Вл. Н. Ивановский.

Из лекций по методологии наук[1].

Глава II.

> Для непосвященного анализ... покажется просто рядом хитросплетений и мелочей. И это действительно мелочи; но мелочи такого рода, с какими имеет дело, напр., микроскопическая анатомия.
>
> *К. Маркс.* Капитал. т. I, предисловие к 1-му изданию. Пер. под ред. В. Базарова и И. Степанова. Госиздат, 1923, стр. XXXVI.

К методологии наук математических.

1. Мне неоднократно придется в дальнейшем касаться вещей, которые могут, на первый взгляд, показаться излишними „умствованиями", пустыми хитросплетениями.

Во время одной из моих первых лекций в Белорусском Госуд. университете я получил из аудитории такую записку: „К чему эти умствования? хорошо ли это?" Я ответил шуткой. Но в основе такого рода недоумений лежат настроения серьезные и нередкие среди начинающих, мало еще знакомых с наукой и ее методологией: в них сказывается, с одной стороны, недостаточное понимание важности детального изучения методических основ знания, а с другой—боязнь из-за того, что кажется излишними „умствованиями", потерять из вида важное и основное. Необходимо раз навсегда уяснить себе, что есть детали *побочные*, загромождающие главное: такие детали излишни. Но есть другого рода „мелочи": это—*мельчайшие составные части* изучаемого, те микроскопические клеточки, из которых оно состоит. Эти „мелочи" не внешни изучаемому предмету: именно они его *образуют* (а след., и *об'ясняют*). Без такого рода „мелочей" не может быть серьезного понимания; такие мелочи не отвлекают внимания от главного; напротив, только они позволяют его правильно истолковать.

Все в мире—как физическом, так и умственном—складывается из мельчайших частиц и из элементарных процессов, и именно в этих частицах и процессах происходят все реальные явления. В наших восприятиях мы имеем весьма сложные их результаты. Вначале мы даже не подозреваем всей их сложности: будучи сознаваемы непосредственно, они кажутся нам простыми, неразложимыми. И только психологический и логико-гносеологический анализ знания показывает нам всю их сложность.

В том месте „Предисловия" к 1-му тому „Капитала", из которого взят эпиграф, Маркс превосходно выясняет значение анализа элементарных составных частей изучаемого. „Развитое тело, говорит Маркс, легче изучать, чем клеточку тела". К тому же, продолжает он, в такого рода вопросах, как вопросы общественные (а также и философские, добавлю я), „нельзя пользоваться ни микроскопом, ни химическими реактивами. То и другое должна заменить *сила абстракции*" (благодаря чему и может иногда у непривыкшего к умственному анализу появиться впечатление „умствования"). „Для непосвященного, заканчивает Маркс, анализ... покажется просто рядом хитросплетений и мелочей. И это действительно мелочи; но мелочи такого рода, с какими имеет дело, напр., микроскопическая анатомия".

Кто хочет знать строение органического тела, тот должен изучать клетки его тканей под микроскопом. Кто хочет понять механизм общественно-производственного процесса в буржуазном обществе (об этом именно говорит Маркс в том месте, из которого взят эпиграф), тот должен внимательно рассмотреть „форму его экономической клеточки —товарную форму труда, или форму стоимости товара". Совершенно так же, кто хочет

[1]) Продолжение. См. „Працы Б. Д. Ун.", № 8-9-10.

понять механизм познавания и всех его продуктов („знаний"), тому нужно углубиться в анализ познавательных процессов и тех систематических целых, в которые эти процессы складываются,—т. е. наук, хотя бы кое-что в таком анализе и показалось, на первый взгляд, „хитросплетениями и мелочами". От „микроскопической анатомии знания" зависит понимание его строения и его законов.

2. Подбор материала в отдельных частях настоящей работы определялся, во-первых. тем, что цель ее *общеобразовательная*: она имеет в виду не лиц, специально изучающих данные отрасли науки, а тех, кто ставит себе задачей ориентироваться в научном знании вообще.

