=-\frac{E}{2(A+k)}=\frac{16}{2.4}=2.$$

$$R^2=3k^4+2Ak+D+\frac{E^2}{4(A+k)^2}=-4+\frac{256}{4.16}=-4+4=0,$$

как и должно быть в случае двойной точки.

Ур-ие двояко касательных окружностей для нулевых корней·

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=4-4\beta.$$

Ур-ие параболы центров:

$$\alpha=-\frac{1}{2}A+\frac{\beta^2}{8}$$

Для определения γ имеем уравнение:

$$\frac{\beta E}{2}=A\left\{\gamma+\frac{D}{2}\right\};\ \beta(-8)=4(\gamma-2);\ \gamma=2-2\beta.$$

Уравнение параболы центров $\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\beta^2}{8}$ по упрощении будет

$$\beta^2=8\left\{\alpha+\frac{1}{2}\right\}$$

Строим эту параболу по точкам:

$\alpha=O;\ \beta=\pm 2;\ \alpha=-\frac{1}{2};\quad \beta=O;\ \alpha=4;\ \beta=\mp 6;\ \alpha=2,\ \beta=\mp\sqrt{20}=\pm 4{,}47$

$\alpha=8\ \beta=\pm\sqrt{68}=\mp 8{,}24$. Парабола центров начерчена пунктиром.

Строим двояко касательные окружности:

$$\alpha=O;\ \beta=\mp 2;\ \beta=+2;\ x^2+y^2-4y=4-8=-4;\ (x-O)^2+(y-2)^2=O$$

Двояко касательная окружность обращается в точку, совпадающую с точкой возврата кривой.

$$\text{При } \beta=-2 \text{ получим } (x-O)^2+(y+2)^2=16;\ R=4.$$

$$\alpha=4.\ \beta=\mp 6;\ \text{при } \beta=+6\quad (x-4)^2+(y-6)^2=32=(4\sqrt{2})^2=(5{,}64)^2$$

$$\beta=-6:(x-4)^2+(y+6)^2=80=(4\sqrt{5})^2=(8.94)^2$$

Направляющая окружность для корня $k_4=-5$. Координаты ее центра:

$$x^1=-5;\quad y^1=-\frac{E}{2(4-5)}=\frac{E}{2}=-8.\quad R^2=3k^2+2k-4+\frac{256}{4(4-5)^2}=$$

$$=3.25-10+60=125;$$

$R=11{,}2$. Парабола центров: $\alpha=\frac{1}{2}(a+k)+\frac{\beta^2}{A^1+k}$; $\alpha=2-\frac{\beta^2}{2}$

$-2\alpha=-4+\beta^2$; $\beta^2=-2(\alpha-2)$.

Строим параболу по точкам:

$\alpha=O$ $\beta=\pm 2$; $\alpha=2$; $\beta=O$; $\alpha=-6$; $\beta=\pm 4$.

Уравнение двояко касательных окружностей для корня $k_4=-5$:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{F}{k}-\frac{E\beta}{A^1+k}+\frac{E^2}{4k(A_1+k)}+k(2\alpha+A+k)=O$$

Подставив сюда значение коэффициентов, получим:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-10x-16\beta+36=O$$

при $\alpha=O$; $\beta=\pm 2$; $\beta=+2: x^2+y^2-4y-32+36=O$; $(x-O)^2+(y-2)^2=0$

Двояко касательная окружность обращается в двойную точку. Направляющая окружность проходит через эту же точку.

$\beta=-2$; $(x-O)^2+(y+2)^2+64=O$ окружность мнимая.

$\alpha=2$. $\beta=O: x^2+y^2-4x-20+36=O: (x-2)^2+y^2+12=O$ – мнимая.

$\alpha-6$; $\beta=\pm 4$ $\beta=+4: (x+6)^2+(y-4)^2=20=(4{,}47)^2$

$\beta=-4: (x+6)^2+(y+4)^2=-108$ — мнимая.

$\alpha=-16$; $\beta=\pm 6$ при $\beta=+6$ $(x+16)^2+(y-6)^2=192=(13{,}84)^2$

при $\beta=-6: (x+16)^2+(y+6)^2=O$. Окружность обращается в этом случае в точку, ибо центр этой двояко касательной окружности лежит на направляющей окружности.

Парабола, соответствующая корню $k_4=-5$, начерчена пунктиром с двумя точками.

Направляющая для этой серии двояко касательных окружностей окружность начерчена таким же пунктиром.

Кривая: $x(x^2+y^2)+x^2+4xy+4y^2=O$ построена по точкам:

при $x=-1$; $3y^2-4y=O$ $y_1=O$ $y_2=\frac{4}{3}=1^1/_3$

$x=-2$ $y^2-4y-2=O$ $y_1=4{,}44$; $y_2=0{,}44$

Уравнение вещественной ассимптоты: $x+4=O$ (КА).

Координаты главной точки $A: Xa=-4$. $Ya=-3$.

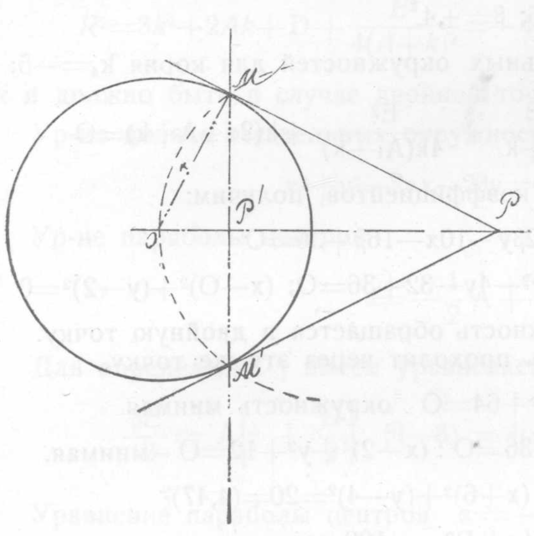
Координаты центра: $xc=\frac{3}{2}$

$y_c=-2$

Конец главы I-ой.

ГЛАВА II.

§ 1. В различных вопросах геометрии играют важную роль геометрические преобразования. Рассмотрим сейчас основные свойства так называемого инверсионного преобразования: им нам придется часто пользоваться в настоящей главе. Это преобразование впервые было применено M. Stubbs'om Philosophical Magazine 1843 г. Полная аналитическая теория инверсионного преобразования дана M. Liouville'em Journal de Mathématique T. XII.



Чертеж 27

Пусть нам дана окружность (черт. 27) радиуса k и точка P вне ее. Соединив точку P с центром, построим поляру точки P по отношению к окружности O. Эта поляра MM пересечет линию центров в точке P^1, которая и будет соответствующей точке P в этом преобразовании. Из $\triangle\, OMP^1$ находим:

$$OP.OP^1 = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Если положим $k=1$ и обозначим OP и OP^1 соответственно через ρ и ρ^1, то равенство (1) можно написать в виде:

$$\rho\rho^1 = 1, \text{ или } \rho = \frac{1}{\rho^1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Из соотношения (2) видна причина названия этого рода преобразований преобразованиями обратных радиусов—векторов или инверсионными преобразованиями. Окружность (черт. 27) наз. основной окружностью O центром инверсии, k—модулем или степенью инверсии. Инверсия устанавливает однозначную зависимость между точками части плоскости внутри окружности O и точками вне ее в том смысле, что каждой точке плоскости вне этой окружности соответствует единственная точка внутри окружности и обратно.

С удалением точки P точка P^1 приближается к O. и для бесконечно-удаленной точки соответственной будет центр инверсии. Наоборот, при приближении точки P к окружности и P^1 приближается к ней, так что на самой окружности соответственные точки совпадают.

Если трактовать этот вопрос аналитически, то можно сказать, что в инверсионном преобразовании точке с координатами ρ и θ соответствует новая точка с координатам ρ^1 и θ^1, причем эти координаты связаны следующими зависимостями.

$$\rho\rho^1 = k^2 \text{ и } \theta = \theta^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Переходя к прямоугольным Декартовым координатам, мы получим такие формулы:

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^{12}+y^{12}}=k^2;\ y:x=y^1:x^1 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Из соотношений (4) сейчас же получим формулы инверсионного преобразования для Декартовых координат:

$$x=\frac{k^2.x^1}{x^{12}+y^{12}};\quad y=\frac{k^2.y^1}{x^{12}+y^{12}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Формулы (5) показывают, что инверсионное преобразование однозначно, ибо x и y рационально выражаются через x^1 и y^1.

Справедливо и обратное заключение, ибо

$$x^1=\frac{\kappa,^2\,x}{x^2+y^2}\ \text{и}\ y^1=\frac{\kappa.^2\,y}{x^2+y^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

что очень легко проверить.

Преобразования, обладающие свойством выражать как старые координаты через новые, так и новые через старые, рационально называются *бирациональными* или *Кремоновыми.*

Формулы (6) подтверждают аналитически все те свойства инверсии, какие были указаны выше на основании чисто геометрических соображений.

Из них, например, легко усматривается, что всякой бесконечно-удаленной точке соответствует центр инверсии и обратно, что точка инверсионная по отношению к центру инверсии есть любая бесконечно удаленная точка.

Следовательно центр инверсии есть единственная вещественная точка, инверсионная которой *не определяется однозначно.*

Однозначность инверсионного преобразования сохраняется также и для мнимых точек. Существуют механические приборы, при помощи которых по данной фигуре можно получить ее инверсионное преобразование.

Наиболее известным из них является прибор инверзор *Peausellier*-Липкина *Peaucellier* Nouv. Ann. de Math. 1864 г. и 1873 г.) Тот же прибор был описан студ. Липкиным (в Изв. Петер. Акад. Наук 1871 г.)

§ 2. Отметим основные свойства инверсионного преобразования:

1) преобразованием прямой линии вообще будет окружность. Окружность же при инверсионном преобразовании переходит вообще снова в окружность.

Если преобразуемые прямая или окружность проходят через центр инверсии, то их инверсионными преобразованиями будут прямые.

Действительно, возьмем ур-ие какой-нибудь окружности:

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

и преобразуем его по формулам инверсионного преобразования (5), в таком случае мы получим:

$$\frac{\kappa^4\,x^{12}+\kappa^4\,y^{12}}{(x^{12}+y^{12})^2}+\frac{2a\kappa^2\,x^1+2b\kappa^2\,y^1}{x^{12}+y^{12}}+c=0 \quad . \quad . \quad (8)$$

Упростив уранение (8) мы легко найдем:

$$\kappa^4+2a\kappa^2.x^1+2b\kappa^2\,y^1+cx^{12}+cx^{12}=0 \quad . \quad . \quad (9)$$

т. е. получим снова окружность.

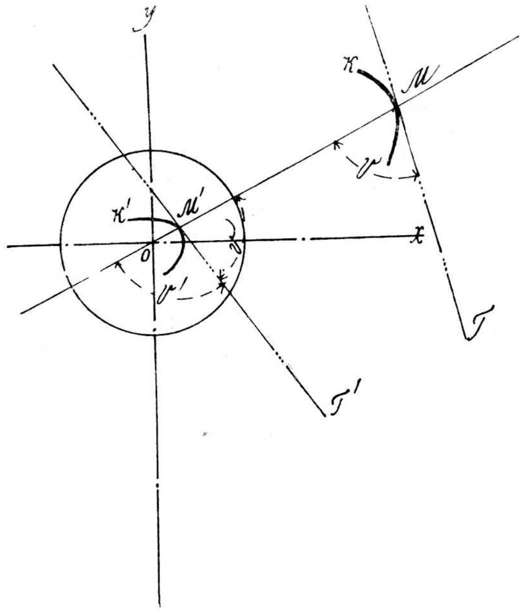
Если $c = 0$, т. е. данная окружность проходит через центр инверсии, то преобразованнем ее будет:

$$ax^1 + by^1 + \frac{k^2}{2} = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

т. е. прямая линия.

2) Касательные в двух соответственных точках двух преобразованных по инверсии *кривых образуют равные углы с общим радиусом вектором.*

Обозначим для доказательства этого предложения через v и v^1 углы, составленные касательными к кривой и к ее инверсионному преобразованию с радиусом вектором, в таком случае (черт 28):



Чертеж 28

$$tgv = \rho . \frac{d\theta}{d\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

и

$$tgv^1 = \rho^1 . \frac{d\theta}{d\rho^1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

для первой и второй кривых (МК) и (M^1 K^1), но так как $\rho^1 = \frac{k^2}{\rho}$, то отсюда $d\rho^1 = -\frac{k^2 d\rho^2}{\rho^2}$. Подставив эти выражения ρ^1 и $d\rho^1$ в ур-ие

(12), мы найдем, что $tgv^1 = \frac{k^2}{\rho} . \frac{d\theta}{\frac{-k^2 d\rho}{\rho^2}} = -\rho\frac{d\theta}{d\rho}$ . . (13)

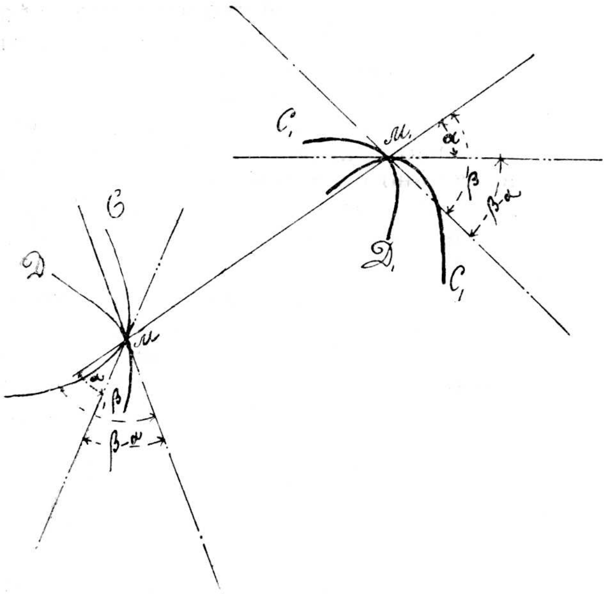
Следовательно $tgv = -tgv^1$.

Значит углы v и v^1 дополняют друг друга до π.

Касательные МТ и M^1 T^1 — антипараллельны.

Точка их пересечения вместе с точками М и M^1 служат вершинами равнобедренного треугольника.

Из предложения 2-го непосредственно вытекает, что две какие-нибудь кривые и два их преобразования по способу обратных радиусов векторов пересекаются под одним и тем же углом. Этот угол равен разности углов, которые кривые и их инверсионные *преобразавания* составляют с общим радиусом вектором точки, в которой они пересекаются. (Чертеж 29).



Чертеж 29

Из того же предложения 2-го нетрудно вывести и такие следствия: а) если мы умеем построить касательную к данной кривой, то мы можем построить касательную и к ее инверсионному преобразованию и обратно; в) если две какие-либо кривые касаются друг друга в точке, отличной от центра инверсии, то и преобразование этих кривых по способу обратных радиусов векторов также касаются друг друга в соответственной точке. 3) Инверсионным преобразованием параболического пучка окружностей, имеющих центр в центре инверсии, являются прямые, параллельные радикальной оси этого пучка.

Действительно, ур-ие параболического пучка окружностей, имеющих центр в начале координат, будет

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x = 0 \quad . \; . \; . \; (14) \text{ (см. § 20 глава I)}$$

$$\text{или } (x - \alpha)^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{4.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

ур-ие (15) после преобразования его по формулам инверсии (5) принимает вид:

$$x^1 = \frac{\kappa^2}{2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

и представляет пучек прямых, параллельных оси ОУ—радикальной оси параболического пучка.

На основании свойства 2-го инверсионного преобразования (глава II, § 2) легко доказать следующее предложение, относящееся к лучам, проходящим через вершину циркулярной кривой (см. черт. 29а).

Если через вершину циркулярной кривой М проведем луч MNP, пересекающий эту кривую в точках N и P, а вещественную ее ассимптоту в точке V [1]), то сумма tg углов, которые этот луч составляет с касательными к цир. кривой в точках N и P равна ts угла этого же луча с вещественной ассимптотой циркулярной кривой. [Углы отсчитываются от положительного направления луча против часовой стрелки]

Действительно, так как точки N и P являются инверсионными друг по отношению к другу, то ∠MNL=∠SPM=α

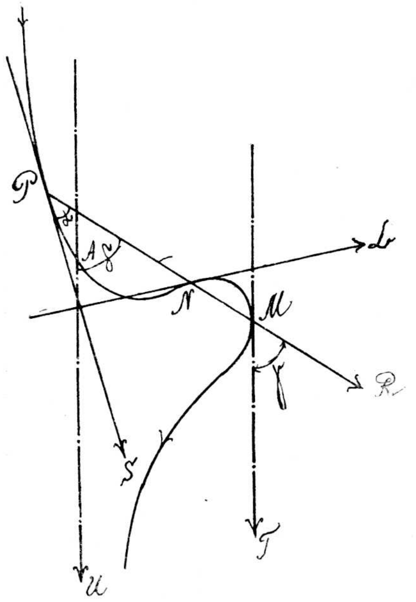
[1]) Буква V не помещена на чертеже 29-а.

Остается доказать, что $\operatorname{tg} RPS + \operatorname{tg} RNL + \operatorname{tg} RMT = \operatorname{tg} RVU$

т. е. $\operatorname{tg}(360^0 - \alpha) + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(360 - \gamma) = \operatorname{tg}(360 - \delta)$ [1])

последнее соотношение может быть переписано таким образом:

$$-\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\delta, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\delta,$$



Чертеж 29а

но последнее равенство очевидно—ибо углы γ и δ суть соответственные углы при параллельных MT и VU.

Теорема доказана.

Аналогичное предложение относительно кривой n-го порядка было высказано Echardt'ом в томе XXXIV Zeitschrift für Mathematik und Physik и доказано на основании иных соображений.

Высказанное здесь предложение может быть формулировано и в такой редакции: любой луч, проходящий через вершину циркулярной кривой 3-го порядка, пересекает ее еще в двух точках под равными углами.

§ 3. *Фокусы*. Плюккер показал, что фокусы кривых могут быть рассматриваемы, как точки пересечения касательных к кривой, проведенных из круговых точек. Напр., для эллипса ур-ия касательных, параллельных направлению F, как известно будут:

$$y = mx \pm \sqrt{b^2 + a^2m^2}$$

В нашем случае ур-ия изотропных касательных будут иметь вид:

$$y = ix \pm \sqrt{b^2 - a^2} = ix \pm ci, \text{ где } c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

и

$$y = -ix \pm ci$$

Решив совместно по два из четырех ур-ий (17), мы получим координаты всех четырех фокусов эллипса. То же получим и для прочих кривых 2-го порядка.

Приняв указанное свойство фокусов кривых 2-го порядка за их определение, Плюккер распространил его и на кривые высших порядков.

Таким образом, *фокусом* кривой называется точка, через которую проходят касательные к этой кривой с угловыми коэффициентами $\mp i$.

Когда точки касания таких касательных находятся на конечном расстоянии, то фокус называется *обыкновенным*.

Если точки касания удалены на ∞ (касательные суть ассимптоты), то фокус называется *особенным*.

Каждой касательной вида $u + iv = 0$ соответствует только один вещественный фокус—именно точка пересечения ее с сопряженной касательной: $u - iv = 0$.

Число фокусов кривой зависит от ее класса. Класс кривой—степень ее уравнения в тангенциальных координатах—определяет число

[1]) Все углы отсчитываются *против* часовой стрелки.

касательных, какое можно провести к данной кривой из данной точки вне ее.

Класс плоской кривой определяется, как известно формулой Плюккера:

$$n=m(m-1)-2\delta-3 \qquad \ldots \ldots \ldots (18)$$

где n—класс кривой
m—ее порядок
δ—число ее узловых точек
$\varkappa$—число ее точек возврата.
[Salmon, Courbes planes Chap. II § 67]

Мы видели уже, что циркулярная кривая или вовсе не имеет двойной точки или может иметь одну узловую точку или одну точку возврата.

Ввиду этого, по формулам Плюккера, класс циркулярной кривой может быть равен: $6=3.2$, или $6-2=4$, или наконец $6-3=3$.

§ 4. Определим теперь число фокусов циркулярных кривых в частности число их вещественных фокусов. Для решения этой задачи воспользуемся так называемым преобразованием Ньютона. Это преобразование, особенно часто применяемое при изучении точек кривых, расположенных на ∞, осуществляется при помощи формул:

$$x=\frac{1}{x_1};\quad y=\frac{y_1}{x_1} \qquad \ldots \ldots \ldots (19)$$

где x и y означают координаты точки M, отнесенной к какой-нибудь системе осей, а x_1 y_1 координаты точки M_1, соответствующей точке M, относительно той же или другой системы координатных осей. Нетрудно видеть, что соотношения, устанавливаемые формулами преобразования (19), однозначны.

Отметим основные свойства преобразования Ньютона:

1) всякая прямая преобразуется в прямую же. Действительно, прямой: $ax+by+c=0$ в первой системе осей будет соответствовать $a+by_1+cx_1=0$, т. е. также прямая во второй системе.

Угловой коэффициент данной прямой $-\frac{a}{b}$ равен ординате начала ее преобразования. В частности бесконечно удаленной прямой в одной системе соответствует ось ОУ в другой.

2) алгебраическая кривая $m^{\text{го}}$ порядка имеет своим преобразованием кривую того же порядка.

В самом деле, пусть уравнение.

$$\varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\varphi_{m-2}(x,y)+\ldots\ldots+\varphi_0(x,y)=0 \qquad \ldots (20)$$

будет уравнением некоторой кривой $m^{\text{го}}$ порядка в первой системе оси

Ее преобразование будет иметь вид:

$$\varphi_m(1,y_1)+x_1.\ \varphi_{m-1}(1,y)+\ldots\ldots+x_1^m.\ \varphi_0(1,y)=0 \qquad \ldots \ldots \ldots (21)$$

и представит очевидно также кривую $m^{\text{го}}$ порядка.

3)точкам пересечения некоторой кривой С и прямой D соответствуют общие точки их преобразований. Это непосредственно вытекает из (1) и (2). Например окружность: $x^2+y^2=5$ и прямая $y=1$ пересекаются в точках: $(+2,1)$ и $(-2,1)$. Их преобразования: $1+y^2=5x^2$ и $y=x$ пересекутся в точках: $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$,которые являются соответственными точкам (2,1) и (—2,1) в этом преобразовании.

4) Из только что указанного свойства (3) выходит, что касательной в точке M к кривой C соответствует касательная в точке M_1 к кривой C_1, причем M_1 и C_1 суть преобразования M и C.

Это же предложение нетрудно доказать и непосредственно аналитическим путем.

Будем рассматривать y как функцию от x, а y_1 как функцию от x_1 (между ними должна быть зависимость, определяемая кривыми C и C_1) x, кроме того есть функция от x_1 в силу уравнения $x = \frac{1}{x_1}$

Из второго уравнения преобразования в силу зависимости $x = \frac{1}{x_1}$ находим, что

$$y = \frac{y_1}{x_1} = y_1 x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Отсюда вычисляем:

$$\frac{dy}{dx} = y_1 + x\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} \quad \text{но } xx_1 = 1\text{, след.} \quad (23)$$

$$x\frac{dx_1}{dx} + x_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

или

$$x\frac{dx_1}{dx} = -x_1 \quad (25)$$

Таким образом получаем:

$$\frac{dy}{dx} = y_1 - x_1\frac{dy_1}{dx_1} \quad (26)$$

Аналогично вычислим и угловой коэффициент касательной $\frac{dy_1}{dx_1}$ из (22) видно, что

$$y_1 = y \,.\, x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Дифференцируя последнее равенство, мы получим:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = y. + x_1\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dx_1}$$

но $x + x_1\frac{dx}{dx_1} = 0$ ибо $xx_1 = 1$ (23), следовательно

$x_1\frac{dx}{dx_1} = -x$, значит

$$\frac{dy_1}{dx_1} = y - x\frac{dy}{dx} \quad (28)$$

След. если касательная к кривой C в точке M (xy) будет иметь своим уравнением

$$Y - y = \frac{dy}{dx}\left(X - x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

или

$$Y = \frac{dy}{dx}.X + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) \quad . \quad (30)$$

то уравнение ее преобразования будет:

$$\frac{Y_1}{X_1}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{X_1}+\left\{y-x\frac{dy}{dx}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

(преобразованию подлежат только текущие координаты).

Ур-ие (31) по освобождении от знаменателя принимает форму

$$Y_1=\left\{y-x\frac{dy}{dx}\right\}X_1+\frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Подставив в ур-ие (32) выражение $y-x\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy}{dx}$ из уравнений (28) и (26), мы получим:

$$Y_1=\frac{dy_1}{dx_1}X_1+y_1-x_1\frac{dy_1}{dx_1} \qquad (33)$$

Ур-ие (33) может быть переписано таким образом:

$$Y_1-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(X_1-x_1) \qquad (34)$$

Уравнение (34) наглядно показывает, что преобразование касательной к кривой C в точке M есть касательная к кривой G_1 в точке M_1, чем и доказывается теорема.

5) Из последнего свойства вытекает, что класс кривой также не изменяется при преобразовании Ньютона.

§ 5. Применим теперь указанные выше общие свойства преобразования Ньютона к интересующему нас вопросу.

Рассмотрим некоторую прямую изотропного направления, пусть ее уравнение будет

$$Y=iX+A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Ее преобразование будет:

$$Y_1=i+AX_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

также прямая (свойство 1), проходящая очевидно через точку (0,i) Если прямая (35) касательная к некоторой кривой C, то прямая (36) будет касательной к преобразованию C_1 кривой C (свойство 4-е).

Число касательных к данной кривой C_1, проходящих через данную точку (o, i) равно, как известно, классу этой кривой n, если точка лежит вне кривой. Оно равно n—1, если данная точка есть обыкновенная точка, лежащая на кривой. Число это уменьшается до n—2, если данная точка есть двойная точка кривой. (См. Salmon, Courbes planes p. 89).

Возьмем ур-ие циркулярной кривой в простейшем виде уравнения (26) § 5 гл. I:

$$(x+A)(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

и преобразуем его по формулам Ньютона.

По выполнении всех выкладок оно примет следующий вид:

$$Fx_1^3+Ay_1^2x_1+Ey_1x_1^2+Dx_1^2+Ax_1+1+y_1^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Это уравнение вообще кривой 3-го порядка будет того же класса (свойство 5-е), что и уравнение (37).

Нетрудно убедиться, что кривая (38) проходит через точку (0,i).

Как известно, условия, чтобы данная точка кривой 3-го порядка $f(x, y, z)=0$ в однородных координатах была двойной точкой, заключаются в совместности уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (39)$$

при $z=1$ в случае двойной точки на конечном расстоянии и при $z=0$ в случае двойной точки на ∞.

[См. например: Вельмин, кривые 3-го порядка стр. 78].

Применив этот критерий к уравнению (38) (сделав его предварительно однородным), мы убедимся, что точка $(0, i)$ есть обыкновенная точка кривой.

Число касательных с угловым коэффициентом i к циркулярной кривой (37) равно, на основании изложенного выше, числу касательных к кривой (38), проведенных из точки $(0,i)$. Последнее же число, в силу соображений § 5, равно $n-1$.

Но так как среди таких касательных должна быть и одна мнимая ассимптота циркулярной кривой (с угловым коэффициентом $+i$), то число касательных к циркулярной кривой (37) с точками касания на конечном расстоянии будет равно $n-2$, где n обозначает класс кривой (38) или, что одно и то же (37).

Аналогично найдем, что число таких же касательных (с точками касания на конечном расстоянии) с угловым коэффициентом $-i$ равно также $n-2$, где n имеет прежнее значение.

Касательные 1 й группы пересекутся с касательными 2-й группы в $(n-2)^2$ точках, которые по Плюккеру и будут *обыкновенными фокусами циркулярной кривой.*

Отсюда легко видеть, что число фокусов циркулярной кривой будет равно 16, или 4, или 1, смотря по тому, будет ли n равняться 6, 4 или 3.

В числе этих фокусов будут, конечно, и мнимые.

Число вещественных обыкновенных фокусов циркулярной кривой равно $n-2$.

Вещ. фокусы получаются от пересечения каждой из касательных 1-й группы с сопряженной ей касательной 2-й группы. Таким образом циркулярная кривая без двойной точки имеет четыре вещественных обыкновенных фокуса, кривая с узловой точкой имеет их два, и, наконец, цирк. кривая с точкой возврата имеет только один вещественный обыкновенный фокус.

§ 6. Особенный фокус кривой есть точка пересечения ее мнимых ассимптот. Координаты его были найдены в § 2 главы I.

К сказанному раньше относительно особенного фокуса или центра кривой следует здесь прибавить, что он совпадает с фокусом параболы (138) § 25 главы I, по которой движутся центры двояко касательных окружностей. В случае формы (26) § 5 уравнения кривой особенный фокус ее совпадает с началом координат. Фокус параболы (138) также имеет координаты (0,0), в чем нетрудно убедиться при помощи легкого вычисления.

Отметим еще одно свойство особенного фокуса циркулярной кривой.

Пусть $f(x, y, z)=0$ выражает уравнение циркулярной кривой 3-го пор. в однородных координатах.

Уравнение $x^1\frac{\partial f}{\partial x}+y^1\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=0$ . . . . (40)

где $x^1\ y^1$ есть данная точка, называется уравнением первой поляры полюса $(x^1\ y^1)$ по отношению к данной кривой 3-го порядка.

Уравнение (40) будет представлять некоторое коническое сечение, ибо оно будет, как легко сообразить, второй степени относительно x и y. Можно искать такой полюс, для которого 1-я поляра относительно данной циркулярной кривой будет окружностью. Это условие заключается в том, что искомый полюс $x^1\ y^1$ должен совпадать с особенным фокусом циркулярной кривой.

Для упрощения доказательства возьмем уравнение циркулярной кривой в простейшей форме: $(x+A)(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0$ или в однородных координатах:

$$x^3+Ax^2z+xy^2+Ay^2z+Dxz^2+Eyz^2+Fz^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Уравнение первой поляры будет:

$$x^1.(3x^2+2Axz+y^2+Dz^2)+y^1(2xy+2Ayz+Ez^2)+Ax^2+$$
$$+Ay^2+2Dxz+2Eyz+3Fz^2=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Перейдя от однородных к обыкновенным координатам, получим

$$x_1(3x^2+2Ax+y^2+D)+y^1(2xy+2Ay+E)+Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+3F=0 \quad (43)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (43) будет представлять окружность лишь при условии $x^1=0,\ y^1=0$.

§ 7. При помощи теоремы § 25 главы I мы можем найти координаты обыкновенных фокусов циркулярной кривой, а также доказать так называемую теорему *Hart'a* относительно последних.

Пусть $x_1\ y_1$ будут координатами какого-нибудь обыкновенного фокуса циркулярной кривой, тогда прямые

$$\begin{aligned} y-y_1 &= i\,(x-x_1) \\ y-y_1 &= i\,(x\quad x_1) \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

будут касательными к рассматриваемой кривой.

Их совокупность:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

мнимая окружность будет иметь двойное касание с рассматриваемой циркулярной кривой. [§ 25 гл. I].

Мы показали, что все такие окружности выражаются уравнением [§ 25 гл. I]:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{F}{\kappa}-\frac{E\beta}{A+\kappa}+\frac{E^2}{4\kappa(A+\kappa)}+\kappa(2\alpha+A+\kappa)=0 \quad . \quad (46)$$

Уравнения (45) и (46) должны быть следовательно тождественными, т. е.

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{F}{\kappa}-\frac{E\beta}{A+\kappa}+\frac{E^2}{4\kappa(A+\kappa)}+\kappa(2\alpha+A+\kappa)=x^2-2x_1x+x_1^2+$$
$$+y^2-2y_1y+y_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Из (47) находим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ y_1 &= \beta \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$x_1^2+y_1^2+\frac{F}{k}+\frac{Ey_1}{A+k}-\frac{E^2}{4k(A+k)}-k(2x_1+A+k)=o. \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Уравнения (48) дают координаты обыкновенного фокуса циркулярной кривой, соответствующего определенному значению к.