В силу этого я сосредоточиваю изложение на некоторых вопросах, представляющихся мне центральными, особо важными для понимания, и обхожу то, что имеет более специальное и техническое значение.

Равным образом, настоящая работа не ставит себе задачей сообщить все то, что относится, с одной стороны, к формальной логике, как ее элементы проявляются в каждой отдельной науке, а с другой—к специальной методологии отдельных наук. Эта книга прежде всего. введение в *науку вообще*.

Наконец, и собственно научный материал я буду привлекать преимущественно лишь для иллюстрации методологических положений. Более широкое трактование его вышло бы за пределы моей компетенции, да и опять-таки не отвечало бы моей основной задаче.

3. На протяжении истории мыслители высказывали очень различные воззрения на методологию математических наук.

Как и естественно, обычно они имели в виду *математику своего времени* и строили свое понимание ее методологии на основании современного им фактического состояния этой науки. Поэтому не имеет большого смысла исходить в выяснении методологии математических наук из воззрений мыслителей прошлых времен; наоборот, *их взгляды надо оценивать* с точек зрения, подсказываемых современным развитием математики. Надо взять *проблему в ее существе*, т. е. выяснить себе в общих чертах, что представляет собою *современная* математика. Это прольет свет на методологию этой науки, как она должна пониматься в настоящее время, и даст твердую исходную точку для оценки прежних воззрений на этот предмет.

В истории науки и философии бывали случаи, что мыслители вообще не считали нужным выводить свое понимание методологии математики из современного им состояния науки. Они им даже мало интересовались, предпочитая выдерживать ту или иную *общую* методологическую линию, проводить какой-либо „принцип", не опиравшийся на фактическое состояние данной науки,—внешний для нее. Так, напр., Д. С. Милль, уверенный в том, что метод всех наук должен быть одним и тем же, полагал, что принципы методологии естествознания должны быть и принципами методологии математики; он догматически принимал, что математика не может отличаться от естествознания в этом отношении. Такой предвзятостью страдает его теория математического мышления, развитая во II-й книге „Системы логики".

Наконец, бывали случаи что мыслители писали о методологии математики просто, как говорится, „с потолка", вообще плохо разбираясь в этой науке. Забавные взгляды в этом духе высказал очень начитанный, хотя и не сильный творчески, шотландский мыслитель сэр У. Гамильтон.

В виду всего этого мы должны, во-первых, остеречься принять какое-либо из старых мнений о методологии математики на основании одной только его „авторитетности", твердо помня, что устарение с течением времени даже самых „авторитетных" положений есть *всеобщий* закон природы—закон, в силу которого только и возможно непрерывное и бесконечное движение вперед.

Во-вторых, мы должны избегнуть указанной выше предвзятости: мы должны брать методы математики из нее самой, а не исходить из общих соображений о том, какими бы нам „хотелось" их видеть в связи с теми или иными нашими симпатиями.

Чтобы выяснить основы методологии современной математики, мы должны посмотреть сначала, каковы были исторические фазисы развития этой науки.

При таком историческом подходе многие различия в воззрениях на методологию математики окажутся зависящими просто от той эпохи, в какую данные воззрения были высказаны, и от тогдашнего состояния самой науки.

Пять главных периодов в развитии математических наук.

4. Историю математического мышления и математики, как науки,—с точки зрения ее жизненных корней, ее основных методологических принципов, ее общего строя, наконец, ее целей, ее назначения и приложений,--можно разделить, как кажется, *на 5 главных периодов.*

I-й период—эпоха *первобытно-магического* мышления. Установить ее хронологические границы невозможно: она обнимает все время от появления первых зачатков математической мысли в полу-животном состоянии человека до эпохи так наз. „древнейших цивилизаций".

II-й период—*практико эмпирическая* математика древнейших цивилизованных народов, особенно египтян и ассиро-вавилонян. Этот период охватывает несколько тысячелетий, предшествовавших расцвету греческой науки.