Сравнив же уравнение (49) с уравнением (143) § 25 главы I, мы приходим к заключению, что уравнение (40) есть ничто иное, как уравнение направляющей окружности данной серии двояко касательных окружностей.

Отсюда следует, что обыкновенные фокусы циркулярной кривой совпадают с точками пересечения каждой из парабол (138) с направляющей окружностью (143) § 25, соответствующей тому же (из 4-х) значений к.

Точек пересечения будет в каждом случае 4.

Другими словами, *16 фокусов циркулярной кривой лежат на четырех окружностях, причём каждая из этих окружностей содержит по четыре фокуса кривой.*

Это и есть теорема Hart'a. Ее можно доказать и чисто геометрическим путем, исходя из того, что ангармоническое отношение пучка четырех касательных, проведенных к кривой из какой-нибудь точки на ней, постоянно. [Salmon, Courbes planes, Paris 1884 § 168].

§ 8. Теорема § 7 остается справедливой и для $к=0$. Если же $к=-A$, т. е. $A+к=0$, то при помощи соображений § 7 мы не получим координат фокусов. В этом частном случае парабола (138) обращается в пару прямых, совпадающих с осью абсцисс (уравнение их $\beta^2=o$). В таком случае, как известно (§ 26 гл. I) $E=0$.

Координаты фокусов в этом случае можно найти из таких соображений: фокусы кривой должны быть расположены на оси абсцисс (парабола, на которой они лежат, сливается с осью. X) значит, достаточно вычислить только абсциссы этих фокусов. Пусть уравнение циркулярной кривой будет (при $E=0$):

$$(x+A).(x^2+y^2)+Dx+F=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

Для того, чтобы точка $(x_1\ o)$ была фокусом цирк. кривой (50), необходимо и достаточно, чтобы прямые:

$$y=\pm\ i\ (x-x_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

были касательными к кривой (50), т. е. пересекали бы ее в двух совпадающих точках.

Координаты точек пересечения кривой (50) с прямыми (51) найдутся из уравнений их при совместном их решении, т. е.

$$(x+A)\,.\,(x^2-x^2+2xx_1-x_1^2)+Dx+F=o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

$$\text{или} \quad 2x_1x^2+(2Ax_1-x_1^2+D).\,x+F-Ax_1^2=o. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

Условие равенства корней уравнения (53):

$$(2Ax_1-x_1^2+D)^2-4.(F-Ax_1^2).\ 2x_1=o \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (54)$$

Из р авнения (54) и найдем координаты (абсциссы) фокусов кривой, соответствующих значению $к=-A$.

§ 9. Обыкновенные фокусы циркулярной кривой могут быть найдены также и при помощи инверсионного преобразования на основании следующего свойства этого преобразования; *точка инверсионная по отношению к фокусу* (α,β) *данной кривой есть фокус кривой— инверсионной по отношению к данной.* Действительно если (α,β) суть координаты обыкновенного фокуса некоторой кривой, то прямые

$$y-\beta=\pm i\ (x-\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55)$$

суть касательные к этой кривой в точке, лежащей на конечном расстоянии от начала координат. Совокупность этих касательных

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

будет, как было уже показано, представлять окружность нулевого радиуса—двояко касательную с данной кривой.

Эта окружность совпадает со своим центром (α,β). Следовательно фокус кривой можно рассматривать как окружность нулевого радиуса, имеющую двойное касание с данной кривой.

Подвергнем уравнение (56) инверсионному преобразованию по формулам (5) § 1 гл. 2-ой.

После несложных преобразований оно получит такой вид:

$$\left\{x^1-\frac{k^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\right\}^2+\left\{y^1-\frac{k^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right\}^2=0 \quad . \quad . \quad (57)$$

Уравнение (57) есть ничто иное как уравнение окружности нулевого радиуса, имеющей двойное касание с инверсионным преобразованием данной кривой. Точка $M_1\left\{\frac{k^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{k^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right\}$ по предыдущему есть фокус инверсионного преобразования кривой. Но M_1 есть ни что иное, как инверсионное преобразование фокуса (α,β) данной кривой. Теорема таким образом доказана.

§ 10. Для того, чтобы воспользоваться способом инверсии в исследовании свойств циркулярных кривых, докажем следующее предложение: *инверсионное преобразование конического сечения по отношению к какой-ниб. точке его есть циркулярная кривая 3-го порядка, вещественная ассимптота которой параллельна касательной к данному коническому сечению в центре инверсии.*

Уравнение конического сечения по отношению к точке кривой, как к началу координат, можно написать в сокращенной форме так:

$$u_2+u_1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

u_2 есть форма 2-й степени с двумя переменными u_1—форма первой степени с двумя переменными.

Инверсионное преобразование (58) будет иметь вид:

$$r^2u_1+k.^2u_2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

где $r=x^{12}+y^{12}$, а k—степень инверсии.

Очевидно, что уравнение (59) есть уравнение циркулярной кривой.

Так как в уравнении (59) отсутствуют члены 1-го измерения, то начало координат является двойной точкой кривой. (§ 23 глава 1). Эта двойная точка будет изолированной, в случае если коническое сечение эллипс (дискриминант формы $u_2>0$), точкой возврата в случае параболы (дискриминант $u_2=0$) и узловой точкой в случае гиперболы (дискриминант $u_2<0$). [§ 22 глава I].

Уравнение $u_1=0$ дает, как известно, уравнение касательной в начале координат к данному коническому сечению. Из уравнения же $u_1=0$ находится угловой коэффициент вещественной ассимптоты кривой (59). Отсюда следует, что эти касательная и ассимптота параллельны. Теорема—доказана.

Если возьмем вершину конического сечения за центр инверсии, то получаемые циркулярные кривые будут простейшими.

Например, уравнение конических сечений, отнесенное к вершине, будет, как известно:

$$y^2=2px\pm q^2x^2,\ \text{где}\ p=\frac{b^2}{a};\ q=\frac{b^2}{a^2}\quad .\ .\quad (60)$$

Инверсионным преобразованием уравнения (60) будет следующее:

$$x^1.(x^{12}+y^{12})=mx^{12}+ny^{12}\ \dots\ .\ .\ .\ .\ .\quad (61)$$

значения m и n легко могут быть вычислены через p, q и k.

Именно $m=\pm\frac{q^2k^2}{2p}$; $n=\frac{k^2}{2p}$.

Если $m>0$ и $n>0$, то кривая (61) является инверсионным преобразованием *эллипса*, при $m=0$ кривая (61) служит инверсионным преобразованием *параболы* и называется *циссоидой Диоклеса*.

При $m<0$ циркулярная кривая является инверсионным преобразованием гиперболы.

Если $m=-n$, то получается кривая, которая служит инверсионным преобразованием *равнобочной гиперболы*. Она называется *строфоидой* или, у английских авторов, *логоцикликой* Booth'a. Booth рассматривал ее свойства в связи с геометрической теорией логарифмов.

§ 11. Для иллюстрации изложенной в предыдущих §§ теории фокусов рассмотрим в качестве примера *циссоиду Диоклеса*. Ее уравнение будет:

$$x(x^2+y^2)=2ay^2;\ m=0\ n=2a,\ \text{где}\ .\ .\ .\ .\ (62)$$

a обозначает радиус производящего круга.

В уравнении (62) начало координат в двойной точке кривой (точке возврата). Перенесем начало координат в особенный фокус кривой. Его координаты (§ 3 гл. I) будут $(-a,0)$.

После преобразования уравнение циссоиды получит вид:

$$(x-3a).(x^2+y^2)+3a^2x-a^3=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (63)$$

Уравнение для определения корней k (ур-ие 140 § 25 гл. I) в данном случае будет: $(k-3a)^2.k^2-a^3.(k-3a)+3a^2k(k-3a)=0$ . . (64)

или проще: $(k-3a)(k-a)^3$ . . . . (65)

Отсюда: $k_1=3a$, $k_2=k_3=k_4=a$.

Корень k_2—тройной кратности, что вполне согласуется с теорией, изложенной в § 33 главы I.

Парабола, соответствующая $k_1=3a$ (§ 8 гл. I), обратится в $\beta^2=0$ (две прямые, совпадающие с осью x).

Абсциссы фокусов, расположенных на этой прямой, найдутся из уравнения (54) (§ 8 гл. 2):

$$(2Ax_1-x_1^2+D)^2-8x_1(F-Ax_1^2)=0$$

в нашем случае последнее уравнение может быть переписано так:

$$x_1^4-12ax_1^3+30a^2x_1^2-28a^3x_1+9a^4=0\quad .\ .\ (66)$$

Ур-ню же (66) можно по разложении его левой части придать вид:

$$(x_1-9a).(x_1-a)^3=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ (67)$$

Следовательно, корни его будут:

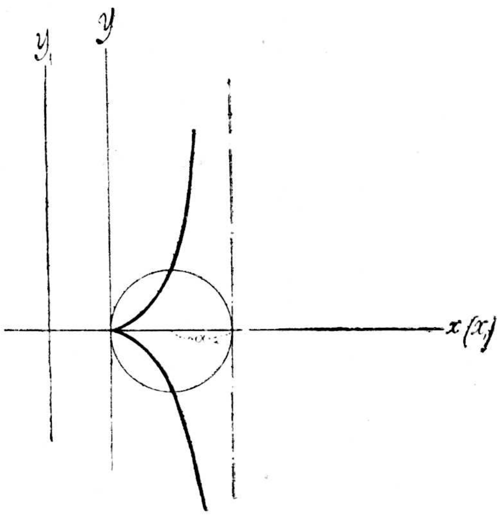
$$x_1=9a;\ x_2=x_3=x_4=a.$$

Обыкновенный вещественный фокус циссоиды будет иметь координаты: (9a, 0).

Его же можно получить путем инверсионного преобразования фокуса той параболы, которая является инверсионным преобразованием циссоиды. Парабола эта относительно осей xy (черт 30) будет иметь уравнение:

$$y^2 = \frac{m^2}{2a}\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

где m—модуль инверсии.



Чертеж 30

Фокус этой параболы будет иметь координаты: $\left(\frac{m^2}{8a}, 0\right)$

Его инверсионное преобразование будет иметь координаты:

$$\left(\frac{m^2\frac{m^2}{8a}}{\frac{m^4}{64a^2}+0}, 0\right), \text{ или } \left(8a,\ 0\right)$$

Координаты того же фокуса относительно системы осей x_1 y_1 будут (9a, 0), т. е. те же самые, что найдены раньше.

Точки, определяемые абсциссами: $x_2 = x_3 = x_4 = a$, совпадают с точкой возврата циссоиды.

Исследуем теперь корни $к_2 = к_3 = к_4 = a$.

Парабола центров, соответствующая этому корню, будет выражаться уравнением:

$$\alpha = -\frac{1}{2}(A+к) + \frac{\beta^2}{2(A+к)} \text{ или } \alpha = a - \frac{\beta^2}{4a} \quad . \; . \; . \; . \quad (69)$$

Уравнение двояко касательных окружностей:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha - a^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (70)$$

Уравнение направляющей окружности

$$(x-a)^2+y^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71).$$

Рассматриваемая циссоида есть огибающая системы окружностей (70) Эти окружности, как видно из их уравнения, проходят через точку возврата циссоиды (a, 0) и следовательно не будут в собственном смысле двояко касательными (§ 26 глава I), а просто касательными к кривой в двойной точке. Точки пересечения параболы (69) с направляющей окружностью (71) не будут следовательно *фокусами нашей циссоиды.*

В качестве второго примера рассмотрим циркулярную кривую, получаемую от инверсионного преобразования равнобочной гиперболы—прямую *строфоиду* или *логоциклику Booth'a.*

Ее уравнение будет:

$$x(x^2+y^2)=m(x^2-y^2) \quad (m=-n) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (72)$$

Начало координат в двойной (узловой) точке кривой.

Координаты центра строфоиды: (m, 0)

Уравнение кривой (72), отнесенное к центру, будет:

$$(x+2m)(x^2+y^2)+m^2x=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (73)$$

(Для сокращения значки [1] у x и y в уравнении (73) и дальнейших—опущены).

Уравнение для определения корней к в данном случае дает:

$$(2m+k)^2 . k^2+km^2(2m+k)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (74)$$

или

$$k(2m+k) . (k+m)^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (75)$$

Откуда: $k_1=0$, $k_2=-2m$, $k_3=k_4=-m$.

Исследуем отдельно корни уравнения (74):

а) $k=0$.

Уравнение двояко касательных окружностей, соответствующих этому корню, будет:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+m^2=0 \text{ (§ 26 глава I)} \quad . \; . \; . \quad (76)$$

Уравнение направляющей окружности:

$$x^2+y^2=m^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (77)$$

Уравнение параболы центров:

$$\alpha=-m+\frac{\beta^2}{4m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (78)$$

Фокусами строфоиды будут точки пересечения параболы (78):

$$y^2=4m(m+x) \text{ (α и β заменены в (78) через x и y)} \quad . \; . \; . \quad (79)$$

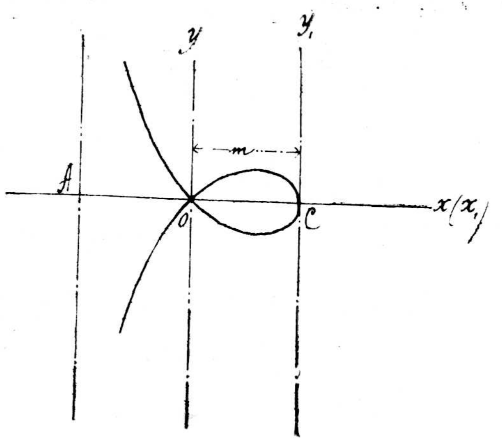
и окружности:

$$x^2+y^2=m^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (80)$$

Решаем систему уравнений (79) и (80), из них находим:

$$x^2+4m^2+4mx-m^2=0,\; x^2+4mx+3m^2=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (81)$$

Отсюда $x=-2m\pm m$; $x_1=-m$; $x_2=-3m$; (Черт. 31)



Чертеж 31

$y_1^2=4m^2+4m.(-m)=0$ Значит: $(-m,0)$ есть двойная точка **строфоиды.**

$y_2^2=4m^2+4m.(-3m)=-8m^2$; $y^2=\mp 2mi\sqrt{2}$, Значит: $(-3m+2mi\sqrt{2})$ и

$(-3m,-2mi\sqrt{2})$ суть два мнимых *обыкновенных фокуса строфоиды.*

b) $k_2=-2m$.

Парабола центров, соответствующая этому корню; $\beta^2=0$
Абсциссы фокусов найдутся из уравнения (§ 8 глава 2);

$$(4mx_1-x_1^2+m^2)^2-8x_1(-2mx_1^2)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (82)$$

По упрощении оно примет вид:

$$x_1^4+8mx_1^3+14m^2x_1^2+8m^3x_1+m^4=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (83)$$

Левая часть уравнения (83) может быть представлена в виде:

$$(x_1+m)^2(x_1^2+6mx_1+m^2).$$

Следовательно корни уравнения (83) будут:

$$x_1=x_2=-m;\; x_3=-3m+2m\sqrt{2};\; x_4=-3m-2m\sqrt{2}.$$

Первые два корня дают двойную точку строфоиды.
Два последние дают два вещественных обыкновенных ее фокуса.
Их координаты будут:

$$(-3m+2m\sqrt{2},0) \text{ и } (-3m-2m\sqrt{2},\ 0)$$

Если возьмем прежние оси координат с началом в точке 0, то координаты фокусов строфоиды будут:

$$(-2m+2m\sqrt{2},\ 0) \text{ и } (-2m-2m\sqrt{2},\ 0)$$

$$\text{или } [2m(\sqrt{2}-1),0] \text{ и } [-2m(\sqrt{2}+1),0]$$

Те же выражения для координат фокусов получим и при помощи инверсии.

Действительно, взяв уравнение строфоиды (относительно осей XOY)

$$x(x^2+y^2)=m(x^2-y^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (84)$$

произведем с ним инверсионное преобразование по формулам:

$$x=\frac{k^2x^1}{x^{12}+y^{12}} \text{ и } y=\frac{k^2y^1}{x^{12}+y^{12}}$$

в результате получим уравнение:

$$x^{12}-y^{12}=\frac{k^2}{m}x^1 \quad \ldots \quad (85)$$

равнобочной гиперболы, проходящей через начало координат.

Центр этой гиперболы имеет координаты: $\left(\frac{k^2}{2m}, 0\right)$

По преобразовании к центру по формулам:

$$x^1=x_2+\frac{k^2}{2m} \qquad y^1=y_2$$

уравнение (85) примет форму:

$$x_2^2+\frac{k^2x_2}{m}+\frac{k^4}{4m^2}-y_2^2=\frac{k^2x_2}{m}+\frac{k^4}{2m^2}$$

или по упрощении:

$$x_2^2-y_2^2=\frac{k^4}{4m^2} \quad \ldots \quad (86)$$

полуоси этой гиперболы равны: $\frac{k^2}{2m}$

Координаты фокусов гиперболы (86) будут:

$$x_2=\sqrt{\frac{2k^4}{4m^2}}=\pm\frac{k^2}{2m}\sqrt{2};\ y_2=0, \text{ или в старых осях:}$$

$$x=\frac{k^2}{2m}\sqrt{2}+\frac{k^2}{2m}=\frac{k^2}{2m}(\sqrt{2}+1);\ y=0$$

и

$$x=-\frac{k^2}{2m}(\sqrt{2}-1);\ y=0.$$

Инверсионное преобразование первого фокуса будет:

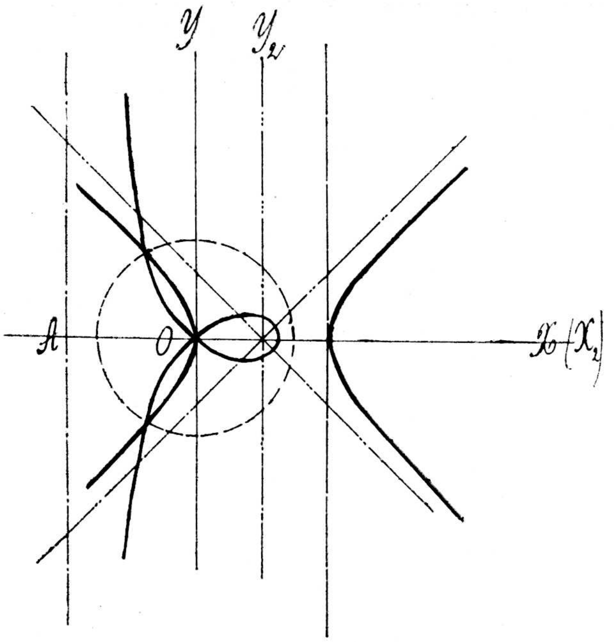
$$x_1=k^2\,\frac{\frac{k^2(\sqrt{2}+1)}{2m}}{\frac{k^4(\sqrt{2}+1)^2}{4m^2}+0}=2m(\sqrt{2}-1);\ y=0$$

Инверсионное преобразование второго фокуса даст второй фокус строфоиды, его координаты будут:

$$-k^2\,\frac{\frac{k^2(\sqrt{2}-1)}{2m}}{\frac{k^2(\sqrt{2}-1)^2}{4m^2}+0}=-2m(\sqrt{2}+1);\ 0,$$

что вполне согласуется с формулами предыдущей страницы. (Черт. 32).

c) Остается рассмотреть последний случай (исследование кратного корня $k_3=k_4=-m$).



Чертеж 32

Уравнение параболы центров будет:

$$\alpha = -\frac{m}{2} + \frac{\beta^2}{2m} \text{ или}$$

$$\beta^2 = 2m\alpha + m^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (87)$$

Уравнение двояко касательных окружностей

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2m\alpha - m^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (88)$$

Уравнение направляющей окружности

$$(x+m)^2 + y^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (89)$$

Окружности (88) проходят через двойную точку кривой $(-m, 0)$ и являются просто касательными к строфоиде в двойной точке.

Четыре точки пересечения параболы (87) с окружностью (88) не будут фокусами данной кривой.

§ 12. Докажем вторую теорему Hart'а о фокусах циркулярных кривых, аналогичную теореме о фокальных радиусах векторах эллипса и гиперболы. Для доказательства ее снова воспользуемся теоремой о двояко касательных окружностях § 25, гл. I.

Уравнение двояко касательных окружностей может быть представлено в зависимости лишь от одного только параметра β, ибо α выражается через β из уравнения параболы центров.

Тогда уравнению (142) можно придать следующий вид:

$$x^2 + y^2 + 2\beta U + \beta^2 V + W = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (90)$$

где $U = -\left[y + \frac{E}{2(A+k)}\right]; V = \frac{k-x}{A+k}; W = -\frac{F}{k} + \frac{E^2}{4k(A+k)} - (A+k)x \quad . (91)$

Из уравнений (91) видно, что U и V суть линейные выражения относительно текущих координат и независящие от β.

Если мы примем за начало координат один из фокусов циркулярной кривой, то уравнение двояко касательных окружностей выразится в форме:

$$x^2+y^2+2\beta U+\beta^2 V=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (92)$$

Действительно, в этом случае как парабола центров, так и направляющая окружность проходят через начало координат (фокусы суть точки пересечения направляющей окружности с параболой центров).

Тогда из уравнений (143) и (138) § 25 главы I получим:

$$\frac{F}{k}-\frac{E^2}{4k(A+k)}-k(A+k)=0 \quad \dots\dots\dots \quad (93)$$

и

$$A+k=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (94)$$

Откуда и следует, что $$\frac{F}{k}-\frac{E^2}{4k(A+k)}=0. \quad \dots\dots\dots \quad (95)$$

Приняв во внимание соотношение (95) и (94), приходим к заключению, что $W=0$ и таким образом предложение доказано.

Уравнение (92) при $\beta=0$ (параметр β—произволен) обращается в

$$x^2+y^2=0. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (96)$$

Последние очевидно и из чисто геометрических соображений: уравнение (96) изображает ту из двояко касательных окружностей, которая имеет центр в начале координат. Радиус двояко касательной окружности равен длине касательной из центра ее к направляющей окружности, а в последнем случае длина этой касательной равна 0.

Так как циркулярная кривая есть огибающая окружностей (92)

$$x^2+y^2+2\beta U+\beta^2 V=0$$

где β произвольный параметр, то уравнение этой циркулярной кривой может быть получено путем исключения параметра β из уравнения (92) и его производной по β, т. е.

$$2U+2\beta V=0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (97)$$

Исключив β из уравнений (92) и (97), находим:

$$(x^2+y^2).\,V=U^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (98)$$

Уравнение (98) и будет уравнением огибающей окружностей (92), т. е. уравнением циркулярной кривой согласно теореме § 25 гл., I.

§ 13. После этих соображений нетрудно уже доказать теорему Hart'a.

Предположим, что циркулярная кривая имеет четыре фокуса, расположенных на направляющей окружности. Возьмем один из этих фокусов за начало координат, а координаты двух других фокусов относительно этого начала пусты будут $(a_1\ b_1)$ и (a_2, b_2).

Тогда, обозначив расстояния какой-либо точки $M(x\,y)$ данной циркулярной кривой от этих последних фокусов через ρ_1 и ρ_2, а расстояние той же точки от начала координат через ρ_0, мы получим следующие соотношения:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=\rho_1^2 \quad \ldots \quad (99)$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=\rho_2^2 \quad \ldots \quad (100)$$

$$x^2+y^2=\rho_0^2 \quad \ldots \quad (101)$$

С другой стороны, уравнения двояко касательных окружностей, имеющих центры в точках (a_1 b_1 и (a_2 b_2) будут:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=0 \quad \ldots \quad (102)$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=0 \quad \ldots \quad (103)$$

радиусы их, по предыдущему, равны 0 (центры—на направляющей окружности). Но уравнения (102) и (103) должны получаться из уравнения (92) при некоторых частных значениях параметра β: β_1 и β_2, так что

$$x^2+y^2+2\beta_1 U+\beta_1^2.V=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=0 \quad \ldots \quad (104)$$

$$x^2+y^2+2\beta_2 U+\beta_2^2 V=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=0 \quad \ldots \quad (105)$$

Если под x и y будем подразумевать координаты любой точки циркулярной кривой, то левые части уравнений (104) и (105) дадут нам квадрат длины касательной из этой точки к двояко касательным окружностям, а так как эти окружности—нулевого радиуса, то мы и получим в таком случае квадраты расстояний точек циркулярной кривой от точек (a_1 b_1) и (a_2 b_2).

В результате придем к таким уравнениям:

$$x^2+y^2+2\beta_1 U+\beta_1^2 V=\rho_1^2 \quad \ldots \quad (106)$$

$$x^2+y^2+2\beta_2 U+\beta_2^2 V=\rho_2^2 \quad \ldots \quad (107)$$

(x и y выражают здесь координаты любой точки циркулярной кривой)

На основании уравнения (101) уравнения (106) и (107) можно переписать так:

$$\rho_0^2+2\beta_1 U+\beta_1^2 V=\rho_1^2 \quad \ldots \quad (108)$$

$$\rho_0^2+2\beta_2 U+\beta_2^2 V=\rho_1^2 \quad \ldots \quad (109)$$

Уравнение (98) примет вид $\rho_0^2 V=U^2$ . . . . (110)

Исключив U из уравнений (108) и (109) при помощи (110):

$\pm\rho_0\sqrt{V}=U$, находим:

$$\rho_0^2\pm2\beta_1\rho_0\sqrt{V}+\beta_1^2 V=\rho_1^2 \quad \ldots \quad (111)$$

$$\rho_0\pm2\beta_2\rho_0\sqrt{V}+\beta_2^2.V=\rho_2^2 \quad \ldots \quad (112)$$

или

$$\rho_0\pm\beta_1\sqrt{V}=\pm\rho_1 \quad \ldots \quad (113)$$

$$\rho_0\pm\beta_2\sqrt{V}=\mp\rho_2 \quad \ldots \quad (114)$$

Исключим из двух последних уравнений $\sqrt{V}$, для чего умножим (113) на β_2, а (114) на β_1 и вычтем их почленно одно из другого:

$(\beta_2-\beta_1)\rho_0=\pm\beta_2\rho_1\mp\beta_1\rho_2$, если при $\sqrt{V}$, взяты $+$ (115)

Если взять разные знаки у $\sqrt{V}$, то путем почленного сложения тех же уравнений найдем:

$$(\beta_2+\beta_1)\rho_0=\pm\beta_2\rho_1\pm\beta\rho_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Отсюда и получается вторая теорема Hart'а: *расстояния любой точки циркулярной кривой от трех ее вещественных конциклических фокусов связаны линейным однородным соотношением,* ибо (115) и (116) можно переписать в такой форме

$$l\rho_0\pm m\rho_1\pm n\rho_2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Значения коэффициентов l, m и n легко могут быть вычислены из сравнения соотношения (117) с (116) и (115).

Конциклическими называются фокусы, лежащие на окружности одного и того же направляющего круга.

Из тех же соотношений (115) и (117) легко усматривается, что

$$l\pm m\pm n=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

Справедлива и обратная теорема: *все точки, которых расстояния* ρ_0, ρ_1 и ρ_2 *от некоторых трех постоянных точек связаны соотношением вида:*

$$l\rho_0\pm m\rho_1\pm n\rho_2=0,$$

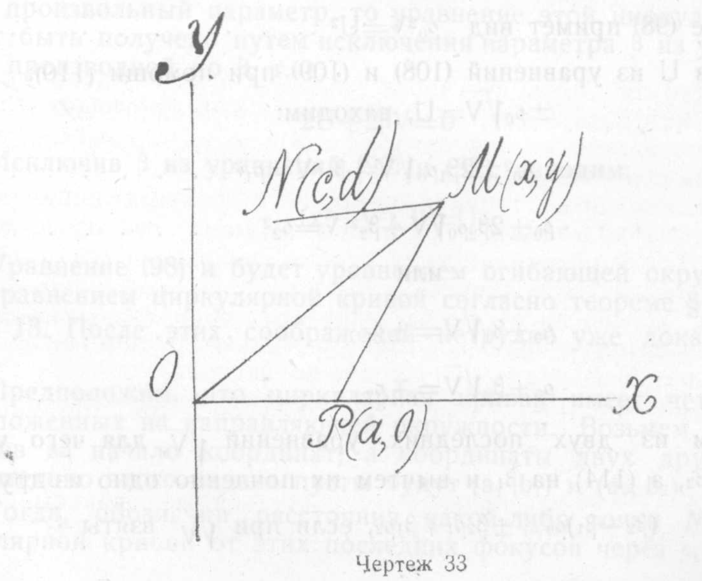
причем $l\pm m\pm n=0$, лежат *на циркулярной кривой 3-го порядка.*

Действительно, рассмотрим такую задачу: *найти геометрическое место точек,* чтобы сумма произведений расстояний каждой из них от трех данных точек на некоторые постоянные множители равнялась нулю.

Пусть искомая точка будет $M(xy)$ (черт. 33), а данные точки 0, N и P. Выберем оси таким образом, чтобы точка 0 была в начале координат, а ось X прошла через точку P. Тогда координаты 0 будут (0,0), а координаты точки P (a,0). Координаты точки N обозначим через c и d. Согласно условию задачи, мы будем иметь:

$$l\,.\,0M+mMN+n\;MP=0,$$

где l, m и n некоторые постоянные множители.



Чертеж 33

В таком случае уравнение искомого геометрического места может быть написано таким образом:

$$l\sqrt{x^2+y^2}+m\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}+n\sqrt{(x-a)^2+y^2}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Освободим уравнение (119) от радикалов

$$l\sqrt{x^2+y^2}+n\sqrt{(x-y)^2+y^2}=-m\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2} \qquad (120)$$

Возведя в квадрат обе части равенства (120), находим

$$l^2(x^2+y^2)+n^2[(x-a)^2+y^2]+2nl\sqrt{(x^2+y^2)[(x-a)^2+y^2]}=m^2[(x-c)^2+(y-d)^2]$$

Уединяем радикал:

$$2nl\sqrt{(x^2+y^2)[(x-a)^2+y^2]}=m^2[(x-c)^2+(y-d)^2]-l^2(x^2+y^2)-n^2[(x-a)^2+y^2] \quad (121)$$

По освобождении от радикала и группировке членов (121) уравнению можно придать следующий вид:

$$(2n^2l^2+2m^2l^2+2m^2n^2-m^4-l^4-n^4)(x^2+y^2)^2+\{2n^2l^2(a^2-2ax)-2n^4(a^2-2ax)+$$
$$+2m^4(c^2+d^2-2cx-2dy)+2m^2l^2(c^2+d^2-2cx-2dy)+2m^2n^2[c^2+d^2-2cx-2dy+$$
$$+(a^2-2ax)]\}(x^2+y^2)-m^4(c^2+d^2-2cx-2dy)^2-n^4(a^2-2ax)^2+2m^2l^2(c^2+d^2-$$
$$-2cx-2dy)+2m^2n^2(c^2+d^2-2cx-2dy)(a^2-2ax)=0. \qquad (122)$$

Уравнение (122) и будет уравнением искомого геометрического места. Оно представляет собою бициркулярную кривую 4-го порядка (§ 15, глава 2-я).

Бициркулярная кривая (122) переходит в циркулярную кривую 3-го порядка, при условии:

$$2n^2l^2+2m^2l^2+2m^2n^2-m^4-l^4-n^4=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Условие же (123) может быть переписано в такой форме:

$$(l+m+n)(m+n-l)(n+l-m)(l+m-n)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

Уравнение (124) и показывает, что в случае

$$l\pm m\pm n=0$$

искомым геометрическим местом является действительно циркулярная кривая. Обратная теорема *Hart'a*, таким образом, доказана.

H. Faure в заметке, помещенной в Nouvelles Annales de Math. (3) 1889 г., стр. 98, показал, что всякое коническое сечение, проходящее через четыре конциклических фокуса циркулярной кривой 3-го порядка, имеет свои собственные фокусы на этой же кривой.

§ 14. Если циркулярная кривая имеет узловую или изолированную двойную точку, то и к таким кривым теорема предыдущего § применима. Роль недостающего третьего фокуса (такие кривые имеют только два вещественных обыкновенных фокуса § 6, гл. 2-я играет узловая точка кривой.