III-й период—*систематическое* построение греками (преимущественно) геометрии (Эвклид) и арифметики индусами. Так наз „средневековье"—западно-европейское и восточное, арабское—не составляет особого периода в истории математики. Новые народы (германцы, арабы, славяне) начинают этот период приемами мышления, не далекими от „первобытно-магических", и постепенно впитывают в себя индусскую арифметику и греческую геометрию

В силу смешения в средние века первобытных, свойственных самим „новым" народам, приемов мышления с заимствованными у греков относительно высокими образцами научной мысли, в течение средневековья мы видим пеструю картину умственного быта; рядом стоят и грубейшая магия, и довольно уже развитые, научные приемы мышления, в дальнейшем постепенно подготовлявшие тот расцвет науки, который начался с XVI века.

Этот, третий период захватывает две с лишком тысячи лет, если границами его считать, с одной стороны, Пифагора (ок. 580-501 г. до Р. Х.), а с другой--XVI-й век нашей эры.

IV период—*эпоха математики на службе у естествознания.* Он охватывает XVI, XVII и XVIII столетия нашей эры. Зачатками с ними это великое движение умов заходит еще в XV и даже в XIV и XIII века: в XV веке—Николай Кузанский, 1401 1464 г.; в XIV веке парижская школа оккамитов: Николай Орезм(+1382 г.), предтеча Декарта, Галилея и Коперника, Николай из Аутрикурии, сторонник механистического атомизма и замечательный критик познания; Іоанн Буридан и другие сторонники „механизма" в XIV веке; наконец, еще в XIII веке знаменитый Рожер Бэкон—1214—1292 г.—Коперник, Кеплер, Галилей, Декарт, Виет, Ферма, Роберваль, Паскаль, Лейбниц, Ньютон, Л. Эйлер, семья Бернулли, французские математики XVIII века—вот главные имена этого периода, когда математика была в теснейшей связи с физикой и разрабатывалась почти исключительно в целях непосредственного служения новому, естественно научному миропониманию. В области методологии науки период этот заканчивается Кантом.

Наконец, V период начинается с конца XVIII века (или с начала XIX) и охватывает весь XIX век и истекшую часть XX в. За это время математика начинает разрабатываться не только в интересах ее применения в естествознании, но *но и сама по себе*, как таковая. Она и в это время продолжает быть *орудием* естественно-научного познания; но кроме того мыслители изучают теперь и само это орудие,— его собственную природу и его характерные признаки. Это ведет ко все более отчетливому отграничению математики от естествознания, к новому пониманию состава и строя самой математики и к новому истолкованию ее отношений к „реальности".

Период этот не закончен еще и сейчас.

5. *Первый* из этих периодов был уже вкратце охарактеризован нами в I главе. В течение его мышление имеет в основном еще исключительно *конкретный* характер: умственные деятельности отвлечения, обобщения, синтеза, построения делают только первые шаги. Поэтому, напр., систематическое построение ряда „натуральных" чисел (1, 2, 3 и т. д.) идет еще очень недалеко; существует то, что я попробовал назвать „качественным счетом". Не выработаны основные (кажущиеся нам самоочевидными) положения относительно пространства и движения. Весьма вероятно, что нет еще мысли о неизменности размеров находящихся в пространстве предметов (и участков самого пространства), вследствие чего видимое уменьшение размеров предмета при его удалении от нас понимается как *реальное уменьшение* величины предмета, а также и занимаемого им участка пространства. А затем (и это самое главное) и числа, и геометрические и механические данные пропитаны *магическими* ассоциациями: все имеет магический смысл, все выражает собою деятельность тех фантастических сил, какие рисовались в основе природы человечеству той эпохи...