Теорема может быть без труда доказана при помощи чисто геометрических соображений.

Пусть 0 (черт. 34) будет узловая точка кривой, буквы S и H пусть обозначают ее обыкновенные вещественные фокусы и M произвольную точку данной циркулярной кривой.

Докажем, что отрезки SM, HM и 0M связаны следующим соотношением:

$$l \cdot SM + m \cdot HM = n \cdot 0M,$$ где l, m и n

суть некоторые постоянные.

Тр-ки $0MS$ и $0M^1S^1$ подобны, ибо

$$0S \cdot 0S^1 = 0M \cdot 0M^1 = k^2.$$

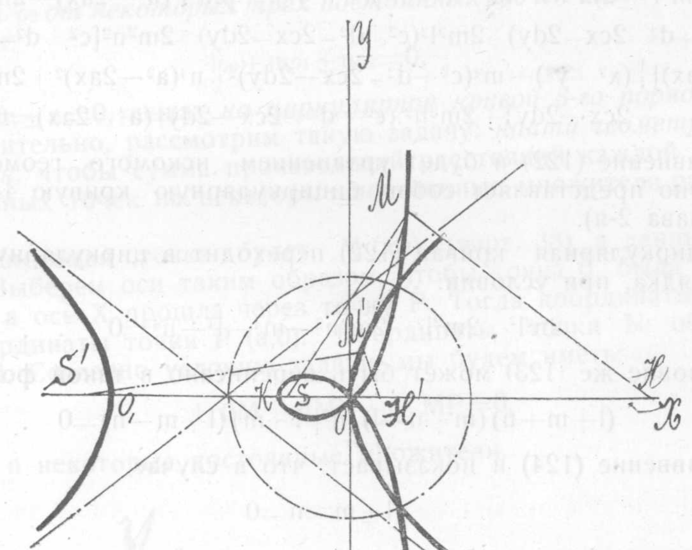
Следовательно $\dfrac{OS}{OM} = \dfrac{OM^1}{OS^1}$

Далее находим $\dfrac{SM}{0M} = \dfrac{S^1M^1}{0S^1} = \dfrac{S^1M^1 \cdot 0S}{k^2}$ (125), так как

$0S \cdot 0S^1 = k^2$; S^1, H^1, M^1

точки инверсионные по отношению к точкам

S, H, M.



Чертеж 34

2a—большая ось конического сечения. Точно также найден для второго фокуса:

$$\frac{HM}{0M} = \frac{H^1M^1}{0H^1} = \frac{H^1M^1 \cdot 0H}{k^2} \quad (126); \quad 0H \cdot 0H^1 = k^2$$

Из (125) и (126) легко получим:

$$\frac{SM}{0S} + \frac{HM}{0H} = \frac{0M}{k^2}(S^1M^1 + H^1M^1) \qquad (127)$$

Но так как точка M^1 лежит на коническом сечении, фокусами которого служат точки

$$S^1 \text{ и } H^1, \text{ то } S^1M^1 \pm H^1M^1 = 2a \text{ и } (127)$$

соотношение может быть переписано так:

$$SM . \left\{ \frac{1}{0S} \right\} + HM \left\{ \pm \frac{1}{0H} \right\} = 0M . \frac{2a}{k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (128)$$

Обозначив $\frac{1}{0S}$ через I; $\pm \frac{1}{0H}$ — через m и $\frac{2a}{k^2}$ через n, мы и получим искомое соотношение:

$$1 . SM + mHM = n . 0M.$$

Из (128) можно сейчас же получить еще одно соотношение между расстояниями какой-либо точки циркулярной кривой от двух ее фокусов и двойной точки.

Обозначив буквою K вершину кривой (§ 10, гл. I), мы видим из чертежа, что точка K есть инверсионная по отношению к вершине конического сечения 0_1 (в этом нетрудно убедиться и простым вычислением), значит $0k . 00_1 = k^2$ или $0k . 2a = k^2$, откуда

$$\frac{2a}{k^2} = \frac{1}{0K}$$

подставив полученное выражение $\frac{2a}{k^2}$ в равенство (128), мы и получим искомое соотношение:

$$\frac{SM}{0S} \pm \frac{HM}{0H} = \frac{0M}{0K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (129)$$

§ 15. Аналлагматические кривые.

Мы видели, что вследствие инверсионного преобразования порядок уравнения кривой, а след. и сама кривая изменяются. Только окружность после любого инверсионного преобразования переходит в новую окружность. Уравнение, а след. и вид кривой существенным образом зависят от выбора полюса инверсии.

Если мы общее уравнение циркулярной кривой (ось 0У взята параллельно вещественной ассимптоте кривой):

$$x(x^2 + y^2) + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad . \qquad (130)$$

подвергнем инверсионному преобразованию по формулам:

$$x = \frac{k^2x^1}{x^{12} + y^{12}} \qquad y = \frac{k^2y^1}{x^{12} + y^{12}},$$

то мы получим такое уравнение:

$$\frac{k^6x^1 + Ak^4x^{12} + Bk^4x^1y^1 + Ck^4y^{12}}{(x^{12} + y^{12})^2} + \frac{Dk^2x^1 + Ek^2y^1}{x^{12} + y^{12}} + F = 0 \quad . \qquad (131)$$

Освободив ур-ие (130) от знаменателя, перепишем его так:

$$F(x^{12} + y^{12}) + k^4(Ax^{12} + Bx^1y^1 + Cy^{12}) + k^2(Dx^1 + Ey^1)(x^{12} + y^{12}) + k^6x^1 = 0 \qquad (132)$$

Это уравнение так называемой *бициркулярной кривой 4-го порядка*, если только $F \neq 0$, т. е. если центр инверсии не лежит на данной кривой.

Если центр инверсии лежит на данной циркулярной кривой, а хотя бы одно из количеств D или E не равно нулю, то уравнение (132) будет уравнением циркулярной же кривой 3-го порядка

$$(Dx' + Ey')(x'^2 + y'^2) + k^2(Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2) + k^4x' = 0, \qquad (133)$$

которая будет отличаться от данной своей формой и положением относительно координатных осей.

Если $F = 0$; $D = 0$ и $E = 0$, т. е. центр инверсии совпадает с двойной точкой данной кривой (см. § 23, главы I), то ее инверсионным преобразованием будет коническое сечение, проходящее через центр инверсии (§ 10, глава 2). Его уравнение будет:

$$Ax'^2 + Bxy' + Cy'^2 + k^2x' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (134)$$

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о том, в каких случаях циркулярная кривая, при ее инверсионном преобразовании переходит снова в циркулярную кривую.

Кривые, не изменяющие своего рода после инверсионного преобразования их, назовем *аллагматичными*.

Если кривая аллагматична относительно какого-нибудь полюса, то можно всегда выбрать модуль инверсии так, чтобы после преобразования получилась кривая, тождественная с данной, назовем такую кривую *аналлагматичной* ([illegible] не изменяю).

Например, строфоида ур-ие (73) § 11, главы 2-й

$$(x - 2m)(x^2 + y^2) + m^2x = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (135)$$

аллагматична по отношению к ее вершине, т. е. при всяком инверсионном преобразовании уравнения (135) (оно отнесено к вершине кривой, как к началу координат), мы получим новую строфоиду. Действительно, после инверсионного преобразования ур-ия (135), мы будем иметь:

$$\left(\frac{k^2x'}{x'^2 + y'^2} - 2m\right)\frac{k^4}{x'^2 + y'^2} + \frac{m^2k^2x'}{x'^2 + y'^2} = 0. \quad . \; . \; . \qquad (136)$$

после несложных преобразований получаем окончательное уравнение строфоиды:

$$\left(x' - \frac{2k^2}{m}\right)(x'^2 + y'^2) + \frac{k^4x'}{m^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (137)$$

$$\text{или} \quad (x' - 2m') \, . \, (x'^2 + y'^2) + m'^2 \, . \, x' = 0,$$

$$\text{где } m' = \frac{k^2}{m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (138)$$

Легко видеть, что коэффициенты m и m' связаны соотношением инверсии: $mm' = k^2$

Если взять модуль инверсии равным m, то уравнение (138) будет тождественно с уравнением (135) — преобразование будет в этом случае *аналлагматичным*.

Преобразования последнего рода впервые были рассмотрены французским математиком Moutard'ом, который изложил их свойства и условия аналлагматичности *кривых* в ряде сообщений, напечатанных в Bulletins de Société Philomatique de Paris за 1862-1864 годы. Некоторые сведения по этому вопросу помещены также во 2-м томе „Traité d'Analyse" H. Laurent и в упомянутом в § 25, гл. I, мемуаре Darboux.

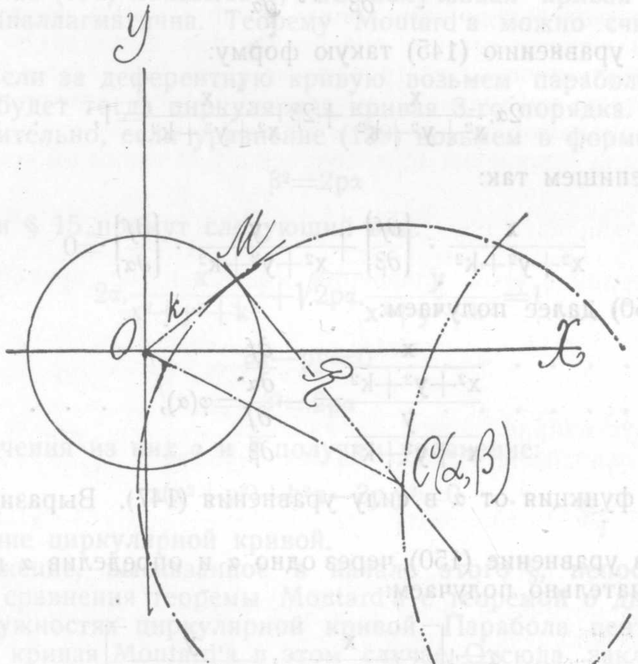
В основе теории аналлагматик лежит теорема Moutard'a: *Всякая аналлагматика есть огибающая семейства окружностей которых центры описывают данную кривую, называемую деферентной и которые ортогонально пересекают данную окружность, называемую направляющей. Центром последней должен быть центр инверсии, а радиус ее должен равняться модулю инверсии в случае аналлагматичности преобразования.*

Для доказательства этой теоремы предположим, что

$$f(\alpha,\beta)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

есть уравнение деференты (черт. 35),

$$x^2+y^2=k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$



Чертеж 35

—уравнение направляющей окружности, а

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

—уравнение окружностей, огибающей которых будет искомая кривая. Условие ортогональности (139) и (140) будет очевидно

$$\alpha^2+\beta^2=OC^2=R^2+k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

Следовательно

$$\alpha^2+\beta^2-R^2=k^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

Уравнение (143) в силу (141) может быть написано в такой форме:

$$x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)+k^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (144)$$

Для получения уравнения огибающей надо исключить параметры α и β из уравнений

$$x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)+k^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (145)$$

$$-2x-2y\frac{d\beta}{d\alpha}=0 \quad \ldots\ldots \quad (146)$$

$$f(\alpha, \beta)=0 \quad \ldots\ldots \quad (147)$$

Из (147) $\dfrac{d\beta}{d\alpha}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial\alpha}}{\frac{\partial f}{\partial\beta}}$ тогда (146) получит вид:

$$x.\frac{\partial f}{\partial\beta}+y\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0 \quad \ldots\ldots \quad (148)$$

Дадим уравнению (145) такую форму:

$$2\alpha.\frac{x}{x^2+y^2+k^2}+2\beta\frac{x}{x^2+y^2+k^2}=1, \quad \ldots\ldots \quad (149)$$

а (148) перепишем так:

$$\frac{x}{x^2+y^2+k^2}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial\beta}\right\}+\frac{y}{x^2+y^2+k^2}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right\}=0 \quad \ldots \quad (150)$$

Из (150) далее получаем:

$$\frac{\dfrac{x}{x^2+y^2+k^2}}{\dfrac{y}{x+y^2+k^2}}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial\alpha}}{\frac{\partial f}{\partial\beta}}=\varphi(\alpha), \quad \ldots\ldots \quad (151)$$

ибо β есть функция от α в силу уравнения (147). Выразив $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial\beta}$, входящие в уравнение (150), через одно α и определив α из уравнения (151), окончательно получаем:

$$\alpha=\psi\left[\frac{x}{x^2+y^2+k^2}, \frac{y}{x^2+y^2+k^2}\right] \quad \ldots\ldots \quad (152)$$

Подставив найденное выражение α из (152) в уравнение (149) [в котором β заменена функцией от α из (147)], мы и получим ур-ие огибающей окружностей (144) в виде:

$$F\left\{\frac{x}{x^2+y^2+k^2}, \frac{y}{x^2+y^2+k^2}\right\}=0 \quad \ldots\ldots \quad (153)$$

Это и будет уравнение искомой *аналлагматики.*

Для того, чтобы показать это, преобразуем уравнение (153) к полярной системе координат по формулам: $x=\rho.\cos\theta$ $y=\rho.\sin\theta$, тогда оно примет вид:

$$F\left\{\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2+k^2}, \frac{\rho\sin\theta}{\rho^2+k^2}\right\}=0 \quad \ldots\ldots \quad (154)$$

Преобразуем последнее уравнение по формулам инверсии:

$$\rho\rho^{1}=k^2$$

после этого получим:

$$F\left\{\frac{\frac{k_2}{\rho^1}\cos\theta}{\frac{k^2}{\rho^{12}}+k^2},\frac{\frac{k^2}{\rho^1}\sin\theta}{\frac{k^4}{\rho^{12}}+k^2}\right\}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (155)$$

Разделив числителя и знаменателя каждой из дробей, стоящих под знаком функции в ур-ии (155) на k^2 и умножив их на ρ^{12}, мы и получим

$$F\left\{\frac{\rho^1\cos\theta}{k^2+\rho^{12}},\frac{\rho^1\sin\theta}{k^2+\rho^{12}}\right\}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (156)$$

Уравнение (156) показывает, что полученная кривая (153) действительно аналлагматична. Теорему Moutard'а можно считать доказанной.

§ 16. Если за деферентную кривую возьмем параболу, то аналлагматикой будет тогда циркулярная кривая 3-го порядка.

Действительно, если уравнение (139) возьмем в форме:

$$\beta^2=2p\alpha$$

то уравнения § 15 примут следующий вид:

$$2\alpha.\frac{x}{x^2+y^2+k^2}+\sqrt{2p\alpha}.\frac{y}{x^2+y^2+k^2}=1 \quad . \; . \; . \; . \quad (157)$$

$$\beta x-py=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (158)$$

$$\beta^2=2p\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (159)$$

после исключения из них α и β получим уравнение:

$$x(x^2+y^2)+k^2x-3p.y^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (160)$$

т. е. уравнение циркулярной кривой.

Предложение, высказанное в начале этого §, непосредственно вытекает из сравнения теоремы Moutard'а с теоремой о двояко касательных окружностях циркулярной кривой. Парабола центров и есть деферентная кривая Moutard'а в этом случае. Отсюда заключаем, что циркулярные кривые являются частным случаем аналлагматических кривых.

Из кривых 3-го порядка только циркулярные кривые обладают этим свойством. Для того, чтобы кривая 3-го порядка была аналлагматичной, необходимо, чтобы старшие члены ее уравнения имели множителя: x^2+y^2, ибо только в таком случае возможно сокращение членов уравнения на квадратичный множитель: $x^{12}+y^{12}$ после инверсии и сохранение вследствие этого порядка уравнения относительно x^1 и y^1.

Существует общая теорема, что аналлагматиками могут быть лишь те кривые, какие проходят через круговые точки плоскости. Это сводится к сказанному выше.

§ 17. В § 10 главы I было показано, что если через вершину К циркулярной кривой проведем ряд прямых линий (см. чер. 3), то произведение отрезков, отсекаемых на каждой из них данной циркулярной кривой,—постоянно.

Если посмотреть на это предложение с точки зрения инверсии, то можно сразу заключить, что всякая циркулярная кривая аналлагматична по отношению к ее вершинам, ибо точки инверсионные точкам кривой снова лежат на кривой, если вершина кривой—полюс инверсии.

Так как циркулярная кривая имеет вообще 4 вершины (см. чер. 11 и 13), то она будет аналлагматична вообще по отношению к четырем центрам инверсии.

Сейчас мы покажем, что эти центры или полюсы инверсии лежат на кривой и суть точки касания четырех касательных к циркулярной кривой, параллельных ее вещественной ассимптоте.

Если кривая имеет двойную точку, то она обладает двумя или одним центром аналлагматической инверсии (в зависимости от характера двойной точки: узловой или изолированной, или точки возврата). Если кривая с двойной точкой имеет ось симметрии, то у нее будет один центр аналлагматической инверсии в случае узловой или изолированной точки, и ни одного центра—в случае точки возврата.

Для доказательства этих предложений заметим прежде всего, что полюсы аналлагматического преобразования совпадают с центрами направляющих окружностей [уравнение (148) § 25 главы I-й].

Рассмотрим уравнение циркулярной кривой, отнесенное к центру одной из направляющих окружностей как к началу координат.

Такой вид уравнения был получен в § 28 главы I-й уравнения (167)

$$x(x^2+y^2)+(A+3k)x^2+(A+k)y^2-\frac{E}{A+k}xy+r^2x=0$$

Произведем в этом уравнении инверсионное преобразование по формулам

$$x=\frac{r^2x^1}{x^{12}+y^{12}} \quad \text{и} \quad y=\frac{r^2y^1}{x^{12}+y^{12}}$$

где r—радиус направляющей окружности.

После некоторых упрощений мы найдем:

$$x^1(x^{12}+y^{12})+(A+3k)x^{12}+(A+k)y^{12}-\frac{E}{A+k}x^1y^1+r^2x^1=0 \quad . \quad (161)$$

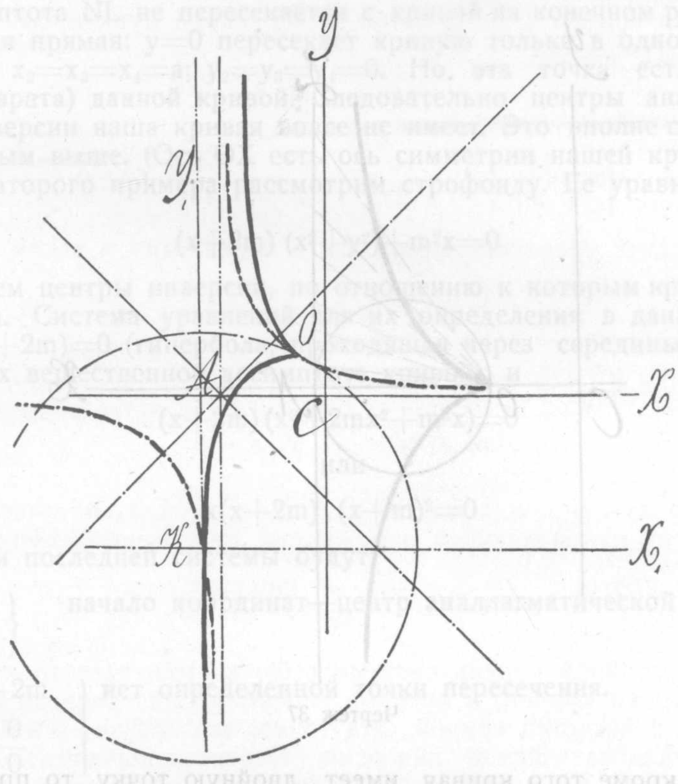
Уравнение (161) показывает, что инверсионное преобразование будет аналлагматичным, если 1) *центр инверсии совпадает с центром одной из направляющих окружностей*, и 2) *модуль инверсии равен радиусу этой окружности*. При произвольном модуле преобразование будет аналлагматичным. Значит число полюсов аналлагмат. преобразования зависит от числа направляющих окружностей. Центры направляющих окружностей, на основании § 31 главы I-й, совпадают с точками пересечения гиперболы: $y(x+A)=-\frac{E}{2}$ с данной кривой, а эти точки пересечения, как показано в § 31, суть точки касания касательных к кривой, параллельных ее вещественной ассимптоме. Таким образом справедливость предложения, высказанного в начале этого §, подтверждается. Соображения § 33 подтверждают остальное.

Необходимо только заметить, что число полюсов аналлагматической инверсии может быть и меньше числа направляющих окружностей или числа точек пересечения гиперболы § 31 с циркулярной кривой: исключаются центры направляющих окружностей, совпадающие с двойной точкой кривой. В этом случае радиус таких направляющих окружностей равен 0 (§ 28 гл. I) Следовательно и модуль аналлагматической инверсии обращается в нуль, т. е. инверсия становится невозможной. Формулы ее обращаются в:

$$x=0$$

$$y=0$$

и уравнение инверсионной кривой (161) обращается в этом случае в тождество: 0=0.



Чертеж 36

На чертеже 36 начерчена гипербола § 31 для кривой:

$$x(x^2+y^2)+x^2+4xy+4y^2=0$$

приведенный в качестве примера в § 34 главы I-й. Эта кривая имеет только один центр аналлагматической инверсии K, ибо кривая имеет точку возврата.

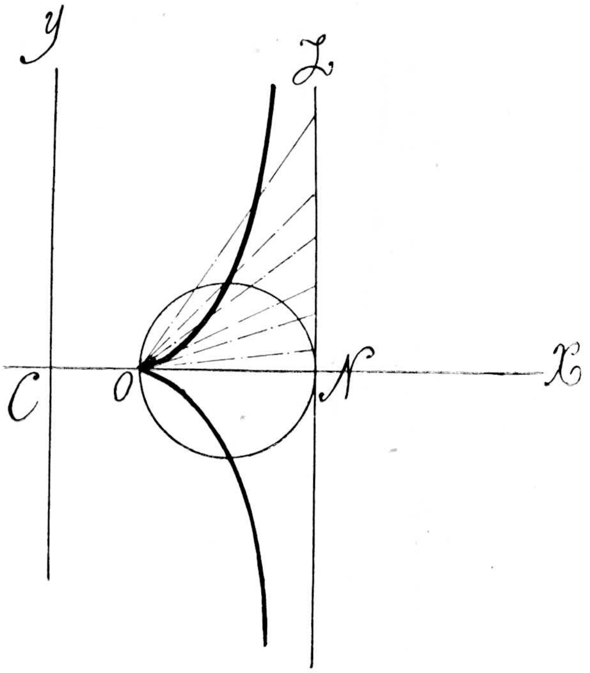
Таким образом для нахождения координат центров аналлагматической инверсии достаточно найти решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y(x+A) &= -\frac{E}{2} \\ (x+A)(x^3+Ax^2+Dx+F)-\frac{E^2}{4} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 162$$

и взять те решения этой системы, которые не совпадают с координатами двойной точки данной кривой.

Если кривая имеет ось симметрии (напр. ось X), то $E=O$, и гипербола § 31 в этом случае распадается на пару прямых:

1) $x+A=O$ и 2) $y=O$. Первая прямая представляет собою вещественную ассимптоту кривой (общую с ассимптотой гиперболы). Она пересекается с кривой на ∞ (Координаты главной точки в этом случае будут § 6 глава I: $x=-A$; $y=\infty$), и система (162) не дает для у определенного значения. Вторая прямая $y=0$ пересекает кривую в центре аналлагматической инверсии.



Чертеж 37

Если кроме того кривая имеет двойную точку, то прямая $y=0$ должна проходить через нее и следовательно пересечь кривую еще в одной точке (в случае узловой или изолированной двойной точки), которая и будет единственным центром аналлагматической инверсии для такой кривой.

Если двойная точка кривой есть точка возврата, то прямая $y=0$ должна касаться кривой в этой точке, имея три общих точки с кривой в точке возврата, прямая $y=0$ более не пересечется с кривой, и следовательно в этом случае циркулярная кривая вовсе не будет иметь центра аналлагматической инверсии.

§ 18. Рассмотрим пример для пояснения соображений предыдущего параграфа.

Возьмем циссоиду Диоклеса (черт. 37) и найдем для нее центры аналлагматической инверсии. Уравнение циссоиды, отнесенное к ее центру как к началу координат, будет § 11 глава 2-я уравнение (63):

$$(x-3a)(x^2+y^2)+3a^2x-a^3=0$$

Найдем центры инверсии. Система (162) в нашем случае дает такую систему уравнений:

$$y(x-3a)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (163)$$

$$(x-3a)(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)=0$$

или

$$(x-3a)(x-a)^3=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (164)$$

Решаем уравнения (163) и (164): $x_1=3a$ $y_1=\frac{0}{0}$. Точки пересечения нет. Ассимптота NL не пересекается с кривой на конечном расстоянии.

Вторая прямая: $y=0$ пересекает кривую только в одной точке O трикратно: $x_2=x_3=x_4=a$; $y_2=y_3=y_4=0$. Но эта точка есть двойная точка (возврата) данной кривой. Следовательно центры аналлагматической инверсии наша кривая вовсе не имеет. Это вполне согласуется со сказанным выше. (Ось OX есть ось симметрии нашей кривой).

Для второго примера рассмотрим строфоиду. Ее уравнение (§ 11 глава 2-я).

$$(x+2m)(x^2+y^2)+m^2x=0$$

Найдем центры инверсии, по отношению к которым кривая аналлагматична. Система уравнений для их определения в данном случае будет: $y(x+2m)=0$ (гипербола, проходящая через середины хорд параллельных вещественной ассимптоте кривой), и

$$(x+2m)(x^3+2mx^2+m^2x)=0$$

или

$$x(x+2m).(x+m)^2=0$$

Корни последней системы будут:

a) $\left.\begin{matrix} x_1=0 \\ y_1=0 \end{matrix}\right\}$ начало координат—центр аналлагматической инверсии.

б) $\left.\begin{matrix} x_2=-2m \\ y_2=\frac{0}{0} \end{matrix}\right|$ нет определенной точки пересечения.

с) $\left.\begin{matrix} x_3=x_4=-m \\ y_3=y_4=-0 \end{matrix}\right\}$ двойная (узловая) точка кривой.

Таким образом, вполне согласно с теорией, кривая (строфоида) аналлагматична по отношению к одному только полюсу инверсии— началу координат.

Действительно, преобразовав уравнение строфоиды

$$(x+2m)(x^2+y^2)+m^2x=0$$

по формулам:

$x=\frac{m^2x^1}{x^{12}+y^{12}}$ и $y=\frac{m^2y^1}{x^{12}+y^{12}}$ (радиус направляющей окружности для корня $k=O$ равен m см. § 11 глава 2 ая), мы получим:

$$\frac{m^2x^1}{x^{12}+y^{12}}\cdot\frac{m^4}{x^{12}+y^{12}}+2m\cdot\frac{m^4}{x^{12}+y^{12}}+\frac{m^4x^1}{x^{12}+y^{12}}=0$$

после упрощений:

$$(2m+x^1)(x^{12}+y^{12})+m^2x^1=0$$

Уравнение тождественное с предыдущим.

В виде 3-го примера рассмотрим кривую, помещенную на черт. 36. Уравнение этой кривой, отнесенное к ее центру С (см. § 34 гл. I), будет:

$$\left(x+\frac{11}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)+\frac{23}{4}x-16y+\frac{125}{8}=0$$

Для нахождения требуемых полюсов инверсии надо найти точки пересечения кривой с гиперболой, начерченной пунктиром: Точки эти найдем из уравнений

$$y\left(x+\frac{11}{2}\right)=8 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (165)$$

$$\left(x+\frac{11}{2}\right).\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+\frac{23}{4}x+\frac{125}{8}\right)-64=0$$

Последнее уравнение может быть переписано в таком виде:

$$\left(x+\frac{13}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)^3=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (166)$$

Из (165) и (166) находим:

$$a)\ x_1=-\frac{13}{2};\quad y_1=-8$$

Эти координаты принадлежат точке К центру аналлагматической инверсии и центру направляющей окружности, начерченной пунктиром.

$$b)\ x_2=x_3=x_4=-\frac{3}{2};\quad y_2=y_3=y_4=2.$$

Этот тройной корень системы (165) и (166) дает точку 0—точку возврата нашей кривой, в которой гипербола, начерченная пунктиром, пересекает и касается кривой. Эта точка, как сказано выше, не есть полюс аналлагматической инверсии. Перенеся начало координат в точку К (оси У, KX_1), мы преобразуем уравнение кривой следующим образом:

$$x_1\,(x_1^2+y_1^2)-14x_1^2-y_1^2-16\,x_1.\,y_1+125x_1=0. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (167)$$

Преобразуем уравнение (167) по формулам инверсии (радиус направляющей окружности равен $\sqrt{125}$ (см. § 34 гл. I).

Формулы преобразования будут:

$$x_1=\frac{125x^1}{x^{12}+y^{12}}$$

$$y_1=\frac{125y^1}{x^{12}+y^{12}}$$

После преобразования уравнение (167) примет вид:

$$\frac{125x^1}{x^{12}+y^{12}}.\frac{125^2}{x^{12}+y^{12}}-14.\frac{125^2x^{12}}{(x^{12}+y^{12})^2}-\frac{125.^2y^{12}}{x^{12}+y^{12}}-\frac{16.125^2x^1y^1}{(x^{12}+y^{12})^2}+\frac{125^2.x^1}{x^{12}+y^{12}}=0.$$

после упрощений находим:

$$x'(x'^2+y'^2)-14x'^2-y'^2-16x'y'+125x'=0.$$

Откуда и видно, что кривая (167) аналлагматична относительно точки К.

§ 19. Отметим еще несколько свойств циркулярных кривых, связанных с инверсионным преобразованием. Мы показали в § 17, что циркул. кривая вообще аналлагматична по отношению к 4-м центрам инверсии.

Докажем теперь следующее предложение: *если соединим прямыми любые три центра инверсии циркулярной кривой, то четвертый центр совпадет с ортоцентром треугольника, получившегося при этом соединении.*

Это предложение можно доказать при помощи гиперболы § 31 главы I.

Предварительно укажем только лемму, необходимую для нашего доказательства.

Из основного курса Анал. геометрии известно, что во всяком пучке кривых 2-го порядка

$$S+\lambda S_1=0,$$

где $S=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$, и

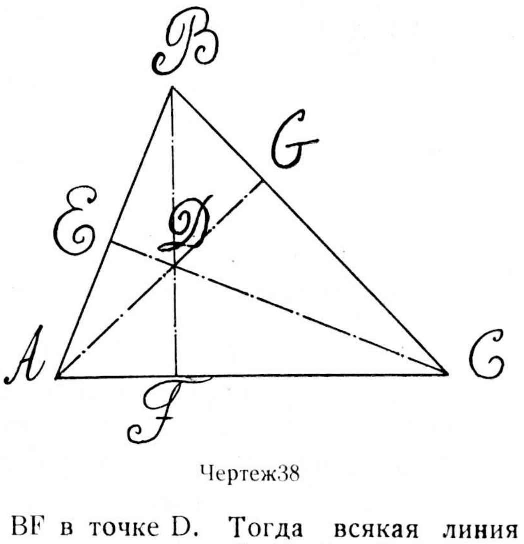
$S_1=A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1$, а λ—параметр пучка, всегда имеется одна равносторонняя гипербола. Написав уравнение пучка в раскрытом виде, получим для определения λ уравнение I-ой степени:

$$A+\lambda A_1+C+\lambda C_1=0,$$

которое и даст требуемое для равносторонней гиперболы единственное значение λ. Исключение представляется лишь в случае $A+C=0$ и $A_1+C_1=0$, тогда λ становится неопределенным, и все гиперболы пучка будут равносторонними. След. в пучке, в котором основные кривые суть равнобочные гиперболы, все кривые пучка также равнобочные гиперболы.

Отсюда и получается необходимая для нашего доказательства лемма. *Все равносторонние гиперболы, описанные около треугольника, проходят через ортоцентр этого треугольника*

Доказать эту лемму нетрудно на основании сказанного выше, если принять в соображение, что всякая пара взаимно перпендикулярных прямых может быть рассматриваема, как равносторонняя гипербола, слившаяся со своими ассимптотами.



Чертеж38

Опишем около Т-ка ABC (черт. 38) равностороннюю гиперболу. Предположим, что эта гипербола пересечет его высоту BF в точке D. Тогда всякая линия 2-го порядка, проходящая через четыре точки A, B, C и D, должна быть равносторонней гиперболой, так как через A, B, C и D уже проходят две равносторонние гиперболы: проведенная нами и система двух взаимно перпендикулярных прямых AC и BF (их можно принять за основные гиперболы пучка).

В таком случае и две другие прямые AB и CE, проходящие через эти четыре точки, должны давать равностороннюю гиперболу, т. е. быть взаимно перпендикулярными. Значит CD есть вторая высота треугольника ABC и след. D есть его ортоцентр. Лемма доказана. Если теперь припомним, что центры инверсии циркул. кривой лежат на гиперболе: $y.(x+A)=-\frac{E}{2}$, которая равносторонняя, то становится очевидным, что, соединив три каких-нибудь центра инверсии прямыми, мы получим треугольник, ортоцентр которого будет четвертым центром инверсии. Доказательство этого предложения занимает лишь несколько строк. В такой форме, кажется, оно не было еще указано.

При помощи того же чертежа (38) нетрудно чисто геометрическим путем доказать, что касательные к цирк. кривой в центрах инверсии параллельны ее вещественной ассимптоте.

Точки A, E, DF лежат на циркулярной кривой, но они также лежат на окружности, описанной на AD как на диаметре ($\angle$E и $\angle$F прямые). След. мы можем применить теорему Eckhardt'a § 8 гл. I: окружность, проходящая через две точки: A и F циркулярной кривой пересечет ее еще в двух точках E и D продолжение прямой ED пересечет кривую в точке C; продолжение прямой AF пересечет кривую также в точке C; прямая, проходящая через две эти точки пересечения (совпадающие в одну)—параллельна вещественной ассимптоте кривой согласно теоремы § 8 гл. I. След. касательная к циркулярной кривой в центре инверсии C ее параллельна вещественной ассимптоте кривой. Таким же способом можно доказать, что касательные в остальных центрах инверсии параллельны вещественной ассимптоте кривой.

§ 20. В связи с предыдущей докажем еще такую теорему: *основания высот каждого из треугольников, имеющих вершины в трех каких-либо центрах аналлагматической инверсии также лежат на этой кривой.*

Для доказательства этого предложения обратимся к чертежу 38. Из него видно, что Т-ки CEB и CDG подобны. Отсюда напишем:

$$\frac{CB}{CD}=\frac{CE}{CG} \text{ или } BC.\,CG=CD.CE \quad . \; . \; . \quad (168)$$

Точно также подобны Т-ки CEA и CDF. Из их подобия получим:

$$\frac{AC}{CD}=\frac{CE}{CF}, \text{ или } CE.CD=AC.CF \quad . \; . \; . \quad (169)$$

Соединив (168 и 169), напишем:

$$CB.CG=CE.CD=AC.CF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (170)$$

Но точка C есть вершина циркулярной кривой, точки B, A и D также лежат на этой кривой на основании § 19.

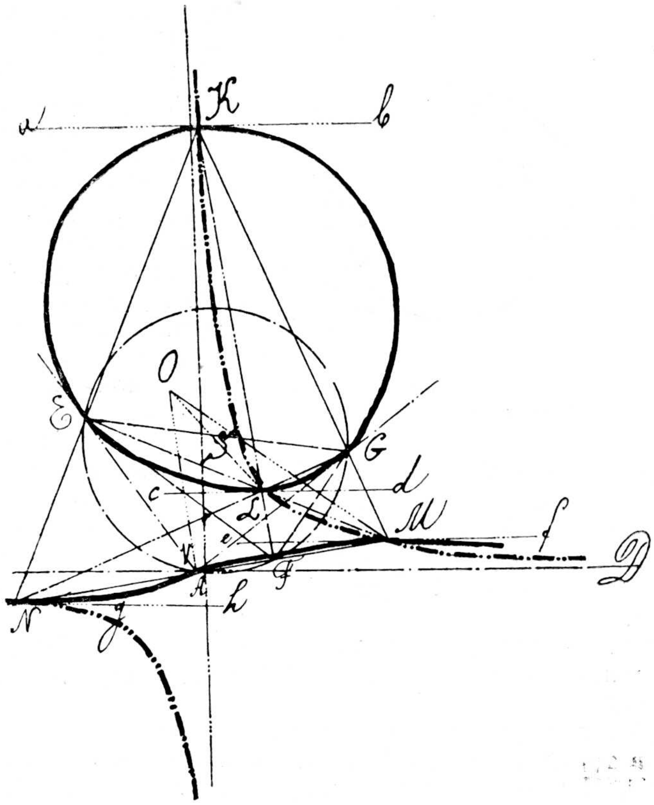
Если вспомним теорему § 10 главы I, то можем написать:

$$CB.CG=CE.CD=CA.CF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (171)$$

где точки G, E и F должны лежать на циркулярной кривой.

Сравнив соотношение (171) и (170), мы видим, что они тождественны, следовательно основания перпендикуляров G, E и F действительно лежат на той циркулярной кривой, вершинами которой служат точки A, B, C и D.

Чертеж 39 показывает, что точки E, G и F лежат на кривой. На чертеже 39 перечерчена кривая чертежа 9. A ее главная точка, AD— вещественная ассимптота. Прямые ab, cd, ef и gh параллельны вещественной ассимптоте AD. Они касаются циркулярной кривой и дают в точках прикосновения K, L, M и N четыре центра аналлагматической инверсии. Треугольник KLN, проходящий через три из них, имеет



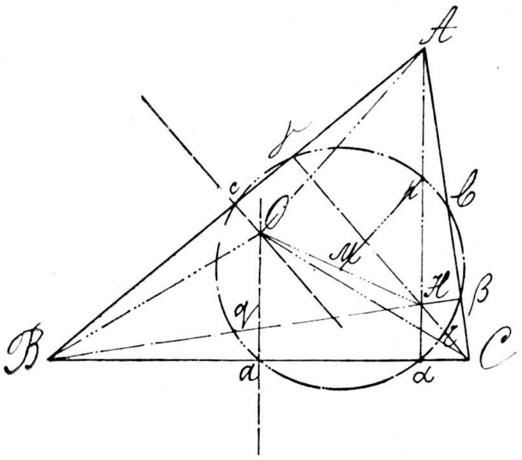
Чертеж 39

свой ортоцентр в точке M—четвертом центре инверсии, как видно из чертежа: G, E и F основания перпендикуляров из вершин Т-ка KLN на его стороны. Пунктиром начерчена гипербола, дающая в точках пересечение с кривой 4 центра аналлагматической инверсии. Одна из ее взаимно перпендикулярных ассимптот совпадает с вещественной ассимптотой циркулярной кривой AD. Пунктиром с двумя точками начерчена окружность 9 точек Эйлера. $_1$S—центр этой окружности.

O-центр описанной около Т-ка NKM окружности.

V—точка пересечения касательных к циркулярной кривой в точках E, F и G. В данном случае точка V совпадает с точкой A.

§ 21. На чертеже 40 начерчен так называемый круг девяти точек Эйлера. Он строится следующим образом: возьмем некоторый треугольник ABC и найдем центр описанной около этого треугольника окружности 0. Найдем также ортоцентр треугольника ABC—H. Разделив отрезок OH пополам, примем его средину M за центр окружности радиуса, равного $\frac{OA}{2}$. Описанная из точки M радиусом $\frac{OA}{2}$ окружность и будет *окружностью девяти точек Эйлера.* Она действительно проходит через 9 точек: α, β, γ—основания высот Т-ка ABC, a, b, c средины сторон ABC и p, q, r средины расстояний ортоцентра треугольника ABC от его вершин.



Чертеж 40

Действительно, отрезок Mp, соединяющий средины M и p сторон OH и HA треугольника OXA, параллелен основанию его OA и равен его половине. Значит окружность (M) переходит через точку p, а следовательно и точки q и r.

Из элементов геометрии известно, что высоты треугольника ABC, суть перпендикуляры, восстановленные из средин сторон другого треугольника $A_1B_1C_1$, получаемого проведением через каждую вершину данного Т-ка прямой, параллельной противолежащей стороне его. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с модулем подобия равным 2. Отрезок AH, рассматриваемый как принадлежащий Т-ку $A_1B_1C_1$, будет вдвое более отрезка Oa—соответствующего ему в треугольнике ABC. Следовательно отрезки Oa и Ap равны, а так как они параллельны, то pa равен и параллелен 0A. Но pM=Ma и следовательно окружность (M) проходит через точку a, а значит и через точки b и c.

Наконец, так как pa есть диаметр окружности Эйлера (M) и угол p α a—прямой, то окружность Эйлера проходит через точку α, а значит и через точки β и γ.

Фейербах показал, что окружность 9 точек касается окружности, вписанной в треугольник ABC, а также и трех вневписанных в него окружностей. Мы не будем теперь доказывать этой теоремы, так как она нам не понадобится.

Окружность 9 точек является линией центров пучка равносторонних гипербол, какой мы рассматривали в § 19 настоящей главы.

Заметим наконец, что четыре треугольника, образованные соединением любых трех центров инверсии циркулярной кривой, имеют общий круг 9 точек.

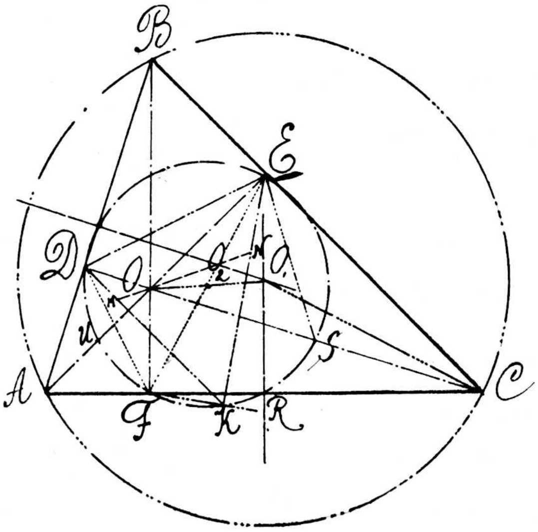
Действительно, только что мы показали, что круг 9 точек треугольника проходит через основания его высот α, β, γ (см. черт. 40).

Но эти точки принадлежат каждому из четырех треугольников, имеющих вершины в центрах инверсии циркулярной кривой, след. они имеют общий круг 9 точек.

§ 22. Докажем теперь, пользуясь соображениями § 21, такую теорему: *Касательные к циркулярной кривой в точках D, E и F см. чертеж (41) пересекаются в одной точке K, лежащей на круге 9 точек, который является общим для всех четырех треугольников, имеющих вершины в центрах аналлагматической инверсии этой кривой.*

Это предложение может быть доказано при помощи чисто геометрических соображений. Возьмем треугольник ABC, проходящий через три каких-нибудь центра анал. инверсии кривой. Четвертый центр инверсии будет ортоцентром 0 треугольника ABC. Пусть касательные к циркулярной кривой в точках D и E пересекутся в точке K. Соединим основание третьей высоты с точкой K. Пусть кроме того касательная к циркулярной кривой в точке 0 пересечет касательные DK и EK в точках M и N.

Так как D и E суть инверсионные точки с точкой 0 по отношению к C и A, ибо на основании § 10 гл. I CO.CD=constans и AO.AE=constans, то $\angle KEO = NOE$ [§ 2 гл. I сл. 2] и $\angle KDO = \angle MOD = \angle NOC$.



Чертеж 41

Следовательно, $\angle KEO + \angle KDO = \angle NOE + \angle NOC = \angle EOC = \angle DOA = \frac{\pi}{2} - \angle DAO$; далее можно написать:

$$\pi - \angle DKE = \underset{\sim\sim\sim}{\angle KDO} + \angle CDE + \underset{\sim\sim\sim}{\angle KEO} + \angle AED,$$

т. е. $\pi - \angle DKE = \frac{\pi}{2} - \angle DAO + \angle ODE + \angle OED$; $\angle ODE + \angle OED = \pi - \angle DOE$; $\angle DOE = \pi - \angle DOA$; $\angle DOA = \frac{\pi}{2} - \angle DAO$; след. $\angle DOE = \pi - \frac{\pi}{2} + \angle DAO = \frac{\pi}{2} + \angle DAO$; значит $\pi - \angle DKE = \frac{\pi}{2} - \angle DAO + \pi - \angle DOE = \frac{\pi}{2} - \angle DAO + \pi - \frac{\pi}{2} - \angle DAO$.

Отсюда и находим, что

$$\angle DKE = 2\angle DAO.$$

На чертеже 41 пунктиром с одной точкой начерчен круг Эйлера для треугольника ABC. Найдем угол DFE ортоцентрического треугольника DEF, вписанного в эту окружность. Очевидно угол DFE равен углу DSE. Угол же DSE равен $2\angle ECS = 2\angle OAD$. Треугольник ESC равнобедренный. Если на отрезке OC, как на диаметре, построим окружность, то она должна пройти через точку E ($\angle OEC$—прямой), отсюда SC=SE. Треугольники же BDC и AEB подобны. Так как угол K равен углу F и оба они опираются на одну и ту же дугу DE, то этим и доказывается, что точка K находится на окружности Эйлера Т-ка ABC. Остается только показать, что KF касательная к циркулярной кривой в точке F.

Для этого достаточно показать, что $\angle N0F = \angle BFK$ (точки 0 и F —инверсионны по отношению к B): BO.BF=contans).

Действительно, $\angle BFK = \angle BFC + \angle CFK = 90^0 + \dfrac{KR}{2}$

$$\angle N0F = \angle N0C + \angle C0F = \angle KDC + (90^0 - \angle 0CF) = \frac{KS}{2} + 90^0 - \frac{DRF}{2} = \frac{KS}{2} +$$

$+ 90^0 - \dfrac{DF}{4} = 90^0 + \dfrac{KR}{2} + \dfrac{RS}{2} - \dfrac{UF}{2}$ AE—биссектрисса угла DEF; $UF = \smile \dfrac{DF}{2}$. Но $\smile RS = \smile UF$ ибо $\angle DRF = 2\angle DCF$, так как $\triangle$ DRC равнобедренный RD=RC как радиусы окружности, описанной около $\triangle$-ка ADC.

Следовательно, $\angle NOF = 90^0 + \dfrac{RK}{2}$, т. е. $\angle BFK$.

Значит прямая KF—касательна к цир. кривой в точке F.

§ 23. Далее, при помощи инверсии легко доказывается такое предложение:

Если циркулярная кривая подвергается инверсионному преобразованию около центра инверсии на ней самой, то она преобразуется в новую циркулярную кривую, причем соприкасающийся круг первой переходит в ассимптоту второй.

Соприкасающийся круг пересекает кривую в трех точках, совпадающих в O и еще в четвертой точке M, лежащей на конечном от нее расстоянии. После инверсии окружность перейдет в прямую, пересекающую новую циркулярную кривую в конечной точке M (инверсионной по отношению к M) и еще в двух точках, совпадающих друг с другом на ∞ (инверсионное преобразование начала координат O).

Значит соприкасающаяся окружность переходит в вещественную ассимптоту инверсионной кривой.

§ 24. В § 9 главы I было показано, что если некоторая прямая пересекает *циркулярную кривую* в трех точках a, b и c, то три точки a^1, b^1 и c^1, в которых касательные в точках a, b, c пересекают *циркулярную кривую*, лежат на одной прямой.

Точкой перегиба наз. точка, в которой касательная имеет с кривой три общих точки.

Из предыдущего следует, что точки прикосновения трех касательных к циркулярной кривой из точки ее перегиба лежат на одной прямой.

Докажем теперь предложение: *если подвергнем инверсионному преобразованию данную циркулярную кривую, приняв ее главную точку A за полюс инверсии, то эта же точка A будет точкой перегиба новой циркулярной кривой, получившейся после инверсионного преобразования.*

Для доказательства последнего возьмем уравнение циркулярной кривой, приняв ее главную точку за начало координат. Такая форма *уравнения кривой* была получена в § 11 главы I. Это уравнение по раскрытии скобок можно переписать так:

$$x(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta xy+\gamma x+\delta y=0 \quad \ldots\ldots \quad (172)$$

буквами α, β, γ и δ обозначены соответственные коэффициенты для сокращения письма.

После инверсионного преобразования уравнения (172) по формулам инверсии (при модуле k), мы получим:

$$(\gamma x^1+\delta y^1)\,(x^{12}+y^{12})+k.^2\alpha.x^1+k^2.\beta.x^1y^1+k^4x^1=0\,. \quad (173)$$

Уравнение (172), как и следовало ожидать, представляет *новую циркулярную кривую.*

Найдем координаты точки пересечения кривой (173) с осью У.

Для этого надо в уравнении (173) положить $x^1=0$.

В результате получим:

$$\delta.y^{13}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (174)$$

Уравнение (174) показывает, что в начале координат совпадают три точки кривой (173). Значит начало координат, или главная точка кривой (172) является точкой перегиба инверсионной кривой (173).

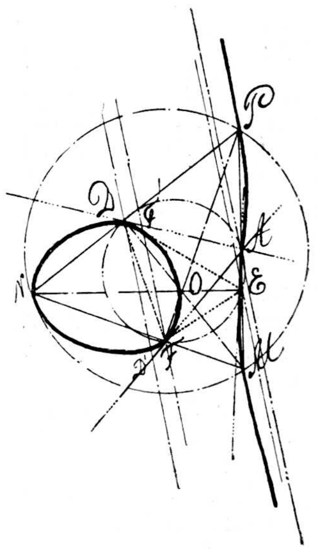
§ 25. С помощью же инверсии доказывается такое предложение о касательных к циркулярной кривой из главной точки.

«*Точки касания трех касательных к циркулярной кривой, проведенных к ней из ее главной точки, лежат на одной окружности*».

Для доказательства вообразим некоторую циркулярную кривую S и проведем из ее точки перегиба A три касательных к ней. Точки касания a_1, a_2 и a_3 по предыдущему будут лежать на некоторой прямой. Сделаем инверсионное преобразование, тогда получим новую циркулярную кривую S^1, у которой касательные (2-е свойство инверсии), проведенные из ее главной точки (в нее перейдет точка перегиба первой кривой), будут иметь точки касания на окружности (в нее перейдет после инверсии прямая a_1, a_2, a_3). Это же предложение есть непосредственное следствие из теоремы 3-ей § 11 главы I.

Из той же теоремы выводим, что упомянутая окружность проходит также через *главную точку* и *особенный фокус кривой.*

§ 26. Треугольник DEF, получаемый от соединения прямыми оснований высот данного Δ-ка, называется *ортическим.*

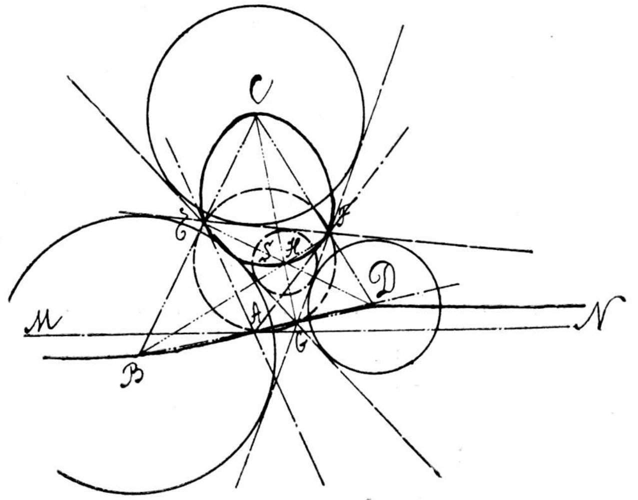


Чертеж 42

Если стороны ортического Δ-ка EF,FD и DE (черт. 42) продолжим до пересечения с циркулярной кривой в точках D^1, E^1 (не помещается на чертеже) и F^1, то прямые DD^1, EE^1 и FF^1 будут параллельны вещественной ассимптоте AL циркулярной кривой.

Так как четыре точки N, F, E и P лежат на циркулярной кривой, а также и на окружности, построенной на NP как на диаметре ($\angle NFP=\angle NEP=d$), то к ним может быть применена теорема § 8 главы I: окружность, проведенная через N и P, встретит цирк. кривую еще в двух точках F и E. Прямая FE пересечет кривую в точке D^1. Прямая NP также встречает кривую (в точке D). Прямая, проходящая через эти две точки: DD^1 по § 8, будет параллельна вещественной ассимптоте.

Применяя то же к точкам P, D, F, M и M, E, D, N, найдем, что EE^1 // AL и FF^1 // AL.



Чертеж 43

§ 27. В дополнение к теореме § 22 докажем, что *точка A пересечения трех касательных; FA, DA и EA (черт. 42) к циркулярной кривой в вершинах ортического треугольника DEF четырех треугольников ее центров аналлагматической инверсии, есть главная точка циркулярной кривой.*

Точка A, как доказано в § 22 главы 2-й, лежит на окружности Эйлера для треугольника MNP центров инверсии. Окружность 9 точек Эйлера (она начерчена пунктиром) проходит через три точки D, E и F циркулярной кривой. Она должна пересечься с циркулярной кривой еще и в четвертой точке. Обозначим эту точку буквою H. (точка H. не отмечена на чертеже 42). Соединим точку H с точкою D прямою. Прямая HD, имея с циркулярной кривой две общих точки, должна пересечь ее еще и в некоторой третьей точке. Обозначим эту точку D_2 (она также не отмечена на чертеже).

Прямая EF пересекает цирк. кривую в третьей точке D^1.

На основании теоремы § 8 гл. I прямая D^1D_2 должна быть параллельна вещественной ассимптоте кривой. Но прямая D^1D на основании теоремы § 26 гл. 2-й тоже параллельна вещественной ассимптоте кривой. Значит точка D_2 совпадает с D и следовательно прямая HD касается циркулярной кривой в точке D.

Но AD по условию касательная к циркулярной кривой в точке D. Значит точка A совпадает с точкой H и, таким образом, доказано, что точка A лежит на кривой.

Четыре точки циркулярной кривой A, D, E и F лежат на одной окружности (Эйлера). Значит, точки прикосновения трех касательных к циркулярной кривой из точки A лежат на одной окружности. Следовательно, на основании теоремы § 25 главы 2-й точка A есть *главная точка циркулярной кривой.*

Как следствие сказанного можно отметить, что *общая для четырех треугольников инверсии окружность 9 точек Эйлера всегда проходит через главную точку циркулярной кривой.*

§ 28. Прежде, чем отметить еще несколько свойств окружности 9 точек Эйлера, приведем новый способ образования циркулярной кривой, основанный на исследованиях *Casey*, а также укажем некоторые необходимые для дальнейшего изложения свойства, так называемого *автополярного треугольника.*

Теорема *Casey*, как будет отмечено ниже, легко может быть поставлена в связь с теоремой § 25 главы I.

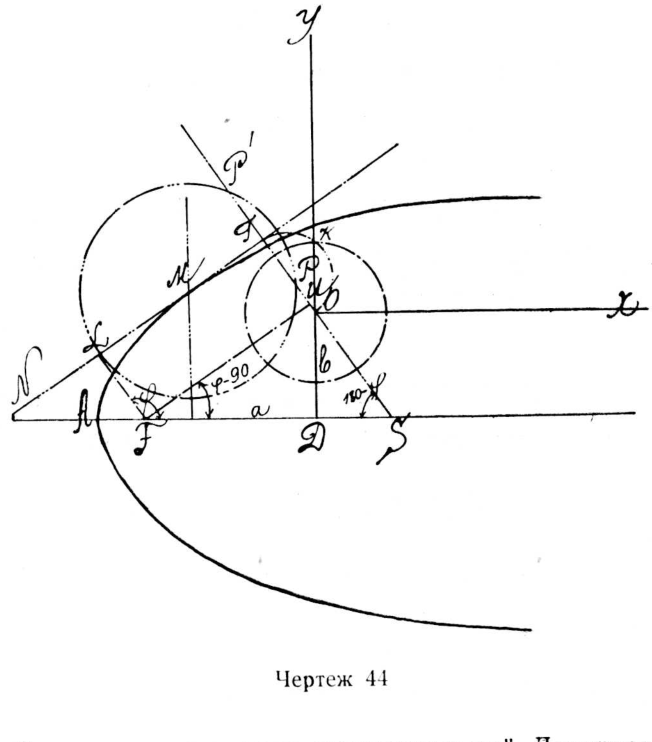
Применив исследования *Casey (Transactions Royal Irish Academy* XXIV p. 457) о способах образования бициркулярных кривых к частному случаю фокального конического сечения (парабол), можно указать следующий способ образования циркулярной кривой 3-го порядка.

Возьмем какую-нибудь постоянную параболу. (Черт. 44). Проведем к ней в какой-ниб. точке М касательную, из некоторой постоянной точки О опустим на эту касательную перпендикуляр ОТ. От основания этого перпендикуляра Т отложим по обе стороны равные отрезки ТР и ТР[1].

Если кроме того точка Р подчинена условию

$$OT^2 - PT^2 = \delta^2,$$

где δ *некоторая постоянная длина, то геометрическим местом точек Р и Р*[1] *при движении точки М по параболе будет некоторая циркулярная кривая.*



Чертеж 44

Точку О возьмем за начало прямоугольной Декартовой системы координат. Координаты фокуса F параболы пусть будут (—a,—b). На отрезке ОТ как на диаметре строим полуокружность.

От точки О откладываем на ней хорду $OK = \delta$.

Радиусом ТК делаем засечки на перпендикуляре ОТ, получим, таким образом, точки Р и Р[1]. Покажем, что геометрическим местом таких точек будет некоторая циркулярная кривая.

Координаты точки P обозначим через x и y, а расстояние OP через r, так что

$$r = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Проведем FL, перпендикуляр на касательную MN, и линию FU // MN. Продолжим также OP до пересечения с осью симметрии параболы в точке S и ось У до пересечения с той же прямой в точке D.

Из чертежа видно, что

$$0T = TU + U0 = FL + U0 = FL + US - 0S.$$

$$\text{но } 0S = \frac{b}{sn\varphi}\ ;\ US = FS\ Sin(\varphi - 90^0) = -FS.cos\varphi.$$

Далее $FS = FD + DS = a + b.ctg\ (180 - \varphi) = a - \dfrac{bcos\varphi}{sn\varphi}$, отсюда $US = -$

$$-\left(a - \frac{bcos\varphi}{sn\varphi}\right) cos\varphi = -acos\varphi + \frac{bcos^2\varphi}{sn\varphi}$$

$$0T = FL - acos\varphi + \frac{bcos^2\varphi}{sn\varphi} - \frac{b}{sn\varphi} = FL - acos\varphi - \frac{b(1 - cos^2\varphi)}{sn\varphi} = FL -$$

$$-acos\varphi - bsn\varphi.$$

Обозначив FL через p, получим окончательно:

$$0T = p - acos\varphi - bsn\varphi.$$

Далее имеем:

$$0T^2 - PT^2 = \delta^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (175)$$

но $PT = 0T - r$, следовательно (175) перепишется так:

$$0T^2 - 0T^2 + 20Tr - r^2 = \delta^2$$

или

$$2r0T = \delta^2 + r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

Подставив в уравнение (176) выражение 0T, найденное выше, мы получим:

$2r(p - acos\varphi - bsn\varphi) = \delta^2 + r^2$, или по раскрытии скобок:

$$r^2 + 2arcos\varphi + 2brsn\varphi + \delta^2 = 2rp \quad \ldots\ldots \quad (177)$$

Для получения геометрического места P надо из уравнения (177) исключить параметры p и φ, определяющие положение определенной касательной MN. Как известно длина перпендикуляра p из фокуса параболы на ее касательную равна $-\dfrac{m}{cos\varphi}$, где 2m параметр параболы, а φ угол этого перпендикуляра с осью x (с полож. напр. ее φ в этом случае будет всегда тупым, отчего у 2m взят знак —).

Таким образом имеем формулу: $p = -\dfrac{m}{cos\varphi}$

Умножим обе части уравнения (177) на r.coφ и подставим в него вместо ρ только что полученное выражение:

$$r\cos\varphi[r^2+2ar\cos\varphi+2br\sin y+\delta^2]=-2mr^2 \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

но $r\cos\varphi=x$; $r\sin\varphi=y$, $r^2=x^2+y^2$ следовательно по переходе к Декартовым координатам уравнение (178) получит вид:

$$x(x^2+y^2)+2ax^2+2bxy+\delta^2x+2m(x^2+y^2)=0 \quad . \quad . \quad (179)$$

Ур-ие (179) может быть переписано и таким образом:

$$(x+2m)(x^2+y^2)+2ax^2+2bxy+\delta^2x=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (180)$$

Уравнение (180), как известно, есть уравнение циркулярной кривой. Теорема таким образом доказана.

Уравнение вещественной ассимптоты этой кривой будет: $x+2m=0$

Координаты главной точки:

$$x_A=-2m;\ y_A=\frac{4m^2-\delta^2}{2b}$$

Координаты центра кривой по формулам (§ 3 гл. I) будут: $-a$ и $-b$, т. е. центр кривой совпадает с фокусом параболы. По перенесении начала координат в центр уравнение кривой примет вид уравнения § 5 главы I, ибо ось У параллельна вещественной ассимптоте кривой.

$$(x^1+2m-a)(x^{12}+y^{12})-(4am+a^2+b^2-\delta^2)x^1-4bmy^1+a^3+ab^2+2ma^2+2mb^2-\delta^2a=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

Здесь $A_2=2m-a$; $D_2=-(4am+a^2+b^2-\delta^2)$; $E_2=-4bm$; $F_2=a^3+ab^2+2ma^2+2mb^2-\delta^2a$

Уравнение (181) получается из (180) путем преобразования координат. Нетрудно показать, что циркулярная кривая (180) есть огибающая переменной окружности, центр которой движется по параболе MAM^1, причем, эта окружность ортогонально пересекает постоянную окружность, имеющую центр в точке O и радиус, равный δ (т. е. последняя окружность будет одной из направляющих окружностей § 25 гл. I.)

Опишем из точки касания M окружность, проходящую через точки P и P^1. Так как соотношение:

$$OT^2-PT^2=\delta^2$$

может быть переписано в виде:

$$(OT+PT).(OT-PT)=\delta^2 \text{ или}$$

$OP.OP^1=\delta^2$, то отсюда следует, что касательная к окружности M из точки O всегда равна δ, т. е. радиусу постоянной окружности.

Отсюда и видно, что окружности O и M пересекаются ортогонально.

Возьмем на параболе точку M_1, бесконечно близкую к M. В таком случае можно считать, что M_1 лежит на касательной к параболе MN. Опишем из точки M_1, приняв ее за центр, окружность, которая прошла бы через точки P и P^1.

Тогда прямая PP^1 будет радикальною осью окружностей M и M_1, ортогонально пересекающих постоянную окружность O, Таким образом точки P и P_1 будут характеристическими точками семейства переменных окружностей M, и следовательно циркулярная кривая, как геометрическое место характеристических точек, будет огибающей семейства окружностей M.

Постоянная окружность O есть окружность инверсии в силу соотношения: $OP.OP^1=\delta^2$, где δ модуль инверсии.

Точка O есть один из центров аналлагматической инверсии кривой.

§ 29. В настоящем § приведем чисто аналитическое доказательство теоремы Casey. Оно, повидимому, указывается здесь впервые..

Если обозначим попрежнему координаты фокуса параболы через —a и —b относительно прямоугольной системы с началом в точке O, параметр параболы обозначим через p, то координаты вершины этой параболы будут: $-\left(a+\frac{p}{2}\right)$ и $-b$.