Как этот фазис соответствует в общем эпохе *дикого и полудикого* состояния человечества, так *второй*, *эмпирически-прикладной* период связан с „древнейшими цивилизациями". В эту эпоху фантастика первобытной мысли уже в значительной степени исчезает. Усложнявшаяся техника (измерение и межевание полей, постройка водоемов и оросительных каналов, больших зданий—дворцов, храмов, пирамид, сфинксов и т. д.) заставляла считаться уже не с магико-фантастическими, а совершенно *реальными* свойствами об'ектов—с измеримой длиной, шириной, величиной, формой, весом, расстояниями об'ектов, с различными отношениями между этими данными и т. д.

В течение этого периода, с одной стороны, делает некоторые успехи *синтетическая* работа мысли (дальнейшее развитие схемы чисел), а с другой—математические познания накопляются при помощи *отдельных* наблюдений, измерений, вычислений и построений. При технической работе и в ее целях замечаются некоторые соотношения между геометрическими и физическими фигурами, телами и их частями, а затем устанавливаются более или менее определенные зависимости между ними—сначала, вероятно, просто (приблизительным) измерением—для каждого отдельного случая, а затем и в более общей форме—для целого класса сходных об'ектов. В такого рода знании основные понятия бывают обычно очень неточны, числовые отношения изучаемых величин—лишь приблизительны; здесь почти нет еще *систематического* элемента—обзора и построения всех возможных случаев и комбинаций в их внутренних связях и соотношениях; не развита ни одна из математических наук в виде систематического целого. Общие вопросы о природе числа, пространства также еще не возникают: мысль удовлетворяется решением *частных* проблем, возникающих при технической работе и имеющих непосредственное применение на практике. Словом, строение математики в эту эпоху является в его исходной точке и в его генезисе преимущественно *эмпирическим*, опытным, а в его заключительной стадии—*технически-прикладным*[1]).

6. Существенно меняется принципиальная постановка математики и ее методологии в *третьем* периоде, особенно у древних *греков*, а отчасти и у *индусов*. В это время математическая наука впервые начинает разрабатываться *систематически*—на основе некоторых общих положений и принципов: определений, аксиом, постулатов. Эвклид строит геометрию, систематически развивая из принципов ее отдельные главы, и создает форму строгого, дедуктивного геометрического доказательства. Индусы в построении системы чисел и числовых обозначений выходят безмерно далеко за пределы того, что было нужно для повседневно применявшихся, „практически" полезных вычислений и технических расчетов и систематически развивают схему числа, как способной беспредельно увеличиваться совокупности единиц[2]). Как известно, чрезвычайно расширяет пределы чисел и счета и крупнейший представитель последней эпохи греческой математики—знаменитый Архимед[3]); этот же гениальный ум закладывает и первые камни здания научной механики (основы статики).

Для греческой математики чрезвычайно характерна была разобщенность арифметического и геометрического элементов. Греки не знали того, что составило великую силу и славу „нового", математического естествознания,—того *приложения арифметики и алгебры к*

[1]) В последнее время было высказано мнение, что египтяне обладали обширными и глубокими геометрическими и геодезическими познаниями, на основании тех закономерностей, которые якобы были обнаружены в размерах и положении некоторых пирамид и других сооружений древнего Египта. Однако, повидимому, размеры научных познаний строителей этих памятников сильно преувеличены. Вопрос этот возбудил полемику.

Краткие сведения о математике древних восточных народов есть в известном руководстве проф. *М. Симона* „Дидактика и методика математики" (рус. пер. М. 1922).

[2]) Проф. *А. В. Васильев* в книжке „Целое число" (Петр. 1922) приводит из поэмы Э. Арнольда „Свет Азии" следующий отрывок. Восьмилетний царевич, будущий Будда, экзаменуется Висвамитрою, „наук, искусств учителем превосходным"... „И сказал Висвамитра: Повторяй за мной! считай так, как я буду, пока дойдем до лакхи (100,000): один, два... затем десятки, и сотни, и тысячи... И вслед за ним назвал отрок единицы, десятки, сотни и не остановился на лакхе; нет, он шептал дальше—до тех чисел, которыми можно считать все, начиная от зерен на поле и до самой мелкой песчинки. Потом он перешел к катхе, к счету звезд ночных, к кати-катхе, счету морских капель, и далее к счету песчинок Ганга и к счету, единицами которого изображается весь песок десятка лакх рек таких, как Ганг. Затем пошли еще более громадные числа... и, наконец, число, при помощи которого боги вычисляют свое прошедшее и будущее".