Следовательно ее уравнение будет:

$$\left(y+b\right)^2=2p\left(x+a+\frac{p}{2}\right) \qquad (181)$$

Угловой коэффициент касательной:

$$\frac{p}{y+b}$$

Уравнение касательной к параболе в точке x_1y_1:

$$(y-y_1)(y_1+b)-p(x-x_1)=0$$

Уравнение нормали: $y=-\frac{y_1+b}{p}.x$ или

$$py+(y_1+b)x=0$$

Длина перпендикуляра OT на касательную из точки O будет

$$OT=\frac{-y_1(y_1+b)+px_1}{\sqrt{(y_1+b)^2+p^2}}$$

Длина перпендикуляра из точки $P(\xi, \eta)$ (ξ и η обозначают текущие координаты искомого геометрического места

$$PT=\frac{(\eta-y_1)(y_1+b)-p(\xi-x_1)}{\sqrt{(y_1+b)^2+p^2}}$$

Далее $OT^2-PT^2=\frac{[px_1-y_1(y_1+b)]^2-[\eta-y_1)(y_1+b)-p(\xi-x_1)]^2}{(y_1+b)^2+p^2}=\delta^2$ (182)

Для получения уравнения искомого геометрического места достаточно исключить x_1 и y_1 из уравнений: 1) параболы, куда вместо текущих коорд. подставлены коорд. точки x_1 y_1 лежащей на ней:

$$\left(y_1+b\right)^2=2p\left(x_1+a+\frac{p}{2}\right) \qquad (183)$$

Уравнения $p\eta+(y_1+b)\xi=0$ (184) (точка $\xi\eta$ лежит на нормали в точке x_1y_1) и уравнения (182). Последнее уравнение предварительно упростим, освободив его от знаменателя и разложив 1-ю часть на множителей, мы получим:

$$[px_1-y_1(y_1+b)+(y_1+b)(\eta-y_1)-p\xi+px_1].[px_1-y_1(y_1+b)+p\xi-px_1-$$
$$-(\eta-y_1)(y_1+b)]=\delta^2[p^2+(y_1+b)^2] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (185)$$

или по приведении подобных членов:

$$[2px_1+(y_1+b)(\eta-2y_1)-p\xi].[p\xi-(y_1+b)\eta]=\delta^2[p^2+(y_1+b)^2] \quad . \; . \; (186)$$

Из (184) получаем:

$$y_1+b=-\frac{p\eta}{\xi};\quad y_1=-\frac{p\eta+b\xi}{\xi}$$

А из (183) найдем: $2px_1=\left\{y_1+b\right\}^2-2pa-p^2=\frac{p^2\eta^2}{\xi}-2pa-$

$$-p^2=\frac{p^2\eta^2-2pa\xi^2-p^2\xi^2}{\xi^2}$$

Подставив только что полученное выражение $2px_1$ и y_1 в (186), мы приведем последнее к виду:

$$\left\{\frac{p^2\eta^2-2pa\xi^2-p^2\xi^2}{\xi^2}-\frac{p\eta}{\xi}\left[\eta+\frac{2p\eta+2b\xi}{\xi}\right]-p\xi\right\}.\left\{p\xi+\frac{p\eta^2}{\xi}\right\}=$$
$$=\delta^2\left[p^2+\frac{p^2.\eta^2}{\xi^2}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (187)$$

Приведя все члены уравнения (187) к общему знаменателю ξ^3 и отбросив его, мы придадим уравнению (187) такую форму:

$$[p^2\eta^2-2pa\xi^2-p^2\xi^2-p\eta(\eta\xi+2p\eta+2b\xi)-p\xi^3](p\xi^2+p\eta^2)=\delta^2\xi(p^2\xi^2+p^2\eta^2)$$

По сокращении на p^2 и приведении подобных членов получаем:

$$(\xi^2+\eta^2)[\delta^2\xi+(\xi^2+\eta^2)p+2a\xi^2+\eta^2\xi+\xi^3+2b\eta\xi]=0 \quad . \; . \; . \; (188)$$

Уравнение (188) распадается на два:
$\xi^2+\eta^2=0$ — точка (начало координат) и ур-ие кривой 3-го порядка:

$$(p+\xi)(\xi^2+\eta^2)+2a\xi^2+2b\eta\xi+\delta^2\xi=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (189)$$

Возвращаясь к обычному обозначению текущих координат через x и y, мы можем переписать уравнение (189) таким образом:

$$(x+p)(x^2+y^2)+2ax^2+2bxy+\delta^2x=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (190)$$

Уравнение циркулярной кривой тождественное с полученным раньше уравнением (180) (только $2m$ заменено буквою p).

Теорема Casey доказана.

Преобразуем уравнение (190) таким образом: Введем полярную систему координат: $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\mathrm{sn}\theta$.

После такого преобразования уравнение (190) сведется к следующему:

$$\rho^3\cos\theta+2a\rho^2\cos^2\theta+2b\rho^2\mathrm{sn}\theta\cos\theta+\delta^2\rho\cos\theta+p\rho^2=0$$

или $\rho^2+2\left\{a\cos\theta+b\,\mathrm{sn}\theta+\frac{p}{2}\sec\theta\right\}\rho+\delta^2=0$ . . . . (191)

Прямая

$$\rho=\alpha, \text{ где } \alpha\text{—корень уравнения } a\cos\alpha+b\sin\alpha+\frac{p}{2}\sec\alpha=-\delta$$

пересечет кривую (194) в двух совпадающих точках ($N_{1,2}$), ибо в этом случае уравнение (191) примет вид:

$$\rho^2-2\delta\rho+\delta^2=0, \text{ откуда}$$

$\rho_1=\rho_2=\delta$. Декартовы координаты точки $N_{1,2}$ будут ($\delta\cos\alpha$, $\delta\sin\alpha$).

Если преобразовать уравнение (190) к параллельным осям x^1y^1, имеющим начало в точке ($\delta\cos\alpha$ и $\delta\sin\alpha$) по формулам

$$x=x^1+\delta\cos\alpha$$

$$y=y^1+\delta\sin\alpha,$$ то члены с первыми степенями x^1 и y^1 не исчезнут (в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой). Это показывает (см. § 25 гл. I), что точка $N_{1,2}$ не есть двойная точка кривой, а только точка прикосновения одной из касательных кривой, проведенных из точки O.

Уравнение (190) показывает, что при $\delta=0$ начало координат будет двойной точкой. Если $\delta\neq0$, то кривая не имеет двойной точки, что видно из предыдущего.

Согласно § 22 главы I уравнения касательных к кривой в двойной точке получим, приравняв нулю совокупность членов 2-го измерения уравнения (190), т. е.

$$(2a+p)x^2+2bxy+py^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (192)$$

Уравнение (192) показывает, что при $\delta=0$ и при $b^2-(2a+p)p>0$ кривая будет иметь узловую точку (§ 22 гл. I).

В этом случае точка $O(0,0)$ лежит вне параболы:

$$\left\{y+b\right\}^2-2p\left\{x+a+\frac{p}{2}\right\}=0$$

При $\left.\begin{matrix} b^2-(2a+p)p=0 \\ \delta=o \end{matrix}\right\}$ и кривая имеет точку возврата. Точка O лежит в этом случае на самой производящей параболе.

Если, наконец, $\delta=0$ и $b^2-(2a+p)p<0$, т. е. если точка $O(_{0,0})$ лежит внутри параболы (181), то двойная точка кривой есть точка изолированная.

Обозначив через ρ_1 и ρ_2 корни уравнения (191), мы можем написать, что

$$\rho_1 . \rho_2=\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (193)$$

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{2}=-\left\{a\cos\theta+b\sin\theta+\frac{p}{2}\sec\theta\right\} \quad \ldots\ldots \quad (194)$$

Соотношение (193) выражает известное уже из § 28 постоянство длины касательной из точки O к образующей окружности (M). А левая часть уравнения (194) представляет собою радиус вектор r точки N—середины хорды циркулярной кривой, образованной секущей из точки O.

Уравнение: $$r+a\cos\theta+b\sin\theta+\frac{p}{2}\sec\theta \quad \ldots\ldots \quad (195)$$

будет уравнением кривой, представляющей геометрическое место точки N.

Уравнение (195) может быть переписано в такой форме:

$$r\cos\theta + a\cos^2\theta + b\sin\theta . \cos\theta + \frac{p}{2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (196)$$

Переходя к Декартовым координатам, мы можем уравнение (196) написать так:

$$x + \frac{ax^2}{r} + \frac{bxy}{r^2} + \frac{p}{2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (197)$$

Освободив уравнение (197) от знаменателя и подставив вместо r^2 равное ему (x^2+y^2), мы окончательно получим:

$$2x(x^2+y^2)+2ax^2+2bxy+p^2x^2+py^2=0$$

или

$$2x(x^2+y^2)+(2a+p)x^2+2bxy+py^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (198)$$

Уравнение (198) показывает, что геометрическим местом точки N *будет также циркулярная кривая, имеющая (при $\delta=0$) двойную точку общую с циркулярной, кривой (190).*

Касательные в этой двойной точке к общим циркулярным кривым также совпадают. Это непосредственно усматривается из сравнения уравнений (190) и (198).

§ 30. Если вершины некоторого треугольника $P_1P_2P_3$ являются полюсами противоположных его сторон по отношению к некоторой окружности, то такой треугольник называется автополярным или полярным треугольником по отношению к данной окружности.

Для того, чтобы Т-к $P_1(x_1y_1)$, $P_2(x_2y_2)$ $P_3(x_3y_3)$ был автополярным по отношению к окружности

$$x^2+y^2=r^2,$$

необходимо и достаточно, чтобы поляра P_1 $xx_1+yy_1-r^2=0$ проходила через P_2 и P_3, т. е. 1) $x_2x_1+y_2y_1-r^2=0$ и 2) $x_3x_1+y_3y_1-r^2=0$.

Применяя то же условие к полярам P_2 и P_3, получим еще одно новое условие: $x_2x_3+y_2y_3-r^2=0$.

Для данной окружности существует бесчисленное множество автополярных треугольников, ибо точка P_1 может быть взята совершенно произвольно, точка P_2 может быть взята в любой точке поляры P_1, точка же P_3 определяется вполне по этим условиям при помощи соотношений 1), 2) 3;

Если точка P_1 взята на самой окружности, то поляра $P_1-P_2P_3$ сливается с касательной в точке P_1, и автополярный треугольник исчезает, ибо P_3 также сливается с P_1.

1) Центр данной окружности является ортоцентром всех треугольников, автополярных по отношению к ней, ибо перпендикуляр, опущенной из полюса на поляру, всегда проходит через центр окружности, по отношению к которой берется поляра. Последнее предложение, вытекающее из самого способа построения поляры, может быть доказано и аналитическим путем.

2) Автополярный треугольник для всякой вещественной окружности всегда тупоугольный, причем вершина тупого угла лежит внутри окружности.

Последнее следует из того (черт. 45), что вершина P_3, как лежащая на поляре P_2, должна быть четвертой гармонической с точкой P_2 по отношению к точкам M и N пересечения прямой P_2N с окружностью и следовательно точка P_3 должна лежать между M и N, если P_2 взята вне отрезка MN.

Для доказательства первой части предложения заметим, что длина

$$P_1P_2^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (199)$$

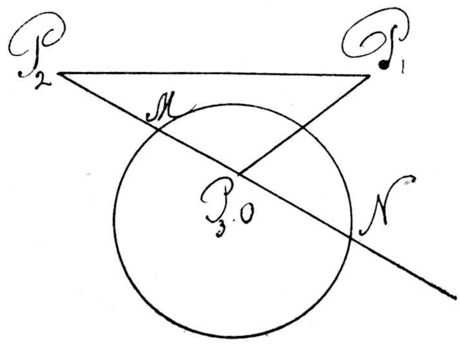
может быть переписана следующим образом:

$P_1P^2=x_1^2+y_1^2-r^2+x_2^2+y_2^2-r^2-2(x_1x_2+y_1y_2-r^2)=0$, а так как в силу условия (1) автополярности треугольника последний член равенства (199) равен 0, то оно в окончательном виде может быть переписано так:

$P_1P_2^2=\pi_1+\pi_2$, где π_1 и π_2 степени

(Potenzen) точек P_1 и P_2 относительно окружности.

Степенью (Potenz) точки x_1y_1 относительно окружности наз. результат подстановки координат x_1y_1 в левую часть уравнения окружности. Для точек, лежащих вне окружности степень >0, для точек внутри окружности степень <0. Для точек самой окружности степень равна 0. Если точка x_1y_1 вне окружности, то степень есть квадрат длины касательной из нее.



Чертеж 45

Аналогично находим, что

$P_2P_3^2=\pi_2+\pi_3$ и $P_1P_3^2=\pi_1+\pi_3$ Из сумм: $\pi_1+\pi_3$, $\pi_2+\pi_3$ и $\pi_1+\pi_3$ наибольшей будет та, у которой оба слагаемые положительны, т. е. сумма соответствующая стороне, лежащей вне окружности: P_1P_2.

Против этой стороны лежит тупой угол, ибо

$\pi_1+\pi_2>(\pi_1+\pi_3)+(\pi_2+\pi_3)$; ($\pi_3<0$. Значит $P_1P_2^2>P_1P_3^2+P_2P_3^2$, и предложение доказано.

Автополярные треугольники по отношению к мнимым окружностям будут остроугольными, ибо в этом случае π_1, π_2 и π_3 будут больше 0. Следовательно

$\pi_1+\pi_2<\pi_1+\pi_3+\pi_2+\pi_3$, т. е. квадрат наибольшей стороны меньше суммы квадратов двух других сторон.

Например, для окружности (черт. 46)

один из автополярных треугольников будет иметь вершины в точках (1,1): (3,1) и (0,4). Точка $P_1(1,1)$ взята произвольно.

Уравнение поляры точки $P_1: x+y-4=0$. Точка P_2 лежит на прямой: $x+y-4=0$. Следовательно давши x произвольное значение, например 3, найдем из уравнения $3+y-4=0$; $y_2=1$.

Поляра точки $P_3: xx_3+yy_3-4=0$. Это уравнение должно быть тождественно с уравнением прямой P_1P_2:

$$y-1=\frac{1-1}{1-3}(x-1) \text{ или } y-1=0,$$

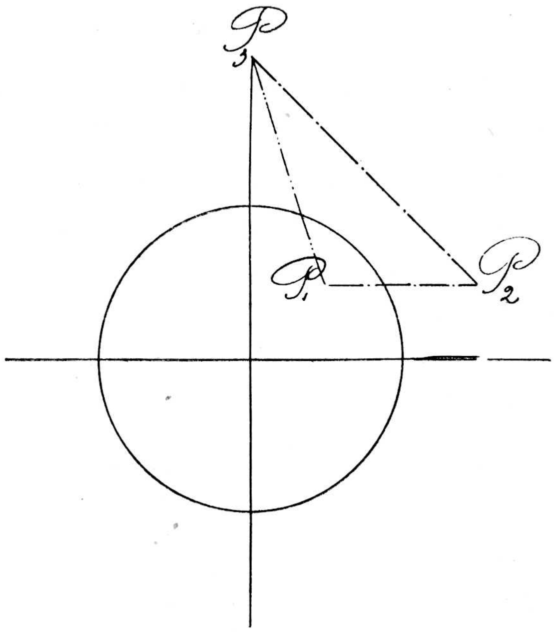
т. с. мы должны иметь: $\dfrac{x_3}{0}=\dfrac{y_3}{1}=-\dfrac{4}{1}$ отсюда $x_3=0$; $y_3=4$.

Пример 2. Автополярным треугольником $P_1(4,3)$; $P_2(-5-3)$ и $P_3(11,-11)$ определяется окружность радиуса ρ, проходящая через его орто центр. (3,1) уравнение этой окружности:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=\rho^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (200)$$

Для определения ρ пользуемся основными условиями: поляра P_1 по отношению к окружности (200) будет:

$$x+2y-5-\rho^2=0.$$



Чертеж 46

Она должна пройти через точки P_2 и P_3 следовательно:

$-5-6-5-\rho^2=0$; $\rho^2=-16$; $\rho=4i$. Окружность—мнимая.

То же выражение для ρ дает и второе условие.

§ 31. Можно также рассматривать Т-к по отношению к любому коническому сечению. Для конического сечения существует бесчисленное множество автополярных треугольников, и в этом случае точку P_1 можно взять произвольно, а вершину P_2 в любой точке поляры P_1.

Если кривую, по отношению к которой рассматривается автополярный треугольник, отнесем к системе трилинейных координат, приняв автополярный треугольник за координатный, то уравнение кривой примет весьма простую форму.

Пусть уравнение конического сечения в трилинейных координатах будет $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0$ . . . . (201)

Напишем уравнение поляры какой-нибудь точки $P_1(x_1y_1z_1)$ по отношению к кривой (201):

$$(Ax_1+By_1+Dz_1)x+(Bx_1+Cy_1+Ez_1)y+(Dx_1+Ey_1+Fz_1)z=0$$

Возьмем точку P_1 в одной из вершин координатного треугольника, тогда $x_1=0; y_1=0$, и уравнение (3) примет вид:

$$Dz_1x+Ez_1y+Fz_1z=0$$

или

$$Dx+Ey+Fz=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (202)$$

Если мы хотим, чтобы поляра (202) была противоположной стороной координатного треугольника, то уравнение (202) должно быть эквивалентно с уравнением стороны, противолежащей вершине: ($x_1=0$ $y_1=0$). Уравнение этой стороны: $z=0$. Уравнение (202) будет эквивалентно $z=0$ при условии:

$$D=0;\ E=0.$$

Повторив такие же рассуждения относительно вершин

$$P_2(x_2=0, z_2=0) \text{ и } P_3(y_3=0; z_3=0),$$

мы в добавление к двум предыдущим условиям ($D=0; E=0$) получим еще одно условие:

$$B=0.$$

Таким образом мы видим, что уравнение конического сечения, отнесенное к автополярному треугольнику, будет иметь вид:

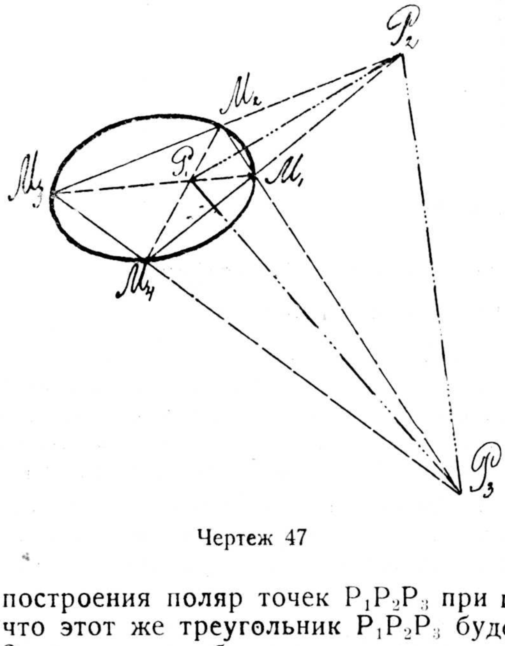
$$Ax^2+By^2+Cz^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (203)$$

т е. будет заключать только члены с квадратами координат.

Такую же форму будет иметь и тангенциальное уравнение кривой.

Как частный случай получаем уравнение кривой, отнесенное к паре сопряженных диаметров ее. За одну из вершин автополярного треугольника берем центр. Полярой его будет, как известно, бесконечно удаленная прямая.

§ 32. Возьмем кривую 2-го порядка (черт. 47) и впишем в нее четыреугольник $M_1M_2M_3M_4$. Треугольник $P_1P_2P_3$, вершинами которого служат точки пересечения диагоналей полного четыреугольника $M_1M_2M_3M_4$, будет автополярным для этой кривой 2-го порядка.



Чертеж 47

Сказанное непосредственно вытекает из известного способа построения поляр точек $P_1P_2P_3$ при помощи одной линейки. Очевидно, что этот же треугольник $P_1P_2P_3$ будет автополярным для всех кривых 2-го порядка, образующих пучек с центрами в точках $M_1M_2M_3M_4$.

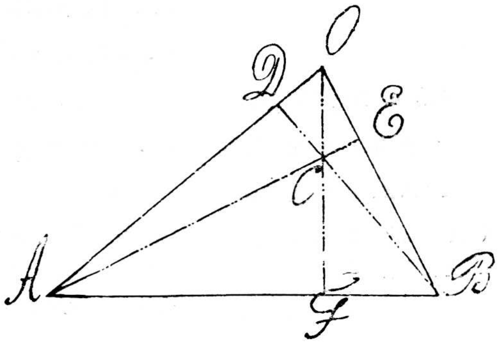
§ 33. Возвращаясь к рассмотрению свойств $\triangle$-ков, получаемых путем попарного соединения четырех центров аналлагматической инверсии циркулярной кривой, мы можем, на основании предыдущего, высказать относительно их следующие предложения:

1) Каждый из четырех центров аналлагматической инверсии есть центр окружности, по отношению к которой треугольник, составленный путем соединения остальных трех центров, будет автополярным.

2) Четыре окружности, по отношению к которым четыре упомянутые выше треугольника будут автополярными, пересекают друг друга ортогонально.

Предложение 1-е вытекает непосредственно из первой теоремы § 30.

Для доказательства предложения 2) обозначим радиусы окружностей, по отношению к которым треугольники (чер. 48):



Чертеж 48

$$ABC;\ OBC;\ OCA \text{ и } OAB$$

автополярны через δ (центр в точке 0)
r_1 (центр в точке A)
r_2 (центр в точке B)
r_3 (центр в точке C)
и вычислим эти радиусы в функциях углов Т-ка ABC и радиуса описанной около него окружности.

Из Т-ка ABC имеем: $\frac{AC}{snB} = \frac{BC}{snA} = \frac{AB}{snC} = 2R$ . . . . (204)

Далее можем написать, что $\delta^2 = AO.OD$ . . . . . . (205)

Точка D лежит на перпендикуляре из точки A на поляру этой точки относительно окружности 0 (для нее BC и будет полярой полюса A). A точка пересечения поляры с таким перпендикуляром есть инверсионная точка по отношению к полюсу. Следовательно

$$\delta^2 = A0.0D.$$

Но $0D = CD.\ tg0CD = CD.tgFCB = CD.ctgB$ . . . . . (206)

$CD = AC.\cos(180 - C) = -AC.\cos C$. . . . . . . (207)

Отсюда $OD = -AC.\cos C.ctgB = -2R.sn\,B\cos C.ctgB = -2R\cos C.\cos B$ (208)

$AD = AC.sn(180^0 - C) = AC.snC = 2R.snB.sn.C.$ . . . (209)

Далее $OA = AD + OD = 2R(\sin B.snC - \cos C.\cos B) = -2R\cos(B + C)$. (210)

$= -2R\cos(180 - A) = 2R.\cos A.$

Следовательно: $\delta^2 = AO.OD = -4R^2\cos A.\cos B.\cos C.$ . . . (211)

Формула (211) показывает, что радиус δ окружности, по отношению к которой Т-к ABC автополярен, будет вещественным в том случае, если один из углов Т-ка больше $\frac{\pi}{2}$, что вполне согласуется со сказанным в § 30 (теорема 2-я).

Подобным же образом найдем, что:

$$r_1^2=4R^2\cos A\sin B.\mathrm{sn}C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

$$r_2^2=4R^2\cos B\mathrm{sn}C.\mathrm{sn}A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

$$r_3^2=4R^2\cos C\mathrm{sn}A.\mathrm{sn}B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (214)$$

Из четырех радиусов три всегда вещественны, а один мнимый.

Это непосредственно видно из формул (211, 212), (213) и (214).

Вычислим далее

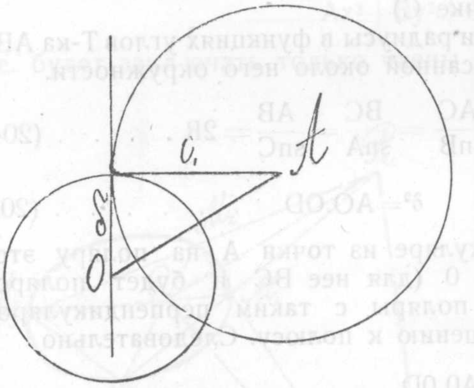
$$OA^2-\delta^2=4R^2\cos^2A+4R^2\cos A\cos B.\cos C=4R^2\cos A(\cos A+\cos B\cos C)=$$
$$=4R^2.\cos A\,[\cos(180-(B+C))+\cos B.\cos C]=4R^2\cos A[-\cos B\cos C+$$
$$\mathrm{sn}B\mathrm{sn}C+\cos B\cos c]=4R^2\cos A\mathrm{sn}B.\mathrm{sn}C=r_1^2, \text{ т. е.}$$

$$\delta^2+r_1^2=OA^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

Условия (215) есть ни что иное, как условие ортогональности окружностей (0) и (A) (черт. 49).

Аналогично получим, что $\delta+r_2^2=OB^2$ . . . . (216)

и $\delta+r_3^2=OC^2$ . . . . (217)



Чертеж 49

Следовательно, окружности, по отношению к которым автополярны треугольники центров аналлагматической инверсии, ортогональны друг к другу, и 2-е предложение, таким образом, доказано.

Напишем уравнения всех этих четырех окружностей. Примем сторону $AB=c$ за ось x прямоугольной Декартовой системы координат, а точку A за начало координат. Длину стороны AC обозначим через b.

Тогда координаты центров инверсии будут $B(c,0)$; $A(0,0)$; $C(b\cos A, b\mathrm{sn}A)$

$O\left|\, b\cos A;\ \dfrac{-b\cos^2A+c\cos A}{\mathrm{sn}A}\right|$. Напишем теперь уравнения 4-х окружностей:

Уравнение окружности с центром в точке:

$$B:(B)\ (x-c)^2+y^2=r_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (218)$$

$$A:(A)\ x^2+y^2=r_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (219)$$

$$(C):(x-b\cos A)^2+(y-b\mathrm{sn}A)^2=r_3^2 \quad . \quad . \quad (220)$$

$$(O):(x-b\cos A)^2+\left|y-\frac{\cos A(c-b\cos A)}{\mathrm{Sn}A}\right|^2=\delta^2 \quad . \quad . \quad (221)$$

В случае, соответствующем чертежу (50), третья окружность мнимая.

В раскрытом виде уравнения 218—221 перепишутся следующим образом:

(A) $x^2+y^2-r_1^2=0$;

(B) $x^2+y^2-2cx+c^2-r_2^2=0$;

(C) $x^2+y^2-2b\cos Ax-2b\,\mathrm{sn}Ay+b^2-r_3^2=0$;

(O) $x^2+y^2-2b\cos Ax-2\mathrm{ctg}A(c-b\cos A)y+b^2\cos^2A+\mathrm{ctg}^2A(c-b\cos A)^2-\delta^2=0$;

На основании последних можно доказать еще одно свойство этих четырех окружностей.

3) Радикальные оси каждой пары четырех окружностей (A) (B) (C) и (O) проходят через центры остальных двух окружностей.

Напишем уравнение радикальной оси окружностей (A) и (B)

$$-r_1^2+2cx-c^2+r_2^2=0 \text{ или}$$

$$2cx+r_2^2-r_1^2-c^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

Уравнение (222) должно удовлетворяться координатами точек:

$$C(b\cos A,\ b\,\mathrm{sn}A) \text{ и } O\ [b\cos A,\ \mathrm{ctg}A(c-b\cos A)]$$

Очевидно, что для обеих точек достаточно проверить подстановку $x=b\cos A$. Сделав эту подстановку, получаем из ур-ия (222) и (212) и (213):

$$2bc\cos A+4R^2\cos B.\mathrm{sn}C.\mathrm{sn}A-4R^2\cos A\,\mathrm{sn}B.\mathrm{sn}C-4R^2\mathrm{sn}^2C=0 \quad . \ (223)$$

Подставив в (223) выражения b и c из ур-ий (204), находим

$$8R^2\,\mathrm{sn}.B.\mathrm{sn}C.\cos A+4R^2\cos B.\mathrm{sn}C.\mathrm{sn}A-4R^2\cos A\,\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}C-4R^2\mathrm{sn}^2C=0$$

или

$$4R^2\cos B\,\mathrm{sn}C\,\mathrm{Sn}.A+4R^2\cos A\,\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}C-4R^2\mathrm{sn}^2C=0.$$

Сократив на $4R^2$ и взяв snC за скобки, получим

$$\mathrm{sn}C(\mathrm{sn}A\cos B+\cos A\,\mathrm{sn}B)-\mathrm{sn}^2C=0$$

$$\text{или } \mathrm{sn}C.\mathrm{sn}(180-C)-\mathrm{sn}^2C=0, \text{ т. е. } \mathrm{sn}^2C-\mathrm{sn}^2C=0.$$

Предложение (3) для радикальной оси окружностей (A) и (B) доказано.

Напишем теперь уравнение радикальной оси окружностей (0) и (A) и покажем, что она пройдет через точки C ($b\cos A$; $b\,\mathrm{sn}A$) и B (c, o). Уравнение радикальной оси (0) и (A) будет:

$$-2b\cos Ax-2\mathrm{ctg}A(c-b\cos A)y+\mathrm{ctg}^2A(c-b\cos A)^2+b^2\cos^2A-\delta^2+r_1^2=0 \quad (224)$$

Условием, что прямая (224) пройдет через точку B, будет:

$$-2bc\cos A+\mathrm{ctg}^2A(c-b\cos A)^2+b\cos^2A-\delta^2+r_1^2=0.$$

Заменив b, c, δ и r_1 их выражениями через R, мы получим:

$$-8R^2\cos A.\mathrm{Sn}B.\mathrm{sn}C+4\frac{R^2\cos^2A}{\mathrm{Sn}^2A}(\mathrm{Sn}C-\mathrm{Sn}B\cos A)^2+b^2\cos^2A-\delta^2+r_1^2=0$$

или

$$-8R^2\cos A\,\mathrm{sn}B.\mathrm{sn}C+4R^2\cos^2A.\cos^2B+4R^2\cos^2A\,\mathrm{sn}^2B+4R^2\cos A.\cos B.\cos C+$$
$$+4R^2\cos A.\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}C=0$$

по приведении подобных членов находим:

$$4R^2\cos^2A+4R^2\cos A(\cos B\cos C-\sin B\,\mathrm{sn}\,C)=0 \text{ или}$$

$$4R^2\cos^2A+4R^2\cos A.\cos(180-A)=0, \text{ т.е. } 4R^2\cos^2A-4R^2\cos^2A=0.$$

Условие удовлетворяется.

Аналогично покажем, что прямая (224) проходит через C($b\cos A$, $b\,\mathrm{sn}A$)

Условием такого прохождения будет:

$$-2b^2\cos^2A-2bc\cos A+2b^2\cos^2A+\mathrm{ctg}^2A(c-b\cos A)^2+b^2\cos^2A-\delta^2+r_1^2=0,$$

или по приведении подобных членов:

$$\mathrm{ctg}^2A(c-b\cos A)^2+b^2\cos^2A-\delta^2-r_1^2=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (225)$$

так как $2bc\cos A=2r_1^2$ [на основании формул (204) и (212)].

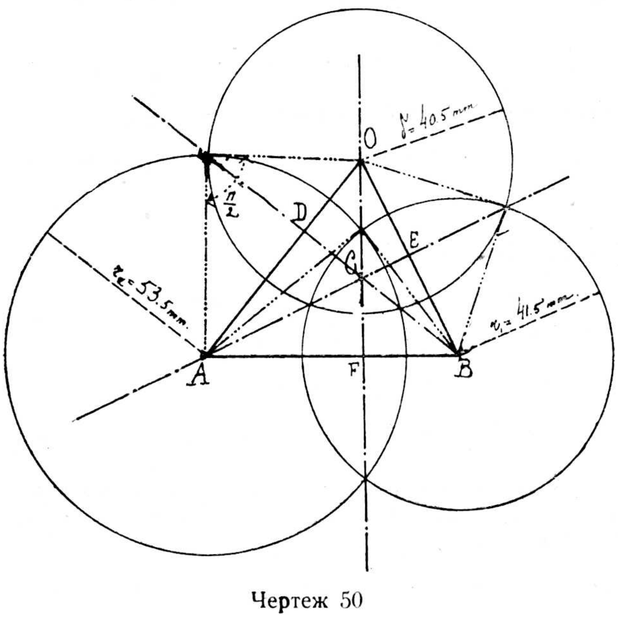
Заменив в (225) c b δ и r_1 их выражениями, а $\mathrm{sn}C$ через $\mathrm{Sn}(A+B)$ и сократив результат на $4R^2$, мы получим:

$$\cos^2A\cos^2B+\cos^2A\,\mathrm{Sn}^2B+\cos A.\cos(B+C)=0, \text{ или}$$

$$\cos^2A+\cos A\cos(180-A)=0, \text{ т. е. } \cos^2A-\cos^2A=0.$$

Предложение (3) относительно радикальной оси (0) и (А) доказано.