[3]) В сочинении „Псаммит, или исчисление песка (по греч. psammos—песок) в пространстве, равном шару неподвижных звезд". Мир для Архимеда шар, которого центр Земля, радиус же равен расстоянию от центра Земли до центра Солнца; поперечник шара неподвижных звезд меньше десяти тысяч раз взятого поперечника мира. И Архимед создает для измерения об'ема этого шара следующую систему чисел: числа от 1 до „мириады мириад" (по нашей цифровой схеме—10.000×10.000, т. е. сто миллионов, или 10^8) он называет *первыми*. Эти 10^8 являются одной единицей *вторых* чисел, которые идут до 10^{16}. *Третьи* числа идут до 10^{24}, и т. д. Все это будет составлять числа *первого периода*, который заканчивается числом $10^{8.10^8}$, т. е. единицей с восемьюстами миллионов нулей. Это число будет единицей чисел *второго периода*, которые идут до $10^{2.8.10^8}$. Далее следуют *третий*, *четвертый* и дальнейшие периоды... до беспредельности. И напр., число $10^{10^8.8.10^8}$ изобразится единицей с восемьюдесятью тысячами миллионов нулей; чтобы написать его, нужно потратить около 2,000,000,000 лет непрерывной работы днем и ночью. „Псаммит Архимеда ввел в науку *понятие о бесконечно продолжающемся ряде целых положительных чисел*". Многотрудная работа человеческого ума была окончена. (Проф. *А. В. Васильев*. Целое число, стр. 11—13).

геометрии, из которого в XVII в. вышла „аналитическая геометрия“ Декарта. „Греки пытались построить геометрию при помощи (весьма остроумного) *метода пропорций*, или *отношений*“ [1]). Геометрия у Эвклида строилась на понятиях равенства и неравенства, на пропорциональности—вообще на отношениях не специально числовых. Поэтому геометрия греков была мало приспособлена для тех числовых измерений, на каких основываются и техника производственных процессов, и детальное исследование явлений природы. Потому же античная математика стояла в общем в стороне от естествознания: ею пользовались лишь немногие ученые (в роде, напр., Архимеда). У греков математика больше служила обще-философскому мировоззрению (Пифагор, Платон), чем науке о природе.

7. Геометрия греков и арифметика индусов, усвоенные в течение средних веков арабами, а затем европейцами, надолго остаются высшими достижениями математической мысли. Ими питается все арабское и европейское средневековье, делающее само от себя лишь несколько шагов вперед в области алгебры (усовершенствование символической формы обозначений, техники решения уравнений и т. п.).

За весь этот период общефилософские вопросы, связанные с математикой (о природе числа и пространства, об отношения математического мышления к реальности и т. д.), стоят на втором плане. Характерно, что даже у такого первоклассного и всеоб‘емлющего мыслителя, каким был Аристотель, нет общего понятия о пространстве и общей философской теории его. Аристотель знает лишь *конкретное* понятие „места“, занимаемого телом среди других тел; он говорит лишь об отношениях одного тела к другим, его окружающим.

Правда, у греков в течение почти всего периода расцвета их культуры было—и очень влиятельное—*математико-философское* направление, крупнейшими представителями которого были Пифагор и Платон. Оба эти мыслителя и их школы придавали огромное значение математическому мышлению, математике и основанному на математике пониманию реальности. Однако, это об‘яснение реальности математическими основаниями („числами“ у Пифагора, „идеями“, родственными по смыслу математическим понятиям,а позже и отожествлявшимися с этими последними—у Платона) имело не научный а *догматико-метафизический* характер. В нем не было еще того, что нас интересует здесь,—более или менее определенного представления о внутреннем соотношении между строго *научным* математическим мышлением, с одной стороны, и *научно* же составленной картиной реального мира и науками о реальности, с другой.