Совершенно таким же образом доказывается, что радикальная ось (0) и (В) пройдет через А и С.



Чертеж 50

4) Так как радикальными осями каждой пары окружностей служат (см. черт. 50) высоты треугольника А0В, то можно сказать, что все четыре упомянутые окружности имеют общий радикальный центр—ортоцентр треугольника А0В.

На чертеже 50 для треугольника АВС со стороною АС=47mm и углами А=26° В=39° и С=115°, вычислено по формулам (211 — 214) при помощи логарифмических таблиц радиусы тех окружностей, по отношению к которым Т-ки АВС, АСО и ОСВ автополярны $\delta=40{,}5$ mm; $r_1=41{,}5$ mm. $r_2=53{,}5$ mm. Окружность, по отношению к которой автополярен ТкА0В, будет мнимая, ибо треугольник А0В—остроугольный. Окружности—ортогональны.

§ 34. В § 28 было показано, что О—центр постоянной окружности служит центром аналлагматической инверсии. В этом же нетрудно убедиться при помощи формул инверсии $x=\dfrac{\delta^2x'}{x'^2+y'^2}$ и $y=\dfrac{\delta^2y'}{x'^2+y'^2}$)

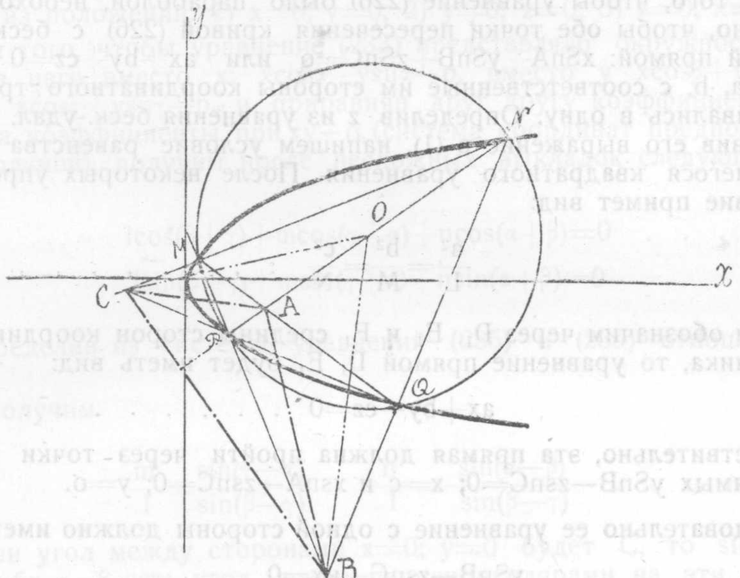
Раньше же мы показали, что вообще циркулярная кривая имеет четыре центра аналлагматической инверсии.

Можно показать, что вершины Т-ка ABC (черт. 51), образованного пересечением диагоналей полного четыреугольника MNPQ, полученного по парным соединениям точек пересечения фокальной параболы (§ 28 гл. 2) и постоянной окружности 0, суть также центры аналлагматической инверсии циркулярной кривой, образованной по способу, указанному в §§ 28 и 29, причем модулями инверсии будут r_1, r_2 и r_3 (см. § 33). Четвертый центр 0 будет ортоцентром треугольника ABC.

Треугольник ABC автополярен для всех кривых пучка с центрами MNPQ (см. черт. 47) следовательно и для окружности 0.

Этим доказывается, что 0 есть ортоцентр Т-ка ABC.

Так как 0 есть центр инверсии с модулем δ, то $0B.0D=\delta^2 0C.0E=\delta^2$ и $OA.0F=\delta^2$.



Чертеж 51

Радиусы окружностей: $B-r_2$; $A-r_1$ и $C-r_3$.

На основании § 33 имеем:

$$r_1^2+\delta^2=0A^2$$
$$r_2^2+\delta^2=0B^2$$
$$r_3^2+\delta^2=0C^2$$

Подставив выражение δ^2 из последнего равенства во второе из предыдущих равенств, мы получим:

$$0C.0E=0C^2-r_3^2 \quad \text{или} \quad 0C(0C-0E)=r_3^2.$$

Окончательно получим: $0C.CE=r_3^2$.

Аналогичным путем найдем:

$$B0.BD=r_2^2 \quad \text{и}$$
$$A0.AF=r_1^2$$

Теорема доказана.

§ 35. Укажем еще одно свойство окружности 9 точек Эйлера для треугольников с вершинами в центрах аналлагматической инверсии циркулярной кривой: *Общая окружность девяти точек, треугольников, образованных путем соединения каких-либо трех центров аналлагматической инверсии циркулярной кривой, проходит через фокус фокальной параболы кривой (особенный фокус циркулярной кривой).*

Для доказательства этого предложения воспользуемся трилинейными координатами, приняв автополярный треугольник за координатный § 31).

Так как треугольник, полученный от соединения трех центров инверсии, будет автополярным для окружности, имеющей центр в четвертой точке, то уравнение параболы будет иметь вид:

$$Lx^2+My^2+Nz^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (226)$$

Для того, чтобы уравнение (226) было параболой, необходимо и достаточно, чтобы обе точки пересечения кривой (226) с бесконечно удаленной прямой: $xSnA+ySnB+zSnC=o$ или $ax+by+cz=0$ [A, B и C углы, a, b, c соответственные им стороны координатного треугольника] сливались в одну. Определив z из уравнения беск.-удал. прямой и подставив его выражение в (1), напишем условие равенства корней получившегося квадратного уравнения. После некоторых упрощений это условие примет вид:

$$\frac{a^2}{L}=\frac{b^2}{M}=\frac{c^2}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (227)$$

Если обозначим через D_1, E_1 и F_1 средины сторон координатного треугольника, то уравнение прямой D_1 E_1 будет иметь вид:

$$ax+by-cz=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228)$$

Действительно, эта прямая должна пройти через точки пересечения прямых $ySnB-zsnC=0$; $x=c$ и $xsnA-zsnC=0$; $y=o$.

Следовательно ее уравнение с одной стороны должно иметь вид:

$$ySnB-zsnC-кx=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (229)$$

а с другой:

$$xsnA-zsnC-ly=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

Так как уравнения (229) и (230) должны изображать одну и ту же прямую и коэффициенты при z у них равны, то равны и остальные коэффициенты соответственно, т. е.

$$l=-SnB \text{ и } k=-SnA$$

След. искомая прямая имеет уравнением:

$$xsnA+ysnB-zsnC=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231)$$

Заменив snA, snB и snC в уравнении (231) пропорциональными им a b c, мы и получим уравнение ее в форме

$$ax+by+cz=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

Условие, чтобы прямая (232) касалась параболы (226), будет то же самое (227), которое должно уже быть выполнено раньше.

Аналогично можно показать, что и прямые E_1F_1 ($by+cz-ax=o$) и F_1D_1 ($ax-by+cz=o$) также касаются параболы (226).

Отсюда выходит, что парабола (226) касается сторон треугольника $D_1E_1F_1$ имеющего вершины в срединах сторон координатного треугольника ABC.

Окружность девяти точек Т-ка ABC, как было показано выше, пройдет через точки $D_1E_1F_1$ т. е. будет описана около Т-ка D_1E_1F.

Остается только показать, что окружность, описанная около трех касательных к параболе, проходит через фокус ее.

§ 36. Напишем уравнение в окружности, описанной около треугольника, составленного тремя касательными к параболе.

Уравнение кривой 2-го порядка, описанной около Т-ка, стороны которого выражаются уравнениями (в сокращенной форме) $x=o$; $y=o$) $z=o$ будет:

$$lyz+mzx+nxy=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (233)$$

Действительно, уравнение (233) выражает кривую 2-го порядка, проходящую через вершины треугольника, ибо оно удовлетворяется каждым из положений: 1) $x=0$; $y=0$; 2) $y=0$; $z=0$; 3) $z=0$; $x=0$.

Для того, чтобы уравнение (233) представляло окружность, подставим в него вместо x: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p$, вместо y $x\cos\beta+y\mathrm{sn}\beta-p_1$; вместо z $x\cos\gamma+y\mathrm{sn}\gamma-p_2$ и приравняв друг другу коэффициенты при x^2 и y^2, а коэффициенты при $xy-0$, (система координат предполагается прямоугольной), получим после несложных выкладок следующие два условия:

$$l\cos(\beta+\gamma)+m\cos(\gamma+\alpha)+n\cos(\alpha+\beta)=0 \quad \ldots\ldots \quad (234)$$

$$l\sin(\beta+\gamma)+m\sin(\gamma+\alpha)+n\sin(\alpha+\beta)=0 \quad \ldots\ldots \quad (235)$$

Определив из системы уравнений (235) и (235) отношения $\frac{m}{l}$ и $\frac{n}{l}$, получим

$$\frac{m}{l}=\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)} \qquad \frac{n}{l}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\beta-\gamma)} \quad \ldots\ldots \quad (236)$$

Если угол между сторонами $x=0$; $y=0$ будет C, то $\sin(\alpha-\beta)=$ $=\sin C$, ибо $\alpha-\beta$ есть угол между перпендикулярами на эти стороны. Точно также

$$\sin(\beta-\gamma)-\sin A \quad \text{и}$$

$$\sin(\gamma-\alpha)=\sin B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (236a)$$

Заменив в уравнении (233) l m и n им пропорциональными $\mathrm{sn}(\beta-\gamma)$ $\mathrm{sn}(\gamma-\alpha)$ и $\sin(\alpha-\beta)$ и приняв во внимание соотношения (236), получим уравнение окружности, описанной около треугольника, составленного касательными к параболе (233) в таком виде:

$$yz\,\mathrm{sn}A+zx\,\mathrm{sn}B+xy\,\mathrm{sn}C=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (237)$$

Написав вместо x y и z их полные выражения: $x\cos\alpha+y\mathrm{sn}\alpha-p$ и т. д., вычислим свобод. член уравнения (237). Он будет, как нетрудно вычислить, равен следующему выражению:

$$-p_1p_2\mathrm{sn}A-pp_2\mathrm{sn}B-pp_1\mathrm{sn}C$$

или в силу формул (236a):

$$-[p_1p_2\sin(\beta-\gamma)+p.p_2\sin(\gamma-\alpha)+pp_1\mathrm{sn}(\alpha-\beta)] \quad \ldots \quad (238)$$

Возьмем начало прямоугольной Декартовой системы координат, к которым отнесена кривая (237) после ее преобразования, в фокусе параболы, тогда, как известно, если $x=0$ - касательная к этой параболе; $p=\frac{m}{\cos\alpha}$ и аналогично $p_1=\frac{m}{\cos\beta}$, а $p_2=\frac{m}{\cos\gamma}$, если $y=0$ и $z=0$ также касательны к параболе, у которой $p=2m$.

В таком случае выражение (238) получает следующий вид:

$$\frac{-m^2}{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}[\sin(\beta-\gamma).\cos\alpha+\sin(\gamma-\alpha)\cos\beta+\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma] \quad (239)$$

Трехчлен, стоящий в квадратных скобках, выражения (239), тождественно равен 0, в чем легко убедиться по раскрытии простых скобок.

Таким образом доказано, что окружность, проходящая через вершины треугольника, составленного тремя касательными к параболе, проходит через начало координат, т. е. через фокус параболы.

Это же предложение может быть доказано и чисто геометрическим путем. См. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Neunte Auflage, Berlin 1922, Erster Teil, § 212, S. 396.

§ 3. В заключение 2-й главы укажем еще одно свойство директрисс каждой из фокальных парабол циркулярной кривой 3-го порядка. Это свойство выражается следующей теоремой:

Директриссы четырех фокальных парабол проходят соответственно через центры четырех окружностей, описанных около четырех треугольников, образованных соединением центров инверсии циркулярной кривой.

Уравнение параболы, отнесенной к автополярному треугольнику, будет:

$$l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2=0$$

при условии:

$$\frac{a}{l}+\frac{b^2}{m}+\frac{c^2}{n}=0$$

a, b и c длины сторон координатного Т-ка ABC.

Уравнение поляры полюса $(\alpha_0\beta_0\gamma_0)$ будет:

$$l\alpha\alpha_0+m.\beta\beta_0+n\gamma\gamma_0=0.$$

Координаты фокуса параболы:

$$\left\{\frac{m+n}{a}, \frac{n+l}{b} \quad \frac{l+m}{c}\right\}$$

Уравнение директриссы, как поляры фокуса, будет:

$$\frac{l(m+n)}{a}.\alpha+\frac{m(n+l)}{b}.\beta+\frac{n(l+m)}{c}.\gamma=0.$$

Координаты центра окружности, описанной около координатного треугольника, пропорциональны cosA, cosB и cosC.

Центр описанной окружности лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из средин сторон Т-ка.

Уравнение двух из таких перпендикуляров:

$$\alpha.\mathrm{sn}A-\beta\mathrm{sn}B+\gamma.\mathrm{sn}(A-B)=0 \quad \ldots\ldots \quad (240)$$

$$\beta\mathrm{sn}B-\gamma.\mathrm{sn}C+\alpha.\sin(B-C)=0 \quad \ldots\ldots \quad (241)$$

Из (240) и (241) находим:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{snC-\sin(A-B)}{snA+\sin(B-C)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (242)$$

$$\frac{\beta}{\gamma}=-\frac{\sin(A-B).\sin(B-C)+snAsnC}{snB[snA+\sin(B-C)]} \quad . \; . \; . \; . \quad (243)$$

Из (242) и (243) находим, что:

$$\frac{\alpha}{snC-sn(A-B)}=\frac{\beta}{\dfrac{-sn(A-B).sn(B-C)+snAsnC}{snB}}=$$

$$=\frac{\gamma}{sn(A)+sn(B-C)}$$

или

$$\frac{\alpha}{sn(A+B)-sn(A-B)}=\frac{\beta}{\dfrac{-sn(A-B)sn(B-C)+sn(A+B).sn(B+C)}{snB}}=$$

$$=\frac{\gamma}{sn(B+C)+sn(B-C)}$$

Заменив разность и сумму sin их выражениями через произведения, а произведения sin—половиной разности косинусов, мы придадим последним соотношениям такую форму:

$$\frac{\alpha}{2\cos A\; snB}=\frac{\beta}{2\cos B.snB}=\frac{\gamma}{2\cos C.snB}$$

по сокращении на $\dfrac{1}{snB}$ окончательно получаем:

$$\frac{\alpha}{\cos A}=\frac{\beta}{\cos B}=\frac{\gamma}{\cos C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (244)$$

Напишем условие, чтобы директрисса фокальной параболы прошла через центр окружности, описанной около ее автополярного треугольника.

Это условие будет иметь такой вид:

$$l(m+n)\frac{\cos A}{snA}+m(n+l)\frac{\cos B}{snB}+n(l+m)\frac{\cos C}{snC}=0 \quad . \quad (245)$$

a b и c в уравнении директриссы заменены пропорциональными им выражениями snA, snB и snC из (244)

Уравнение (245) можно переписать таким образом:

$$lm(ctgA+ctgB)+mn(ctgB+ctgC)+nl(ctgC+ctgA)=0 \quad . \quad (246)$$

Заменив суммы ctg, найдем:

$$\frac{lm\sin(A+B)}{snA\; snB}+\frac{mnsn(B+C)}{snB.snC}+\frac{nl\sin(C+A)}{snC\; snA}=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (247)$$

Заменив в уравнении (247) $\operatorname{sn}(A+B)$, $\operatorname{sn}(B+C)$ и $\operatorname{sn}(C+A)$ через $\operatorname{sn}C$ $\operatorname{sn}A$ и $\operatorname{sn}B$, а затем sin пропорциональными им количествами a, b c, мы получим:

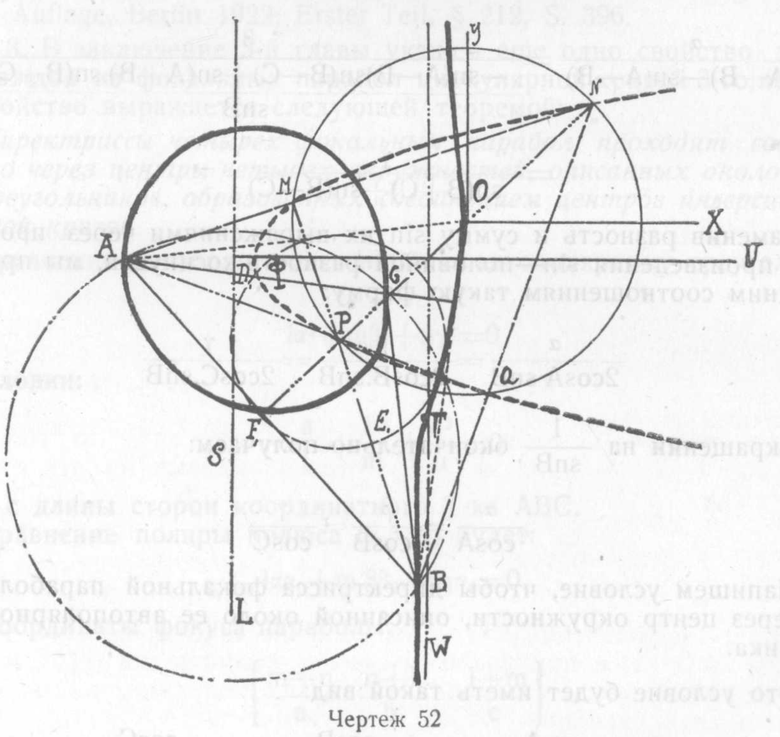
$$\frac{lmc}{ab}+\frac{mna}{bc}+\frac{nlb}{ac}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (248$$

Умножив все члены условия (248) на abc и разделив затем на lmn, мы можем переписать условие (248) в такой форме:

$$\frac{a^2}{l}+\frac{b^2}{m}+\frac{c^2}{n}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$

Соотношение (249) есть ни что иное как соотношение второе настоящего §. Оно всегда выполняется, если фокальная кривая есть парабола, как это имеет место в нашем случае.

Теорема таким образом доказана.



Чертеж 52

На чертеже 52 начерчена циркулярная кривая при $a=-10$; $b=-2$ $p=2$ и $\beta=9$ [см. уравнение (190) § 29].

Ее уравнение будет:

$$x(x^2+y^2)+22x^2+4xy+2y^2+81x=0.$$

Она построена по точкам. Ввиду того, что $\delta\neq0$ кривая не имеет, согласно § 29, двойной точки и состоит из овала и бесконечной ветви.

Фокальная парабола:

$$(y+2)^2=4(x+11)$$

начерчена пунктиром.

Постоянная окружность начерчена сплошной линией.

M,N,P и Q точки пересечения параболы и окружности δ. Полярным треугольником будет Т-к ABC. O его ортоцентр. Пунктиром начерчен круг 9 точек автополярного треугольника ABC. Этот круг проходит через точки D_1 E_1 и F_1 средины сторон Т-ка ABC.

Согласно § 35 окружность 9 точек пройдет и через фокус Ф фокальной параболы. Точка Ф является вместе с тем и особенным фокусом циркулярной кривой.

KL—директрисса фокальной параболы проходит через точку $\mathfrak{S}$—центр окружности, описанной около автополярного треугольника ABC.

Эта окружность начерчена пунктиром с двумя точками. Бесконечная ветвь циркулярной кривой касается оси 0У в начале координат.

A,0,B и C вершины циркулярной кривой. Касательные к ней в этих точках параллельны вещественной ассимптоте кривой VW. T главная точка циркулярной кривой.

ГЛАВА III

Проективные свойства циркулярных кривых

§ 1. Циркулярные кривые в области кривых 3-го порядка играют роль, аналогичную окружности в области конических сечений.

Как известно, все кривые 2-го порядка могут быть получены, как сечения прямого кругового конуса соответственным образом направленными плоскостями. Другими словами все кривые 2-го порядка можно рассматривать как перспективу окружности.

§ 2. Укажем в общих чертах основания теории конической проекции или перспективы.

Если какая-нибудь кривая C начерчена на некоторой плоскости P и если из какой-нибудь точки пространства S как вершины опишем коническую поверхность, имеющую своей направляющей данную кривую C, то всякая кривая C_1 пересечения полученной конической поверхности с произвольной плоскостью P_1 называется конической проекцией кривой C на плоскость P_1 или перспективой кривой C на плоскости P_1.

Теория проекций представляет собою могущественный метод для получения различных свойств кривых при помощи свойств кривых более простого вида.

Точки M иM_1, лежащие на одной образующей конуса, называются соответственными. Центральной проекцией точки M будет таким образом соответственная ей точка M_1.

Проекцией какой-либо прямой служит очевидно другая прямая. Если какая-либо прямая L пересекает кривую C в n точках M_1 M_2. M_n, то ее проекция L_1 пересечет проекцию, кривой C_1 в n соответственных точек M_1^1 $M_2^1 \ldots M^1_n$.

Так как каждая прямая пересекает кривую n-го порядка в n точках (вещественных или мнимых), то отсюда следует, что коническая проекция кривой n-го порядка есть также кривая n-го порядка.

Точно также касательная к кривой проектируется в касательную к ее проекции.

При помощи элементарной геометрии можно показать, что проекция $\triangle$-ка на параллельную плоскость дает $\triangle$-к, подобный данному: Так как каждая кривая может быть рассматриваема как предел периметров многоугольников, то отсюда заключаем, что центральная проекция кривой на параллельную плоскость есть кривая, подобная данной.

Возьмем две произвольные плоскости P и P_1, пересекающиеся по прямой KN. (черт. 53). Пусть точки плоскости P проектируются на плоскость P_1 из какой-нибудь точки пространства S.

Проекцию произвольной прямой AB плоскости P на P_1 мы получим, спроектировав какие-нибудь две ее точки.

Прямая A^1B^1 должна пройти через точку Z пересечения прямой AB и KN, Точка Z есть сама себе соответствующая. При удалении точки B вправо точка B будет также изменять свое положение на P_1.

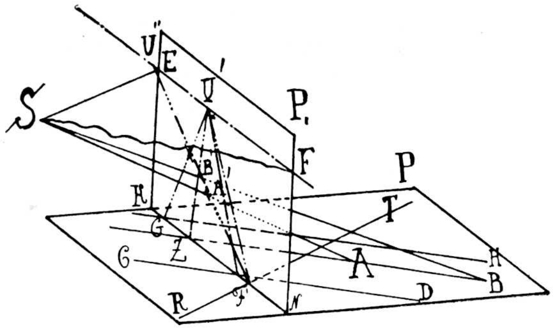
Если В уйдет на ∞, то ее проекцией будет точка U^1 пересечения плоскости P_1 с лучем $SU_1 // AB$. При удалении точки В на ∞ в обратном направлении (влево) ее проекция снова совпадет с U^1.

Итак. бесконечно удаленные элементы прямой отображаются в одной точке.

Проекцию АВ можно строить по проекциям Z и U^1, прямая ZN^1 и будет очевидно проекцией прямой АВ.

Если на плоскости Р возьмем ряд параллельных прямых: АВ, CD GH, то им соответствует один и тот же луч, исходящий из Ś.

Следовательно изображения этих прямых пройдут через одну и ту же точку U^1, соответствующую бесконечно удаленной.



Чертеж 53

Следовательно, параллельные прямые пересекаются в одной бесконечно удаленной точке.

Возьмем на плоскости Р еще какую-нибудь прямую RT (ее проекцией будет R^1T^1); бесконечно удаленная точка RT получится в пересечении луча $SU'' // RT$.

Отсюда заключаем, что бесконечно удаленные точки плоскости Р проектируются по одной прямой EF пересечения плоскости P_1 с плоскостью, проходящею через точку Ś // плоскости Р.

Таким образом, все бесконечно удаленные элементы плоскости Р отображаются по некоторой прямой на плоскости P_1.

§ 3. Рассмотрим теперь вопрос о центральной проекции с аналитической точки зрения.

Возьмем снова две плоскости Р и P_1. Пусть ху будут Декартовы координаты точек плоскости Р относительно осей, расположенных в этой плоскости, а X и У такие же координаты точек плоскости P_1. Если мы зададим условие, чтобы каждой точке плоскости Р соответствовала одна определенная точка плоскости P_1 и обратно, то координаты XУ должны быть однозначными функциями ху и обратно.

Если каждой прямой плоскости Р соответствует прямая на плоскости P_1, то плоскости Р и P_1 называются в этом случае *гомографическими* или *находящимися в проективном соответствии*. Аналитически задача определения формул проективного соответствия двух плоскостей сводится к определению двух независимых друг от друга функций X и У от независимых переменных х и у под тем условием, чтобы всякому линейному соотношению:

$$lx+my+n=0$$

между х и у соответствовало линейное же соотношение $LX+MУ+N=0$ между X и У.

[Задачей этой занимались: акад. А. А. Марков, к вопросу о черчении карт СПБ. 1888 и Chatenet Nouw. Ann. Math 1886].

В результате решения этой задачи получаются следующие формулы, выражающие проективную зависимость между двумя плоскостями

$$X=\frac{a^1x+b^1y+c^1}{\alpha x+\beta y+\gamma} \text{ и } У=\frac{a''x+b''y+c''}{\alpha x+\beta y+\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

коэффициенты a^1, b^1, c^1, a'', b'', c'', α, β и γ произвольны.

Не нарушая общности вопроса, мы можем все члены числителей и знаменателей формул (1) разделить на один из коэффициентов, напр. на α, и тогда формулы проективного преобразования примут вид:

$$X=\frac{ax+by+c}{x+py+q}\,;\quad У=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{x+py+q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

После этого преобразования в формулах проективного соответствия двух плоскостей будет входить 8 коэффициентов.

Следовательно гомографическое положение вполне определяется *четырьмя парами соответственных точек.*

Мы будем иметь в этом случае 8 уравнений вполне достаточных для определения восьми коэффициентов формул проективного преобразования (2).

Можно и наоборот, исходя из формул (1) показать (простой подстановкой), что в случае проективного преобразования прямая на одной из таких плоскостей переходит в прямую же на другой P_1.

Ввиду этого некоторые авторы называют проективное соответствие *коллинеарным*, желая подчеркнуть этим взаимное соответствие прямых линий обеих плоскостей.

§ 4. Укажем теперь весьма важную теорему относительно гомографической зависимости двух плоскостей: *„всякое гомографическое преобразование кривой по формулам* (2) *представляет перспективу этой кривой“.*

Заметим прежде всего, что соотношения (2) могут быть переписаны в таком виде:

$$\begin{aligned} X&=\beta\left[\frac{x\cos\alpha-y\sin\alpha+L}{x+py+q}+X_0\right] \\ У&=\beta\left[\frac{x\sin\alpha+y\cos\alpha+K}{x+py+q}+У_0\right] \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Действительно, для тождественности формул (2) и (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$(\beta\cos\alpha+X_0)=a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$(\beta\sin\alpha+У_0)=a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\beta(pX_0-\sin\alpha)=b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\beta(pУ_0+\cos\alpha)=b_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\beta(h+qX_0)=c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\beta(k+qУ_0)=c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Умножив (4) на p и вычтя из полученного произведения (6), найдем

$$ap-b=\beta\,(p\cos\alpha+\sin\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Поступив таким же образом с (5) и (7), получим,

$$a_1p-b_1=\beta\,(p\sin\alpha-\cos\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Из (10) и (11) находим соответственные значения α и β.

Определив α и β из уравнений (4) и (5), найдем $X_\circ$ и $У_\circ$ и, наконец, уравнения (8) и (9) дают значения h и k.

Сделаем далее замену координат в плоскости P $(x_1\, y)$, положив в формулах (3)

$$h + x\cos\alpha - y\sin\alpha = x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$k + x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Тогда формулы (3) примут следующий вид:

$$X = \frac{x_1}{a^1 x_1 + b^1 y_1 + c^1} + X_\circ^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$У = \frac{y_1}{a^1 x_1 + b^1 y_1 + c_1} + У_\circ^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

В формулах (14) и (15) коэффициенты a^1 b^1 c^1 $X_\circ^1$ и $У_\circ^1$ легко выражаются через старые коэффициенты. Самого вычисления мы не производим, потому что эти выражения новых коэффициентов через старые нам не понадобятся.

Положим далее в формулах (14) и (15)

$$\left.\begin{array}{l} a^1 = \lambda\cos\alpha_1 \\ b^1 = \lambda\cos\beta_1 \\ c^1 = \lambda\cos\gamma_1 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Тогда формулы (14) и (15) перепишутся таким образом:

$$X = \frac{\frac{1}{\lambda} y_1}{x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 + l} + X_\circ^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$У = \frac{\frac{1}{\lambda} y_1}{x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 + l} + У_\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Еще раз изменим координатные оси в плоскости P (x,y) по формулам:

$$x_1\cos\alpha_1 + y_1\sin\alpha_1 + l = x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$-x_1\sin\alpha_1 + y_1\cos\alpha_1 = y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Из системы уравнений (19) и (20) находим:

$$x_1 = (x_2 - l)\cos\alpha_1 + y_2\sin\alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$y_1 = (x_2 - l)\sin\alpha_1 + y_2\cos\beta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Формулы (17) и (18) тогда принимают вид:

$$X = \frac{(x_2 - l)\cos\alpha_1 - y_2\sin\alpha}{\lambda x_2} + X_\circ^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$Y = \frac{(x_2 - l)\sin\alpha + y_2\cos\alpha_1}{\lambda x_2} + Y_\circ^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Изменим наконец координаты XY в плоскости P_1 по формулам:

$$X = X_0^1 + \frac{\cos\alpha_1}{\lambda} - X_2\cos\alpha - Y\sin\alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$Y = Y_0^1 + \frac{\sin\alpha_1}{\lambda} - X_2\sin\alpha_1 + Y_2\cos\alpha_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Подставив выражения X и Y из формул (25) и (26) в формулы (23) и (24), мы получим:

$$X_2\cos\alpha_1 + Y_2\sin\alpha_1 = \frac{l\cos\alpha_1 + y_2\sin\alpha_1}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$X_2\sin\alpha_1 - Y_2\cos\alpha_1 = \frac{l\sin\alpha_1 - y_2\cos\alpha_1}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Из формул (27) и (28) окончательно получаем

$$X_2 = \frac{l}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$$Y_2 = \frac{y_2}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Такой вид получают формулы, выражающие проективное соотношение между двумя плоскостями после двукратного преобразования координат xy в плоскости P и однократного преобразования координат XY в плоскости P_1.

Остается теперь показать, что формулы (29) и (30) выражают перспективу плоскости P на плоскости P_1.

Возьмем систему прямоугольных Декартовых координат (черт. 54) $0x_2y_2z_2$ и систему осей $0^1X_2Y_2$ в плоскости, перпендикулярной к оси $0x_2$ первой системы. Плоскость y_20x_2 примем за плоскость P, а плоскость X_20^1Y за плоскость P_1.

Рассмотрим коническую поверхность с вершиною в точке S на оси $0z_2$, и пусть A и B будут соответственные точки на одной и той же образующей конуса S. Точка A и будет тогда перспективой на P_1 точки B, лежащей на P. Кривая AA_2, начерченная пунктиром, есть перспектива кривой BB_2, начерченной сплошной линией.

Чертеж 54

Возьмем точку 0^1 в плоскости z_20x_2 так, чтобы $0^1C = 0S$ и $0^1C = 0z_2$ и выберем 0^1X_2 совпадающей с 0^1C; тогда 0^1Y_2 будет // $0y_2$. Через точку A про-

[1]) Проективное соответствие двух плоскостей не зависит от угла наклонения между ними. Подобие Т-ков сохраняется и в том случае, если P не $\perp$ к P_1. Систему осей $0x_2y_2z_2$ можно взять и косоугольной.

ведем прямую // 0^1C. Она пересечет $0^1У_2$ в некоторой точке K, а прямую 0B в точке L. ([2]) Прямая $LC//0У_2$, а следовательно // $0y_2$ и $\perp$ k $0x_2$.

Через точку B проведем наконец BD//LC. Из чертежа видно, что координатами точки B будут $x_2=0D$; $y_2=BD$. Координатами точки A будут

$$У_2=0^1K=LC \text{ и}$$

$$X_2=KA=KL-AL.$$

Найдем зависимость между координатами точек A и B.

Из подобия T-ков 0SB и ALB и T-ков 0LC и 0BD получаем:

$$\frac{AL}{0S}=\frac{BL}{0B}=\frac{CD}{0D} \text{ и } \frac{BD}{LC}=\frac{0D}{0C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Приняв во внимание значение входящих в пропорции (31) отрезков и обозначив 0S через 1, а 0C через $\frac{1}{\lambda}$, перепишем соотношения (32) таким образом.

$$\frac{1-X_2}{1}=\frac{x_2-\frac{1}{\lambda}}{x_2} \text{ и } \frac{y_2}{У_2}=\frac{x_2}{\frac{1}{\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Наконец соотношения (32) по упрощении могут быть переписаны в следующем виде:

$$X_2=\frac{1}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

$$У_2=\frac{y_2}{\lambda x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Мы получили, таким образом, формулы тождественные с формулами (29) и (30).

Таким образом, *„общее проективное соответствие фигур на двух плоскостях есть ни что иное, как перспективное соответствие этих фигур, нарушенное лишь перемещением этих плоскостей в пространстве, т. е. некоторым перемещением в пространстве всегда возможно две проективные плоскости привести в перспективное положение“*.

§ 5. При проективном соответствии двух плоскостей, как сказано выше, всякой прямой L одной плоскости P(xy) соответствует прямая L_1 другой плоскости $P_1(X_1У)$. При этом, конечно, различным точкам L T соответствуют различные точки L_1. Совокупность точек на прямой называется прямолинейным рядом точек.

Рассмотрим, какое соответствие прямолинейных рядов L и L_1 устанавливает проективное соответствие двух плоскостей. Координаты можно считать прямоугольными в обеих плоскостях без нарушения общности исследования, ибо преобразование координат не нарушает проективного соответствия.

Будем определять точки на прямых L и L_1 координатами t и t_1, взяв на L за начало координат некоторую точку M_0, а на прямой L_1 — соответственную точку M_{10}.

Нетрудно убедиться, что между координатами двух соответственных точек M и M_1 существует линейное соотношение вида

$$t_1=\frac{\alpha+\beta t}{\gamma+\delta t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

([2]) прямая KL пропущена на чертеже (54).

Для доказательства этого положения сделаем в обеих плоскостях такие преобразования координат (от этого, как сказано выше, проективное соответствие не нарушается) при которых прямые L и L_1 будут осями абсцисс в новых системах координат на P и P_1.

Так как между абсциссами соответственных точек плоскостей P и P_1 существует по условию соотношение:

$$x_1=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}, \quad \dots\dots\dots \quad (36)$$

где x и y коорд. некоторой точки на прямой L, а x_1 y_1 координаты соответственной точки на L_1, то это соотношение (36) сохранится и после указанного преобразования координат. Но так как в новой системе L есть ось абсцисс, то в формуле (36) надо положить $y=0$, и она получит тогда такой вид:

$$x_1=\frac{a_1x+c_1}{ax+c}, \quad \dots\dots\dots \quad (37)$$

т. е. мы будем иметь соотношение вида (35).

Формула (37) представляет собою некоторое линейное преобразование переменной x в другую переменную x_1. Если новую переменную x_1 подвергнем снова некоторому линейному преобразованию по формуле:

$$x^1=\frac{\alpha_1+\beta_1x_1}{\gamma_1+\delta_1x_1} \quad \dots\dots\dots \quad (38)$$

то можно сказать, что x^1 получается из первоначальной переменной x при помощи следующего преобразования:

$$x^1=\frac{\alpha_1+\beta_1\dfrac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}{\gamma_1+\delta_1\dfrac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}} \quad \dots\dots\dots \quad (39)$$

Преобразование (39) также линейное, ибо его можно переписать следующим образом:

$$x^1=\frac{\alpha_2+\beta_2x}{\gamma_2+\delta_2x} \quad \dots\dots\dots \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_2&=\alpha_1\gamma+\beta_1\alpha \\ \beta_2&=\alpha_1\delta+\beta\beta_1 \\ \gamma_2&=\gamma\gamma_1+\alpha\delta_1 \\ \delta_2&=\gamma_1\delta+\delta_1\beta. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \quad (41)$$

Если обозначим через $D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ и через $D_1=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1\end{vmatrix}$ и через $D_2=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2\end{vmatrix}$, (42)

$$\text{то } D_2=-D.D_1 \quad \dots\dots\dots \quad (43)$$

Все линейные преобразования вида (37) составляют *группу*, т. е. последовательное производство над переменной двух линейных преобразований эквивалентно некоторому третьему преобразованию также линейному.

Преобразования при помощи формул (29) и (30) § 4 суть ни что иное как преобразование *Ньютона*. (См. главу 2-ую § 4).

Для того, чтобы из формул (29) и (30) получить преобразование *Ньютона*, достаточно в них положить $l=\lambda=1$.

Эти преобразования встречаются у Ньютона в I томе его „Principia" лемма XXII.

Теория гомографических преобразований подробно рассматривается у Chales, я в его „Memoire sur deux principes generaux de la Science".

В курсе Аналит. геометрии акад. Д. А. Граве также достаточно подробно рассматриваются вопросы, связанные с проективным соответствием двух плоскостей. [Глава XVI и дальнейшие. Д. А. Граве Ан. геом. Киев. 1911].

Доказательство теоремы о свойствах гомографического соответствия, приведенное в конце § 4, принадлежит „Texeira". Мною сделаны лишь некоторые дополнения в подробностях изложения.

§ 6. Ньютон в своем труде: „Enumeratio linearum tertii ordinis" показал, что все кривые 3-го порядка являются перспективой особого класса кривых 3-го же порядка, которые он назвал parabolae divergentes.

Другими словами, все кривые 3-го порядка получаются как сечения плоскостью 5 конических поверхностей. Эта теорема представляет собою обобщение соответственной теоремы о конических сечениях.

Ньютон привел свое знаменитое предложение без доказательства.

Доказательство его было дано уже после смерти Ньютона в 1731 г. Clairot и Nikol'ем в Memoire de l'Academie des Sciences de Paris.

Для доказательства достаточно показать, что всякая кривая 3-го порядка получается из parabola divergens, уравнение которой в Декартовых координатах будет:

$$y^2=ax^3+bx^2+cx+d).$$

Доказательство основано на том, что всякая кривая 3-го порядка имеет по крайней мере одну точку перегиба (вещественную).

Здесь мы не будем приводить этого доказательства, ибо теорема эта не имеет прямого отношения к нашей теме. Аналитическое доказательство содержится у Texeira. Та же теорема доказана чисто геометрическим путем у Salmon'а. [§ 195 Courbes planes]. Геометрическое же доказательство приводится у Вельмина: кривые 3-го порядка.

Уравнение parabolae divergentes может быть написано следующим образом:

$$y=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \qquad a>o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

1) Если все корни ур-ия x_1 x_2 x_3 вещественны и различны, причем $x_1<x_2<x_3$, то соответствующая парабола имеет вид: 1 (черт. 55) и состоит из овала и бескон. ветви.

2) Если $x_1=x_2$, то овал обращается в изолированную точку. (Черт. 2 чер. 55).

3) Если равны два больших корня $x_2=x_3$, то кривая имеет узел (см. 3-й черт. 55).

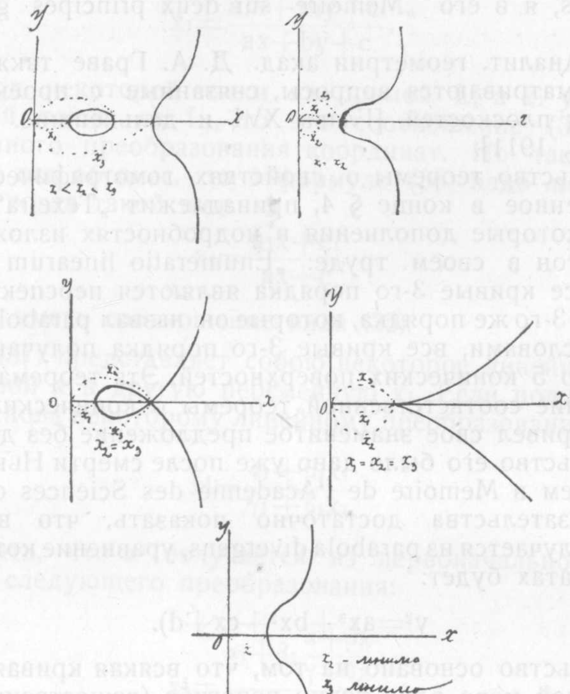
4) Если равны все три корня, то получается так называемая полукубическая парабола с точкой возврата. (Сл. 4-й чер. 55).

5) Если, наконец, из трех корней один вещественен, а два другие мнимые, то получается кривая с изолированной точкой. [Сл. 5-й черт. 55].

§ 7. Chales показал (Aperçu historique 2-me ed.), что parabolae divergentes не являются единственным классом кривых, которые могут представлять перспективу всех вообще кривых 3-го порядка. Такую же роль играют так называемые кривые 3-го порядка Chales. Их уравнение:

$$y = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad (45)$$

Нетрудно показать, что parabolae divergentes получаются из кривых Шаля при помощи преобразования Ньютона.



Чертеж 55

Действительно, подставив вместо x и y в (45) их выражения по формулам Ньютона: $x = \frac{x_1}{y_1}$; $y = \frac{1}{y_1}$ мы вместо (45) получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{y_1} = \frac{ax_1^3}{y_1^3} + \frac{bx_1^2}{y_1^3} + \frac{cx_1}{y_1^3} + \frac{d}{y_1^3} \quad (46)$$

По освобождении от знаменателя (46) получает вид:

$$y_1^2 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

т. е. уравнение parabolae divergentes. Теорема доказана.

След. теорема Шаля является следствием теоремы Ньютона в силу того свойства гомографического преобразования, которое указано в конце § 5.

Пяти видам кривых Шаля, так же как и пяти видам parabolae divergentes, соответствуют 5 конусов, на которых могут быть расположены все кривые 3-го порядка. [Свойства этих конусов изучал Möbius, Abhand. der. Sächs. Ges. zu Leipzig 1853 и Cayle у Transactions of the Cambridge Phil. Society 1866].

§ 8. Покажем теперь, что циркулярные кривые 3-го порядка играют роль аналогичную parabolae diverbentes и кривым Шаля, т. е. все *кривые 3-го порядка являются перспективой циркулярных кривых*.

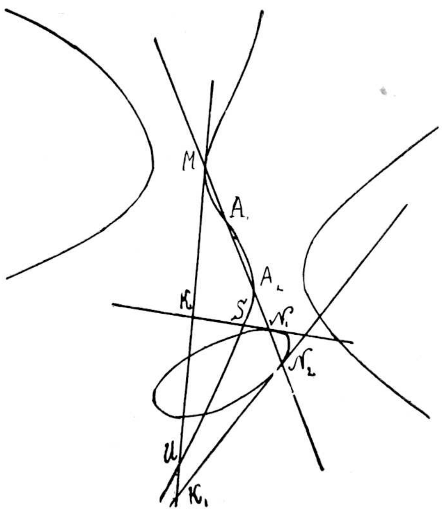
Для доказательства этого предложения, на основании § 4, достаточно доказать, что общая кривая 3-го порядка помощью проективного преобразования может быть преобразована в циркулярную кривую. Итак, пусть нам дано уравнение некоторой кривой 3-го порядка в трилинейных координатах:

$$Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3+3Ex^2z+6Fxyz+3Gy^2z+3Hxz^2+$$
$$3Kyz^2+Lz^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48.$$

Координатный Δ-к взят произвольно.

Посмотрим, как изменится уравнение кривой (48), если его отнести к некоторому, специально выбранному координатному треугольнику MN_1K (черт. 56).

Возьмем за ось z касательную MK к данной кривой (48) в некоторой точке M, за ось x примем какую-нибудь прямую, проходящую через точку M. Эта прямая, вообще говоря, пересечет кривую (48) в двух точках A_1 и A_2.



Чертеж 56

Примем, наконец, за ось y касательную к первой поляре кривой (48). [См. § 6 глава II] в одной из точек ее пересечения с прямой MA_1 A_2, например в точке N_1.

При таком выборе осей трилинейных координат некоторые из коэффициентов уравнения (48) обратятся в нуль, и уравнение кривой получит более простой вид.

Действительно, если в уравнении кривой (48) положим $z=0$, то мы найдем, таким образом, координаты точек пересечения прямой $z=0$ с кривой (48).

Но так как прямая $z=0$ по условию касательная к кривой (48), то мы должны получить, таким образом, координаты точек M (двойной корень) и U.

Координаты точки M будут $x=o$, $z=0$, в этой точке совпадают два значения x. Следовательно уравнение:

$$Ax^3+3Bx^2y+Cxy^2+Dy^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

должно иметь двойной корень x, равный 0.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы $C=0$ и $D=0$.

Уравнение первой поляры кривой (48) относительно полюса $(x_1\ y_1\ z_1)$, как известно, будет:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x_1+\frac{\partial f}{\partial y}y_1+\frac{\partial f}{\partial z}z_1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

где $f(xyz)=0$ символическое обозначение уравнения (48) [§ 6 глава 2-я]

Уравнение поляры точки M ($x=o$, $z=o$) будет:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0, \text{ т. е.}$$

$$Bx^2+2Cxy+Dy^2+2Fxz+2Gyz+Kz^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Положив в уравнении (51) $y=0$, мы должны получить координаты точек S и N_1 или (S_1 и N_2), но N_1 (или N_2) есть точка касания (ее координаты $x=o$; $y=o$).

Следовательно, по аналогии со сказанным выше, уравнение

$$Bx^2+2Fxz+KZ^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

должно иметь два значения x, равные 0, для чего необходимо и достаточно, чтобы $F=0$ и $K=0$.

Следовательно, если за координатный треугольник принять MKN_1 (или $MK_1 N_2$), то уравнение кривой (48) примет такой вид:

$$Ax^3+2Bx^2y+3Ex^2z+3Gy^2z+3Hxz^2+Lz^3=0 \quad . \quad . \quad (53)$$

Оно может быть переписано в таком виде:

$$z(3Gy^2+Lz^2)+Ax^3+3Bx^2y+3Ex^2z+3Hxz^2=0. \quad . \quad (54)$$

Координаты точек A_1 и A_2 найдутся из уравнения (54), положив в нем $x=0$.

Оно тогда обратится в:

$$z(3Gy^2+Lz^2)=0 \quad . \quad . \quad (55)$$

Уравнение (55) показывает, что если G и L одного знака, то точки A_1 и A_2 мнимы, при разных знаках L и G—вещественны.

При $G=0$ уравнение (55) обращается в:

$$Lz^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

и точка M в этом случае *двойная* [глава I, § 22].

Если $L=0$, то уравнение (56) показывает, что точки A_1 и A_2 совпадают. [$Gy^2=0$].

Если за ось x взята прямая, пересекающая кривую в двух различных точках, то $L\neq0$, и мы можем сделать преобразование координат в уравнении (54) по формулам:

$$x_1=\frac{z}{x} \text{ и } y_1=\frac{y}{x}\sqrt{\frac{3G}{L}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

После такого преобразования уравнение (54) перепишется так:

$$x_1(x_1^2+y_1^2)+A_1+B_1y_1^2+E_1x_1+H_1x_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Коэффициенты:

$$A_1=\frac{A}{L}\,;\ B_1=\frac{B}{G}\,;\ E_1=\frac{3E}{L}\,;\ H_1=\frac{3H}{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Уравнение (58) есть уравнение циркулярной кривой в Декартовых координатах.

Кривая (58) является *перспективой кривой* (48), ибо формулы (51) суть ничто иное, как формулы (29) и (30) § 4 главы III-ей, в которых

$$l=\lambda=\sqrt{\frac{L}{3G}} \text{ и в которых введена третья коор-}$$

дината z (случай однородных координат).

Формулы (57) показывают, что при L и G одного знака вещественным точкам кривой (48) соответствуют вещественные же точки ее перспективы (58).

Если же L и G разных знаков, то вещественным точкам кривой (48) соответствуют мнимые точки кривой (58).

§ 8. О пучке касательных к циркулярной кривой.

Уравнение касательной к цирк. кривой $f(x,y,z)=o$ в какой-ниб. точке (x,y,z), лежащей на этой кривой, будет:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

где (η, ν, ζ) текущие координаты касательной.

Касательная, как и всякая прямая, пересекает кривую в 3 точках, из которых две совпадают с точкой касания, а третья—всегда действительная, вообще говоря отлична от точки касания. (Гл. I § 9).

Если дана точка $x_1\ y_1\ z_1$ вне кривой, а $x\ y\ z$ координаты неизвестной точки касания прямой, проходящей через точку $x_1\ y_1\ z_1$, то уравнение касательной будет иметь вид (1). Координаты $x_1\ y_1\ z_1$ должны удовлетворять уравнению касательной, след. мы получим такое соотношение:

$$x_1\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}+y_1\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\}+z_1\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

В раскрытом виде:

$$f(x\ y\ z)=x^3+xy^2+Ax^2z+Ay^2z+Dxz^2+Eyz^2+Fz^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

а ур-ие (2) : (z положено равным 1)

$$x_1(3x^2+y^2+2Ax+D)+y_1\ (2xy+2Ay+E)+Ax^2+Ay^2+2Dx+$$
$$+2Ey+3F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Это уравнение кривой 2-го порядка наз. *первой полярой* точки $x_1\ y_1$ относительно циркулярной кривой (см. гл. II, § 6).

Из уравнений кривой (3) $z=1$ и ее первой поляры (4) мы и определим неизвестные координаты точки касания (x и y). Коническое сечение (4) и кривая (3) вообще пересекаются в шести точках, следовательно вообще говоря из внешней точки цирк. кривой можно провести к ней шесть касательных, т. е. цирк. кривая будет, вообще говоря, шестого класса.

В зависимости от наличия и характера особенной точки кривой класс кривой, как показано было выше, может понизиться. (Гл. 2, § 3).

Можно искать поляру точки $x_1\ y_1$ и относительно кривой (4). Это будет прямая линия называемая *второй полярой* полюса $x_1\ y_1$ относительно кривой (3).

Ее уравнение будет:

$$x.(3x_1^2+y_1^2+2Ax_1+D)+y.(2x_1y_1+2Ay_1+E)+Ax_1^2+$$
$$+Ay_1^2+2Dx_1+2Ey_1+3F=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Из уравнений первой и второй поляр (4) и (5) мы сразу видим, что второе получается из первого перестановкой букв $x\ y$ и $x_1\ y_1$.

На основании этого можно высказать следующие предложения: *1) первая поляра кривой есть геометрическое место точек, вторые* *поляры которых проходят через полюс, и 2) вторая поляра кривой есть геометрическое место точек, первые поляры которых проходят через фокус.*

Чтобы найти полюс некоторой данной кривой 2-го порядка относительно данной кривой 3-го порядка, достаточно провести вторые поляры двух каких-либо ее точек: точка их пересечения будет искомым полюсом.

Если полюс лежит на самой кривой 3-го порядка, то вторая поляра его будет касательной к кривой 3-го порядка в этом полюсе. Полюс же, согласно 1-й теореме настоящего §, будет находиться на первой поляре, т. е. вторая поляра будет касаться в этом случае первой поляры в полюсе, иными словами кривая 3-го порядка и ее первая поляра имеют в полюсе двойную точку *пересечения.* Остальных точек пересечения будет, таким образом, четыре.

Напишем уравнения 1-й и 2-й поляр циркуляр. кривой в сокращенном виде.

Уравнение первой поляры цирк. кривой относительно полюса x^1, y^1 будет:

$$\triangle f = x^1.\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + y^1\left\{\frac{\partial f}{\partial y}\right\} + z^1\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Уравнение (5) второй поляры можно переписать следующим образом:

$$(3x+A).x^{12}+2y.x^1y^1+(x+A).y^{12}+2(Ax+D)x^1+2(Ay+E).$$
$$y^1+Dx+Ey+3F=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Если мы обозначим через

$$\triangle^2 f = x^{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.x^1\,y^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^{12} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}x^1 + 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}y^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

то левая часть уравнения (7) может быть переписана в виде $\frac{\triangle^2 f}{2}$, и уравнение второй поляры в сокращенном виде можно написать так:

$$\frac{\triangle^2 f}{2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

что нетрудно видеть из сравнения левых частей равенств (7) и (8).

§ 9. Возьмем две точки на плоскости M (x, y, z) и M^1 (x^1, y^1, z^1) и обозначим через X, Y, Z однородные координаты точки, делящей расстояние между точками M и M^1 в данном отношении λ.

В таком случае, как известно, X, Y и Z выразятся в зависимости от координат точек M и M^1 и λ следующими формулами:

$$\begin{aligned} X &= x + \lambda x^1 \\ Y &= y + \lambda y^1 \\ Z &= z + \lambda z^1 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

с изменением λ точка (X, Y, Z) движется по прямой, определяемой двумя точками M и M^1.

Уравнение циркулярной кривой в однородных координатах будет:

$$F(X_1Y_1Z)=X^3+XY^2+AX^2Z+AY^2Z+DXZ^2+EYZ^2+FZ^3=0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Будем искать точки пересечения прямой MM^1 с кривой (11).

Для нахождения координат точек пересечения надо совместно решить систему уравнений 10 и (11).

В результате подстановки выражений X Y и Z из системы (10) в уравнение (11) мы получим следующее кубичное уравнение относительно λ.

$$\lambda^3.f(x^1,y^1,z^1)+\lambda^2\frac{\triangle^2 f}{2}(x^1,y^1,z^1)+\lambda.\triangle f(x^1,y^1,z^1)+f(x,y,z)=0 \quad . \quad . \quad (12)$$

Здесь $\frac{\triangle^2 f}{2}$ есть левая часть уравнения второй поляры полюса $(x^1y^1z^1)$ а $\triangle f$—левая часть уравнения первой поляры полюса $(x^1y^1z^1)$.

Найдем условие, чтобы прямая (10) касалась кривой (11).

Если $M^1(x^1,y^1,z^1)$—данная точка а $M(x,y,z)$ произвольная точка на одной из касательных из точки M^1 к циркулярной кривой (11), то уравнение (12) должно иметь два равных корня, т. е. дискриминант уравнения (12) должен быть равен 0.

Дискриминант D формы

$$a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$$

будет

$$D=a_1^2a_2^2+18a_0a_1.a_2.a_3-4a_0a_2^3-4a_1^3a_3-27a_0^2a_3^2$$

Приравняв его О, получим уравнение 6 степени относительно x, y, z. [$a_0=f^1(x^1y^1z^1)$—нулевого измерения относительно $x\ y\ z$; $a_1=\frac{\triangle^2 f(x^1y^1z^1)}{2}$ 1-го измерения, $a_2=\triangle f(x^1y^1z^1)$—2-го измерения; $a_3=f(xyz)$—3-го измер.], которое и будет уравнением шести касательных к кривой из точки $x^1y^1z^1$

Если точка $M^1(x^1y^1z^1)$ будет на кривой, то уравнение $D=0$ упростится, так как $a_0=f(x,^1y,^1z)=0$.

В таком случае оно примет следующий вид:

$$a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3=0 \qquad \text{или } a_1^2(a_2^2-4a_1a_3)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

После подстановки значений коэффициентов уравнение (13) примет форму:

$$\left[\frac{\triangle^2 f}{2}\right]^2\cdot\left[(\triangle f)^2-4.\frac{\triangle^2 f}{2}f\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собою совокупность шести касательных в кривой (11) из точки, взятой на этой кривой. Точки касания двух из этих касательных совпадают с точкой $M^1(x^1y^1z^1)$. Кроме упомянутых двух касательных через точку M^1 проходят, как показывает уравнение (14), еще четыре касательных к кривой, точки касания которых не совпадают с точкой M^1. Уравнение их совокупности будет:

$$2.f(x,y,z).\triangle^2 f(x^1,y^1,z^1)-[\triangle f(x^1y^1z^1)]^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

§ 10. Докажем теперь теорему Salmon'a [1]), заключающуюся в том, что *ангармоническое отношение пучка четырех касательных, прове-*

[1]) Journal für Mathematik B. XLII, J. S. 274.

денных из какой-либо точки циркулярной кривой, есть величина постоянная, независящая от положения вершины пучка—точки M^1 на кривой.

Так как ангармоническое отношение не изменяется при проектировании, то теорема, справедливая для циркулярных кривых, будет справедлива и для всех их проекций, т.-е. для всякой кривой 3-го порядка, так как все кривые 3-го порядка могут быть получены путем проектирования циркулярных кривых (гл. III § 8).

Проще всего было бы доказать теорему Salmon'а для случая parabolae divergentes Ньютона, так как из них могут быть путем проектирования получены все кривые 3-го порядка.

Имея однако в виду вывод инвариантов, циркулярных кривых, мы докажем теорему Salmon'а непосредственно для циркулярных кривых.

Итак, согласно с уравнением (15), напишем прежде всего уравнение пучка 4-х касательных к циркулярной кривой:

$(x+A)(x^2+y^2)+Dxz^2+Eyz^2+Fz^3=0$ из точки $M^1(x^1,y^1,z^1)$ этой кривой.

Вычислив в обыкновенных Декартовых координатах

$$\triangle f(x^1y^1z) \text{ и } \triangle^2 f(x^1y^1z^1).$$

$$\triangle f(x^1,y^1,z^1)=(3x^1+A)x^2+(x^1+A)y^2+2y^1xy+2(Ax^1+D)x+3(Ay^1+E)y+ \\ +Dx^1+Ey^1+3F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\triangle^2 f(x^1,y^1,z^1)=2(3x^{12}+y^{12}+D+2Ax^1)x+2(2x^1y^1+2Ay^1+E)y+2(Ax^{12}+ \\ +Ay^{12}+2Dx^1+2Ey^1+3F) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17$$

Напишем уравнение пучка касательных:

$$2f.\triangle^2 f-(\triangle f)^2=2(x^3+xy^2+Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F)[(6x^{12}+2y^{12}+4Ax^1+2D) \\ x+(4x^1y^1+4Ay^1+2E)y+2Ax^{12}+2Ay^{12}+4Dx^1+4Ey^1+6F]-3x^1+A)^2x^4- \\ -(x^1+A)^2y^4-4y^{12}.x^2y^2-2(3x^1+A)(x^1+A).x^2.y^2-2(3x^1+A)2y^1.x^3y-2(x^1+A) \\ 2y^1.xy^3-K=0 \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

буквою K обозначена совокупность членов ниже четвертого измерения относительно x и y в уравнении (18).

Раскрыв скобки и расположив полученный многочлен по степеням x, мы перепишем уравнение (18) в таком виде:

$$(12x^{12}+4y^{12}+8Ax^1+4D-9x^{12}-6Ax^1-A^2)x^4+(8x^1y^1+8Ay^1+4E-12x^1y^1- \\ -4Ay^1)x^3y+(12x^{12}+4y^{12}+8Ax^1+4D-6x^{12}-8Ax^1-2A^2-4y^{12})x^2y^2+(8x^1y^1+ \\ +8Ay^1+4E-4x^1y^1-4Ay^1)xy^3-(x^1+A)^2y^4+L=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

буквою L обозначена совокупность неинтересных для нас членов ниже четвертого измерения.

Уравнение совокупности четырех касательных к циркулярной кривой по приведении подобных членов будет иметь вид:

$$(3x^{12}+4y^{12}+2Ax^1+4D-A^2)x^4+4(E+Ay^1-x^1y^1)x^3y+(6x^{12}+4D-2A^2)x^2y^2 \\ +4(E+Ay^1+x^1y^1)xy^3-(x^1+A)^2y^4+L=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Если мы приравняем нулю совокупность членов четвертого измерения в левой части равенства (20), то мы очевидно получим уравнение пучка четырех прямых, параллельных касательным, изображаемым уравнением (20).

Ангармоническое отношение лучей этого второго пучка будет, конечно, равно ангармоническому отношению пучка касательных.

Таким образом нам надо найти ангармоническое отношение пучка прямых

$$a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

где $a_0=3x^{12}+4y^{12}+2Ax^1+4D-A^2$

$$a_1=E+Ay^1-x^1y^1$$

$$a_2=\frac{3x_1^2+2D-A^2}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$a_3=E+Ay^1+x^1y^1$$

$$a_4=-(x^1+A)^2$$

Уравнение (21) четвертой степени и дает четыре значения $\frac{y}{x}$ угловых коэффициентов пучка прямых; обозначим эти угловые коэффициенты буквами k_1, k_2, k_3, и k_4.

Как известно одно из значений ангармонического отношения (a, b, c, d,) пучка прямых с угловыми коэффициентами: k_1, k_2, k_3, k_4, будет [Salmon-Fiedler B I. § 85 Aufg IX]

$$(a,b,c,d,)=\frac{(k_1-k_3).(k_2-k_4)}{(k_2-k_3)(k_1-k_4)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Все шесть значений ангармонического отношения просто выражаются через три следующие выражения:

$$(k_3-k_2)(k_1-k_1)=D_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$(k_1-k_3)(k_1-k_2)=D_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$(k_2-k_1)(k_1-k_3)=D_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

а именно эти отношения будут (как легко проверить подстановкой):

$$-\frac{D_2}{D_1},\ -\frac{D_3}{D_2}\ -\frac{D_1}{D_3},\ -\frac{D_1}{D_2},-\frac{D_2}{D_3},-\frac{D_3}{D_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

первые три получаются круговой подстановкой, последние три – обратны трем предыдущим.

Вычисление далее показывает, что

$$D_1+D_2+D_3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Известно далее, что все шесть ангармонических отношений выражаются через корни некоторого кубического уравнения (Salmon-Fiedler B. 2 § 339).

Составим кубическое уравнение с корнями:

$$D_1-D_2;\ D_2-D_3;\ D_3-D_1$$

Такое уравнение будет иметь вид:

$$\theta_3+3(D_1D_2+D_2D_3+D_1D_3)\theta-(D_1-D_2)(D_2-D_3)(D_3-D_1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Обозначив корни уравнения (29) через θ_1, θ_2, и θ_3, мы можем написать следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} D_1-D_2&=\theta_1 \\ D_2-D_3&=\theta_2 \\ D_3-D_1&=\theta_3 \\ \theta_1+\theta_2+\theta_3&=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Присоединив сюда соотношение (28) $D_1+D_2+D_3=0$, мы получим систему уравнений, из которой найдем, что

$$D_1=\frac{\theta_1-\theta_3}{3}$$

$$D_2=\frac{\theta_2-\theta_1}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

$$D_3=\frac{\theta_3-\theta_2}{3}$$

Подставив найденные выражения D_1 D_2 и D_3 в (27), мы и получим такие значения шести ангармонических отношений через корни уравнения (29):

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3},\ \frac{\theta_2-\theta_3}{\theta_2-\theta_1},\ \frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_3-\theta_2},\ \frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_1-\theta_2},\ \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_2-\theta_3},\ \frac{\theta_3-\theta_2}{\theta_3-\theta_1} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Коэффициенты уравнения (29) суть симметрические функции корней уравнения (21) и могут быть следовательно рационально выражены через коэффициенты последнего.

Вычисление приводит уравнение (20) к такому виду:

$$\theta^3-36I_2\theta-432I_3=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)а$$

где

$$I_2=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)б$$

$$I_3=a_0a_2a_4-a_0a_3^2-a_1^2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad (32)а$$

Остается теперь вычислить выражения I_2 и I_3 в зависимости от коэффициентов уравнения (21).

Подставив в левую часть равенства (31) выражения входящих туда сомножителей из (22), находим:

$$I_2=-(3x^{12}+4y^{12}+2Ax^1+4D-A^2)(x^{12}+2Ax^1+A^2)-4(E+Ay^1-x^1y^1)(E+Ay^1+$$
$$+x^1y^1)+3.\frac{(3x^{12}+2D-A^2)^2}{9} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

По раскрытии скобок и проведении к общему знаменателю (33), найдем:

$$3I_2=-9x^{14}-12x^{12}y^{12}-6Ax^{13}-12Dx^{12}+3A^2x^{12}-18Ax^{13}-24Ax^1y^{12}-12A^2x^{12}-$$
$$-24DAx^1+6A^3x^1-9A^2x^{12}-12A^2y^{12}-6A^3x^1-12A^2D+3A^4-12E^2-24AEy^1$$
$$-12A^2y^{12}+12x^{12}y^{12}+9x^{14}+4D^2+A^4+12Dx^{12}-6A^2x^{12}-4A^2D; \quad . \quad (34)$$

По приведении подобных членов в правой части равенства (34) найдем:

$$3I_2=-24Ax^{13}-24Ax^1y^{12}-24A^2x^{12}-24A^2y^{12}-24ADx^1-24AEy^1+4D^2+$$
$$+4A^4-16A^2D-12E^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Взяв за скобки общего множителя—24A, перепишем равенство (35) таким образом:

$$3I_2=-24A(x^{13}+x^1y^{12}+Ax^{12}+Ay^{12}+Dx^1+Ey^1)+4D^2+4A^4-16A^2D-12E^2 \quad (36)$$

Так как точка x^1y^1 по условию лежит на кривой, то $x^{13}+x^1y^{12}+Ax^{12}+Ay^{12}+Dx^1+Ey^1=-F$, и равенство (36) получит вид:

$$3I_2=24AF+4D^2+4A^4-16A^2D-12E^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Окончательно находим, что

$$I_2=-\frac{4}{3}\left\{4AD^2+3E^2-A^4-D^2-6AF\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Уравнение (38) показывает, что I_2 не зависит от координат x^1y^1 точки цир. кривой, из которой проводятся к ней касательные.

§ 11. Вычислим теперь выражение I_3.

$$I_3=a_0a_2a_4-a_0a_3^2-a_1^2a^4+2a_1a_2a_3-a_2^3$$

$$a_0a_2a_4=-3x^{16}-8Ax^{15}-(6D+5A^2)x^{14}-\frac{40AD-8A^3}{3}x^{13}-\frac{8D^2+20A^2D-9A^4}{3}x^{12}$$

$$-\frac{16AD^2-8A^3D}{3}x^1-4x^{14}y^{12}-8Ax^{13}y^{12}-\frac{8D+8A^2}{3}x^{12}.y^{12}-\frac{16AD-8A^3}{3}x^1y^{12}-$$

$$\frac{-8A^2D-4A^4}{3}y^{12}-\frac{(2A^2D-A^4).(4D-A^2)}{3} \quad . \; . \; . \; . \quad (39)$$

$$-a_0a_2^3=-3x^{14}y^{12}\ 8Ax^{13}y^{12}-6Ex.^{12}y^1-(4D+6A^2)x^{12}y^{12}-10AEx^{12}y^1-3E^2x^{12}-$$
$$8ADx^1y^{12}-(8ED+2A^2E)x^1y^1-4x^{12}y^{14}-8Ax^1y^{14}-8Ex^1y^{13}-2AE^2x^1-4A^2y^{14}$$
$$-8AEy^{13}-(4E^2+4A^2D-A^4)y^{12}-(8ADE-2A^3E)y^1-E^2(4D-A^2) \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

$$-a_1^2a_4^2=x^{14}y^{12}-2Ex^{13}y'-2A^2x^{12}y^{12}-2AEx^{12}y^1+2A^3x^1y^{12}+E^2x^{12}+2A^2Ex^1y^1+$$
$$+2AE^2x^1+2A^3Ey_1+A^4y^{12}+A^2E^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

$$2a_1a_2a_3=-2x^{14}y^{12}+\frac{8A^2-4D}{3}x^{12}y^{12}+4AE^2x^{12}y^1+2E^2x^{12}+\frac{4A^2D-2A^4}{3}y^{12}+$$
$$+\frac{8ADE-4A^3E}{3}y^1+\frac{4E^2D-2A^2E^2}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

$$-a_2^3=-x^{16}-(2D-A^2)x^{14}-\frac{(2D-A^2)^2}{3}x^{12}-\frac{(2D-A^2)^3}{27} \quad . \; . \; . \quad (43)$$

Сложив почленно равенства (39), (40), (41), (42) и (43), получим:

$$I_3{}^{*)}=-4[x^6+2Ax^5+2x^4y^2+x^2y^4+4Ax^3y^2+2Dx^4+A^2x^4+2Dx^2y^2+2A^2x^2y^2+$$
$$+2AEx^2y+2Axy^4+2Ex^3y+2Exy^3+2EDxy+D^2x^2+E^2y^2+A^2y^4+2AEy^3]-$$
$$-\frac{8}{3}[(5AD-A^3)x^3+(2A^2D-A^4)x^2+(5AD-A^3)xy^2+(2A^2D-A^4)y^2+(2ADE-$$
$$A^3E)y+(2A^2D+A^3D)x]+\left\{\frac{A^2-4D)(2A^2D-A^4}{3}\right\}-E^2(4D-A^2)+A^2E^2-$$
$$-\frac{(2D-A^2)^3}{27}+\frac{4E^2D-2A^2E^2}{3}; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

*) Значки ^{1} у x и у для упрощения записей временно опущены.

Остается преобразовать выражение I_3 следующим образом: из коэффициента 1-го члена вторых квадратных скобок возьмем $-8ADx^3$, а так как там было $-\frac{40ADx^3}{3}$, то в скобках останется $-\frac{16ADx^3}{3}$, и коэффициент 1-го члена во вторых квадратных скобках по выводе общего множителя $-\frac{8}{3}$ будет: $(2AD-A^3)$.

Такое же преобразование сделаем и с третьим членом вторых квадратных скобок: $-\frac{40AD-8A^3}{3}xy^2$. Взяв $-8ADxy^2$, получим в скобках

$$-\frac{8}{3}(2AD-A^3).xy^2$$

взятые члены: $8ADx^3$ и $-8ADxy^2$ запишем в первые квадратные скобки, тогда у нас получится:

$$\begin{aligned} I_3 = & -4[x^6+2Ax^5+2x^4y^2+x^2y^4+4Ax^3y^2+2Dx^4+A^2x^4+2Dx^2y^2+2A^2x^2y^2+ \\ & +2AEx^2y+2Ex^3y+D^2x^2+2Axy^4+2Exy^3+2EDxy+E^2y^2+A^2y^4+2AEy^3+ \\ & +2ADx^3+2ADxy^2]-\frac{8}{3}[(2AD-A^3)x^3+(2A^2D-A^4)x^2+(2AD-A^3)xy^2+ \\ & +(2A^2D-A^4)y^2+(2AD^2-A^3D)x+(2ADE-A^3E)y]+\frac{(A^2-4D)(2A^2D-A^4)}{3}- \\ & -E^2(4D-A^2)+A^2E^2-\frac{(2D-A^2)^3}{27}+\frac{4E^2D-2A^2E^2}{3} \quad \dots \quad (45) \end{aligned}$$

Из уравнения циркулярной кривой имеем:

$$x^3+xy^2+Ax^2+Ay^2+Dx+Dy=-F \quad \dots \quad (46)$$

Возведя обе части раненства (46) в квадрат, находим

$$\begin{aligned} & x^6+x^2y^4+A^2x^4+A^2y^4+D^2x^2+E^2y^2+2x^4y^2+2Ax^5+2Ax^3y^2+2Dx^4+2Ex^3y+ \\ & +2Ax^3y^2+2Axy^4+2Dx^2y^2+2Exy^3+2A^2x^2y^2+2ADx^3+2AEx^2y+2ADxy^2+ \\ & +2AEy^3+2DExy=F^2 \quad \dots \quad (47) \end{aligned}$$

Таким образом, выражение I_3 в силу равенства (47) может быть переписано таким образом:

$$\begin{aligned} I_3 = & +4F^2-\frac{8}{3}A(2D-A^2)[x^3+Ax^2+xy^2+Ay^2+Dx+Ey]+\frac{(A^2-4D)(2A^2D-A^4)}{3} \\ & +A^2E^2-E^2(4D-A^2)-\frac{(2D-A^2)^3}{27}+\frac{4E^2D-2A^2E^2}{3} \quad \dots \quad (48) \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках правой части равенства (48) равно $-F$, и мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} I_3 = & -4F^2+\frac{8}{3}AF(2D-A^2)+2A^4D-\frac{8}{3}A^2D^2-\frac{A^6}{3}-4E^2D+2A^2E^2-\frac{8D^3}{27}+ \\ & +\frac{12A^2D^2}{27}-\frac{6A^4D}{27}+\frac{A^6}{27}+\frac{4E^2D}{3}-\frac{2A^2E^2}{3} \quad \dots \quad (49) \end{aligned}$$

По раскрытии скобок и группировке членов с общим знаменателем, мы можем переписать I_3 в такой форме:

$$I_3 = -4F^2 + \frac{16ADF - 8A^3F - 8E^2D + 4A^2E^2}{3} + \frac{16A^4D - 20A^2D^2}{9} - \frac{8A^6 + 8D^3}{27}. \qquad (50)$$

Равенство (50) показывает, что выражение I_3 также не зависит от координат x^1y^1.

Так как I_2 и I_3 не зависят от координат той точки кривой, из которой проводятся касательные прямые к ней, то следовательно и θ_1 θ_2 и θ_3 не зависят от координат этой точки, а значит на основании (32) и ангармонические отношения пучка *касательных* также не зависят от координат той точки циркулярной кривой, из которой пучек *касательных* проводится.

Таким образом, теорема Salmon'а доказана.

Выражения I_2 и I_3 суть так называемые Клебшевские инварианты биквадратичной формы (21).

§ 12. Таким образом можно сказать, что ангармоническое отношение пучка касательных характеризует данную кривую 3-го порядка. Оно сохраняет свои значения и для всех проекций этой кривой. Если у двух каких-либо кривых 3-го порядка эти ангармоничные отношения различны, то одна из таких кривых в силу доказанной теоремы не может быть получена как проекция другой.

Другими словами для возможности проектирования двух кривых третьего порядка одной в другую должно существовать некоторое соотношение между коэффициентами уравнений этих кривых.

Последнее обстоятельство об'ясняется тем, что формулы проективного преобразования

$$X = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma};\ Y = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma} \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

содержат восемь независимых параметров, а ур-ие кривой 3-го порядка имеет их девять.

После преобразования мы получим 9 соотношений между коэффициентами старого и нового уравнений кривой. В эти соотношения войдут 8 параметров проективного преобразования. По исключении этих 8 количеств из девяти полученных уравнений, мы и найдем требуемое соотношение между коэффициентами кривых—аналитическое условие возможности проективного преобразования.

Связь этого обстоятельства с существованием абсолютного инварианта кубической формы будет отмечена в следующей главе.

§ 13. Ангармоническое отношение четырех точек или пучка четырех лучей имеет шесть различных значений.

$$\lambda; 1-\lambda; \frac{\lambda}{\lambda-1}; \frac{1}{\lambda}; \frac{1}{1-\lambda}; \frac{\lambda-1}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Существуют три случая, когда некоторые из количеств ряда (52) будут равными:

Разберем эти случаи подробно:

I. Если $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, т. е. $\lambda^2 = 1$. а) $\lambda_1 = +1$

б) $\lambda_2 = -1$

a) Если $\lambda=+1$, то значения ангармонического отношения будут:

$$1,\ 0,\ \infty,\ 1,\ \infty,\ 0.$$

b) Если $\lambda=-1$, то 6 значений ангармонического отношения будут:

$$-1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2},\ 2$$

Наконец c) если

$$\lambda=\frac{\lambda-1}{\lambda} \text{ или } \lambda^2-\lambda+1=0, \text{ то}$$

$\lambda=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, и 6 значений ангармонического отношения будут:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2};\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

Во втором случае говорят, что четыре точки или четыре луча находятся в *гармоническом положении.*

В третьем случае значения λ суть комплексные значения кубического корня из отрицательной единицы, ибо уравнение $\lambda^2-\lambda+1=0$ получается после разложения на множители левой части уравнения $\lambda^3+1=0$.

В таком случае говорят, что четыре точки или луча находятся в *эквиангармоническом отношении.* В этом случае три значения λ равны одному комплексному значению корня кубичного из—1, три другие значения—второму комплексному корню из—1.

§ 14. Укажем теперь условия, при которых пучек четырех касательных к циркулярной кривой будет гармоническим или эквиангармоническим.

Условия эти будут нам нужны в следующей главе.

Возьмем снова кубическое уравнение $(30)_a$, через корни которого выражаются все значения ангармонического отношения пучка касательных:

$$\theta^3-36\, I_2.\theta-432\, I_3=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Если $I_3=0$, то один из корней уравнения (53) будет равен 0, т. е. два какие-либо значения D будут равны на основании соотношений (30) и следовательно одно из значений ангармонического отношения в силу соотношений (27) будет равно—1, т. е. мы будем иметь гармонический пучек касательных.

b) Если $I_2=0$, то и $D_2.D_3+D_3.D_1+D_1.D_2=0$ . . . . (54)

но так как $D_1+D_2+D_3=0$, то мы сейчас же можем получить такие соотношения:

$$D_2\,D_3+D_3\,D_1=-D_1\,D_2$$

$$D_3(D_1+D_2)=-D_1\,D_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

$$-D_3^2=-D_1\,D_2$$

т. е. $D_3^2=D_1\,D_2$ и аналогично: $D_2^2=D_3\,D_1$ и $D_1^2=D_2\,D_3$ . . . . . (56)

а из соотношений (56) нетрудно получить такие пропорции:

$$\frac{D_3}{D_2}=\frac{D_2}{D_1}=\frac{D_1}{D_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

На основании соотношений (27) мы приходим к заключению, что в этом случае три значения ангармонического отношения равны между собою, т. е. мы имеем случай эквиангармонии.

То же можно доказать и иначе: в случае $I_2=0$ уравнение (53) обращается в двучленное и может быть написано в форме:

$$\theta^3-m^3=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Корни его будут: m, $m\omega$, $m\omega^2$, где $m^3=432I_3$ а ω и ω^2—комплексные значения корня кубичного из $+1$. Тогда например первое значение ангармонического отношения:

$$\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3} \text{ будет } \frac{m-m\omega}{m-m\omega^2}=\frac{1-\omega}{1-\omega^2}=\frac{1}{1+\omega}=, \text{ где } \omega=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{След. } \frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1-\theta_3}=\frac{1}{1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2-1+i\sqrt{3}}=\frac{2}{1+i\sqrt{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

т. е. мы будем иметь случай с).

Обратим, наконец, внимание на первый случай, когда одно из значений ангармонического отношения равно 0. Это будет иметь место в том случае, если уравнение (53) будет иметь двойной корень (см. соотношение 32).

Условием двойного корня уравнения:

$$\theta^3+p\theta+q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

будет равенство нулю его дискриминанта, т. е.

$$4p^3+27q^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

а так как в нашем случае $p=-36I_2$ и $q=-432I_3$, то соотношение (60) после подстановки выражений p и q и надлежащих сокращений примет следующий вид:

$$I_2^3-27I_3^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Геометрический смысл соотношения (61) будет указан в главе IV.

ГЛАВА IV.

Метрические свойства циркулярных кривых, получаемые с помощью их инвариантов.

§ 1. Ортогональные инварианты циркулярных кривых.

Если уравнение некоторой алгебраической кривой

$$f(x,y,a,b,c....)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

в которых x и y—Декартовы координаты точек кривой а a, b, c... некоторые параметры, через общую ортогональную подстановку

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha+x_0 \\ y&=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha+y_0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1^1$$

преобразуется в $f(x_1,y_1,a_1,b_1,c_1 \ldots)=0$ . . . . (2) то всякая функция F коэффициентов уравнения (1), которая остается неизменной при этой подстановке, так что

$$F(a,b,c...)=F(a_1,b_1,c_1,...)$$

называется *ортогональным инвариантом кривой* (1)

Если в формулах (1^1) $\alpha=0$, то мы будем иметь инвариант, соответствующий параллельному перемещению, если $x_0=y_0=0$, то у нас будет инвариант, соответствующий вращению фигуры кривой около неподвижной точки.

Равенство нулю инварианта выражает какое-либо метрическое свойство данной кривой.

В настоящей главе рассмотрим по аналогии с кривыми 2-го порядка ортогональные инварианты циркулярных кривых 3-го порядка и применим их к выводу различных метрических свойств этого рода кривых.

Вопросом об ортогональных инвариантах кривых 3-го порядка занимался проф. Иенского Университета I. Thomae. Его работа на эту тему помещена в Berichte über die Vorhandlungen der Gesselschaft der Wissenschaften zu Leipzig. B. 51, 1899.

Об ортогональных инвариантах циркулярных кривых имеется диссертация R. Doelle „Orthogonale Invarianten der Circularcurven 3. Ordnung", Jena 1905.

В настоящей работе инварианты цирк. кривых рассматриваются с несколько иной точки зрения, чем это сделано у Doelle. Doelle стремился получить кроме независимых основных инвариантов целый ряд производных инвариантов с целью выражения при их помощи тех инвариантов, которые имеют более сложные выражения через коэффициенты уравнения кривой.

Далее, у Doelle нет вывода более сложных инвариантов S и T. Он пишет эти инварианты сразу на основании общих выражений их, полученных Аронгольдом и Томэ.

В настоящей работе, исходя из чисто геометрических соображений сделан подробный вывод ортогональных инвариантов через коэффициенты общего уравнения циркулярной кривой, а вывод инвариантов S и T через коэффициенты упрощенного уравнения циркулярной кривой (ввиду сложности вычисления инвариантов через общие коэффициенты).

§ 2. Уравнение циркулярной кривой Гл I, § 1 содержит 8 коэффициентов формулы ортогонального преобразования вводят три параметра (x_0, y_0 и α). 8 коэффициентов преобразованного уравнения определенным образом выразятся в зависимости от 8 коэффициентов прежнего уравнения и трех параметров ортогонального преобразования.

Мы получим таким образом 8 уравнений, связывающих новые и старые коэффициенты. Исключив из этих 8 уравнений три параметра α, x_0, и y_0, мы получим 5 соотношений между коэффициентами старого и нового уравнений кривой, независимых от преобразования координат. Эти соотношения и будут ортогональными независимыми инвариантами циркулярной кривой.

Отсюда следует, что циркулярная кривая не может иметь более 5 независимых ортогональных инвариантов.

Всякая функция этих инвариантов в свою очередь будет также инвариантом, так что зависимых ортогональных инвариантов у циркулярной кривой может быть и более пяти, как увидим ниже.

§ 3. Так как при параллельном перенесении координатных осей коэффициенты старших членов (a и b) не изменяются (гл. I, § 4), то отсюда заключаем, что эти коэффициенты не зависят от x_0 и y_0, а только от угла поворота осей α. Исключив угол α из двух получившихся от сравнения коэффициентов старших членов уравнений, мы заключаем, что один из пяти независимых ортогональных инвариантов должен содержать только коэффициенты a и b.

Найдем этот инвариант.

Уравнение циркулярной кривой напишем в виде:

$$(ax+by)(x^2+y^2)+f_2(x, y)=0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Символом $f_2(x,y)$ обозначены члены ниже третьего измерения, которые в данный момент нам не интересны.

Сделаем в ур-нии (3) преобразование координат по формулам

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha \ldots \ldots \ldots \\ y&=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha \ldots \ldots \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

В таком случае уравнение (3) примет следующий вид:

$$(a_1x_1+b_1y_1)(x_1^2+y_1^2)+F_2(x_1y_1)=0 \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\text{где очевидно} \quad \begin{aligned} a_1&=a\cos\alpha+b\sin\alpha \\ b_1&=-a\sin\alpha+b\cos\alpha \end{aligned} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Из системы (6) мы и находим искомый инвариант старших членов уравнения циркулярной кривой, обозначив его через δ, получим:

$$\delta^2=a^2+b^2=a_1^2=b_1^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Квадрат этого инварианта только численным множителем $\frac{4}{27}$ отличается от дискриминанта кубичной формы:

$$(ax+by)(x^2+y^2).$$

Обращение δ в нуль, что возможно лишь в том случае, если одновременно a=o b=o, показывает, что циркулярная кривая переходит в коническое сечение.

§ 4. Найдем условие, чтобы особенный фокус (гл. I § 2) лежал на кривой.

Уравнение циркулярной кривой:

$$f(x,y)=(ax+by)\,(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \quad (8)$$

Обозначим для удобства члены 3-го измерения через u_3, второго через u_2, и т. д., т. е.

$$\begin{aligned} (ax+by)\,(x^2+y^2)&=u_3 \\ Ax^2+Bxy+Cy^2&=u_2 \\ Dx+Ey&=u_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9) \\ F&=u_0 \end{aligned}$$

Обозначив координаты особенного фокуса (x_c y_c), напишем требуемое условие в таком виде:

$$f\,(x_c\,,\,y_c\,)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\text{Как известно } x_c=\frac{a(C-A)-bB}{2\,(a^2+b^2)} \quad . \quad . \quad (11)$$

$$y_c=\frac{b(C-A)-aB}{2\,(a^2+b^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Подставив выражение x_c и y_c в уравнение кривой (8), находим согласно обозначениям (9)

$$u_3=(ax+by).\,(x^2+y^2)=\frac{[\,(C-A)^2+B^2\,].\,[\,(a^2-b^2).\,(C-A)-2abB]}{8\,(a^2+b^2)^2} \quad . \quad . \quad (13)$$

$$u_2=Ax^2+Bxy+Cy^2=\frac{[\,(C-A)^2+B^2]}{4\,(a^2+b^2)^2}.\left\{\,Aa^2+abB+Cb^2\,\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$u_1+u_0=Dx+Ey+F=\frac{aD.\,(C-A)-bDB-bE.\,(C-A)-aEB}{2\,(a^2+b^2)}+F= \quad . \quad . \quad (15)$$

$$=\frac{(aD-bE).\,(C-A)-B.\,(bD+aE)}{2\,(a^2+b^2)}+F$$

Сложив почленно равенства (13), (14) и (15), находим:

$$f\,(x_c,y_c)=\frac{(C-A)^2+B^2}{8\,(a^2+b^2)}\,(A+C)+\frac{4(aD-bE)\,(C-A)-4B(bD+aE)}{8\,(a^2+b^2)}+F=0 \quad (16)$$

или, по приведении к общему знаменателю правой части, получим:

$$\frac{[(C-A)^2+B^2].\,(A+C)+4(D-bE)\,\,(C-A)-4B\,(bD+aE)+8(a^2+b^2).\,F}{8\,(a^2+b^2)} \quad (17)$$

Обозначим выражение (17) через Δ_1

Если $\triangle_1=O$, то это будет условием того, что особенный фокус находится на кривой.

Эта особенность кривой очевидно не зависит от системы координат и след. $\triangle_1$ будет вторым инвариантом циркулярной кривой. Назовем этот инвариант $\triangle_1$ *инвариантом особенного фокуса.*

Инвариант особенного фокуса может быть выражен в зависимости от первого инварианта δ:

$$\Delta_1=\frac{[\,(C-A)^2+B^2\,].\,(A+C)+4(aD-bE).(C-A)-4.B.(bD+aE)+8\delta.F}{8.\delta.} \quad (18)$$

и представлен в виде разности двух детерминантов третьего порядка:

$$8\delta.\triangle_1 = \begin{vmatrix} A+C, & 0, & O \\ O, & A-C, & B \\ 0, & -B, & A-C \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -a, & b, & C-A \\ b, & a, & B \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Инвариант $\triangle_1$ - особенного фокуса можно назвать также инвариантом *кругового полюса*. Особый фокус циркулярной кривой можно назвать круговым полюсом потому, что первая поляра его относительно циркулярной кривой есть окружность. Это обстоятельство было уже показано выше (гл. II, § 6) аналитически. Не трудно показать то же и на основании чисто геометрических соображений (согласно § 8 гл. III). Действительно, первая поляра точки по отношению к данной кривой 3-го порядка есть коническое сечение, которое проходит через точки касания касательных к данной кривой из полюса. Так как из особенного фокуса выходят две касательных в круговых точках, то следовательно первая поляра особенного фокуса есть коническое сечение, проходящее через круговые точки плоскости, т. е. окружность.

§ 5. Найдем условие, чтобы все три ассимптоты кривой пересекались в одной точке, т. е. чтобы вещественная ассимптота кривой (гл. I § 1) проходила через особенный фокус.

Уравнение вещественной ассимптоты цирк. кривой (гл. I § 1) будет:

$$ax+by+\frac{Ab^2-Bab+Ca^2}{a^2+b^2}=0 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Уравнения мнимых ассимптот:

$$\begin{aligned} y-y_c &= +i\,(x-x_c) \\ y-y_c &= -i\,(x-x_c) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

где x_c и y_c суть координаты особенного фокуса.

Напишем уравнения всех трех ассимптот в таком виде:

$$a\,(a^2+b^2)x+b\,(a^2+b^2).y+Ab^2-Bab+Ca^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

$$-ix+y+ix_c-y_c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$ix+y-(ix_c+y_c)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Для того, чтобы три прямые (22) (23) и (24) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} a(a^2+b^2, & b(a^2+b^2, & Ab^2-Bab+Ca^2 \\ -\ i, & 1, & ix_c-y_c \\ i, & 1, & -(ix_c+y_c) \end{vmatrix} = O \quad \ldots \quad (25)$$

Раскрыв этот определитель, мы по сокращении на $-2i$ получим:

$$A\,(3b^2-a^2)-4Bab+C\,(3a^2-b^2)$$

Обозначим $A(3b^2-a^2)-4Bab+C(3a^2-b^2)$ через $\triangle_2$ . . . . (26)

Свойство ассимптот кривой пересекаться в одной точке очевидно не зависит от системы координатных осей, и следовательно выражение $\triangle_2$ представляет собою ортогональный инвариант циркулярной кривой.

Этот инвариант, также 3 порядка, назовем *ассимптотическим инвариантом* циркулярных кривых.

Обращение в 0 $\triangle_2$ свидетельствует о том, что три ассимптоты кривой пересекаются в особенном фокусе ее.

Ассимптотический инвариант $\triangle_2$ также может быть представлен в виде определителя третьего порядка, строками которого будут коэффициенты трехчленов:

$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}$ и $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ где Φ левая часть уравнения циркулярной кривой: $\Phi(x,y)=(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (27)

Действительно, из последнего уравнения находим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 3ax+by+A \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} = bx+ay+\frac{B}{2} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = ax+3by+C \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 3a, & b, & A \\ b, & a, & \frac{B}{2} \\ a, & 3b, & C \end{vmatrix}$$

Раскрыв этот определитель по элементам третьей колонны, мы и получим выражение (26).

Пример:

Рассмотрим кривую § 26 главы I.

Ее уравнение: $(x+2)(x^2+y^2)+x+6y-1=0$.

Здесь $a=1$; $b=0$; $C=A=2$; $B=0$; $D=1$; $E=6$; $F=-1$ . . . (31)

$$8\delta.\ \triangle_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -4.-2.-1 = 8$$

$$\delta=1;\ \Lambda_1=-1.$$

$$\Lambda_1 \neq 0$$

След. особенный фокус кривой (31) не лежит на кривой.

Пример 2.

Возьмем кривую: $(2x-2y)(x^2+y^2)+x^2-y^2+3x+5y-26=0$. (32)

Составим для нее выражение инварианта $\triangle_2$

Здесь $a=2$; $b=-2$ $A=1$; $C=-1$; $B=0$; $D=3$; $E=5$; $F=-26$.

$$\triangle_2=1.(3.4-4)-4.\ 0.\ 2.(-2)-1(3.\ 4-4)=8-8=0.$$

Следовательно все три ассимптоты кривой (32) должны пройти через одну и ту же точку (особенный фокус).

§ 6. Для вывода двух остальных ортогональных инвариантов циркулярных кривых обратимся к последнему § главы 3-й. Мы показали, что в случае

$$i_2=0$$

двойное отношение пучка касательных эквиангармонично.

Но

$$\text{I}_2 = -\frac{4}{3}\,(-6AF + 4A^2D + 3E^2 - A^4 - D^2) \quad . \quad . \quad . \qquad (33)$$

Так как свойство эквиангармоничности двойного отношения пучка касательных не зависит от изменения координатных осей, то мы имеем четвертый ортогональный инвариант циркулярных кривых:

$$4A^2D + 3E^2 - A^4 - D^2 - 6AF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (34)$$

Обозначим его буквою 81.S, тогда

$$\text{I}_2 = -108{,}S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (35)$$

Если

$$S = \frac{4A^2D + 3E^2 - A^4 - D^2 - 6AF}{81} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (36)$$

то двойное отношение пучка касательных из какой-либо точки циркулярной кривой обладает свойством эквиангармоничности.

S есть ничто иное, как первый Аронгольдовский инвариант проективного преобразования, конечно он же будет и ортогональным инвариантом, ибо ортогональные преобразования суть частный случай проективных.

Тождественность правой части равенства (36) с Аронгольдовским инвариантом S легко проверить по общим формулам, полученным Аронгольдом на основании теории инвариантов кубичных форм (См. Salmon, Courbes planes II ed § 220).

Инвариант S относительно коэффициентов уравнения циркулярной кривой будет четвертой степени.

§ 7. В § 14 главы 3-ей было показано, что если $\text{I}_3 = 0$, то двойное отношение пучка четырех касательных к циркулярной кривой гармонично.

Мы показали, что

$$\text{I}_3 = -4F^2 + \frac{16ADF - 8A^2F - 8E^2D + 4A^2E^2}{3} + \frac{16A^4D - 20A^2D^2}{9} - \frac{8A^6 + 8D^3}{27} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (37)$$

или

$$\text{I}_3 = -27\left[\frac{4}{27}F^2 - \frac{16ADF - 8A^2F - 8E^2D + 4A^2E^2}{81} - \frac{16A^4D - 20A^2D^2}{243} + \frac{8A^6 + 8D^3}{27^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (38)$$

Так как свойство гармоничности двойного отношения также не зависит от положения координатных осей, то выражение, стоящее в квадратных скобках равенства (38) можно принять за пятый ортогональный инвариант циркулярных кривых. Он тождествен с проективным инвариантом T. Aronhold'a. Это легко может быть проверено по общей формуле для инварианта T. (Salmon, Courbes planes § 221).

Инвариант

$$T = \frac{4}{27}F^2 - \frac{16ADT - 8A^2F - 8E^2D + 4A^2E^2}{81} - \frac{16A^4D - 20A^2D^2}{243} +$$

$$+ \frac{8A^6 + 8D^3}{27^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

Инвариант T для циркулярных кривых в форме уравнения (46) главы 3 будет содержать девять членов. Порядок его шестой.

Связь между Аронгольдовскими инвариантами $\S$ и T и Клебшевыми инвариантами биквадратичной формы $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$ устанавливается при помощи формул:

$$\dot{I}_2 = -108\S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

$$\dot{I}_3 = -27T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

Таким образом если $T=0$, то двойное отношение пучка четырех касательных проведенных из какой-либо точки циркулярной кривой к ней гармонично.

§ 8. Наконец, в случае равенства нулю дискриминанта кубического уравнения:

$$\theta^3 - 36\dot{I}_2\theta - 432\dot{I}_3 = 0$$

два из значений ангармонического отношения равны нулю, как было показано в конце главы 3-ей.

В этом случае, как известно из теории ангармонического отношения пара касательных пучка совпадает друг с другом, и кривая следовательно имеет двойную точку.

Условие, чтобы кривая имела двойную точку в инвариантах Клебша, уже было нами получено:

$$\dot{I}_2 - 27.\dot{I}_3^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

При помощи формул (40) и (41) условие (42) можно выразить в зависимости от S и T.

Несложное вычисление дает, что

$$\dot{I}_2 - 27\dot{I}^2_3 = -27^3.(64\S^3 + T^2)$$

Так как двойная точка кривой сохраняется при всяком преобразовании координат, то мы получаем так называемый *инвариант двойной точки циркулярной кривой*:

$$64S^3 + T^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

Этот инвариант, как показывает выражение (43), уже не является независимым, выражаясь через Аронгольдовы инварианты.

Аналитическое условие наличности двойной точки у циркулярной кривой будет таким образом:

$$64\S^3 + T^2 = 0.$$

(Продолжение следует).