8. Глубочайший интерес представляет роль и значение математики в течение *четвертого* периода ее истории—в эпоху великого научного движения XVI—XVIII веков, создавшего новое естествознание.

Весь этот период стоит под знаком „новой науки“, „нового мировоззрения“. Средневековые, религиозно-церковные принципы и точки зрения постепенно изживают себя... Протест начинается с области общественно-этической: простые люди, простодушно верующие, мало-по-малу проникаются негодованием при виде морального упадка духовенства, светски-веселой и черство-легкомысленной жизни „князей“ церкви. Их робкие попытки отстраниться от церкви, завести себе таких пастырей, какие им нравятся, каким они доверяют, католическая церковь встречает осуждением, об‘являет ересью. Гонения ожесточают протестующих,—постепенно подготовляется общее отрицание

[1]) *А. Фосс*. Сущность математики. 1923, стр. 20.

авторитета римской церкви—церковная реформация. После того, как сложились новые протестантские церковные общины, католицизм начинает против них ожесточенную, кровавую борьбу, в которой позже и протестанты не остаются в долгу.. Варфоломеевская ночь во Франции, жестокие времене Марии Кровавой в Англии, 30-летняя война в Германии показывают всем, что религиозная вражда не останавливается ни перед какими жестокостями, ни перед какими ужасами... В связи с этим быстро падает тот религиозно-вероисповедный, церковный пафос, которым жило средневековье и первое столетие новой истории, тускнеют теологические призраки потустороннего, и интересы постепенно переходят на земное, человеческое, светское; место богословия занимает *наука о природе*. Один из крупнейших ее основоположников, великий Галилей так пишет в своем сочинении Saggiatore о задачах новой научной эпохи: „Философия написана в грандиозной книге, постоянно открытой для каждого (я говорю о вселенной); но ее может понять только тот, кто ранее научится понимать язык и знаки, которыми она написана. А написана она на языке математики, и знаками ее являются треугольники, круги и другие математические фигуры". Этими словами высказана основная тема той эпохи в вопросе о значении математики: в основе действительности лежат математические отношения, а потому математика есть техническое орудие, основное пособие при исследовании природы.

На первом плане для Галилея было именно естествознание; математика же была для естествознания лишь предверием, орудием разработки [1]).

9. В эту эпоху поразительных естественно-научных открытий, быстро следовавших одно за другим, внимание было направлено прежде всего на изучение *природы*. И не даром главные приобретения математики в эту эпоху состояли как раз в создании *двух* новых дисциплин, сделавших возможными блестящие успехи естествознания. Это были *аналитическая геометрия и счисление бесконечно малых*.

Вот перечень важнейших естественно-научных открытий той эпохи как его дают историки науки... Книга *Коперника* De revolutionibus orbium coelestium вышла в 1543 г. Под ее влиянием Дж. Бруно (сожжен на костре в 1600 г.) пришел к мысли о бесконечности вселенной и о бесчисленном множестве миров. Около того же времени имеют место великие открытия Кеплера (1571—1630 г. г.) и Галилея (1564—164[illegible] г. г.); а также ряд более мелких открытий, в роде приложения патером Мерсенном (1588—1648 г. г.) законов колебательного движения к механическому об'яснению главных звуковых явлений; данного Торричелли (1608—1647 г. г.) механического обяснения (весом атмосферного воздуха) факта поднятия воды за поршнем в насосе об'яснения, покончившего с той пресловутой пустотой, которой якобы боялась природа, и др. Тогда же Паскаль экспериментально доказывает, что воздух имеет вес, и дает идею барометра; Галилей и Дреббель кладут начало измерению температур; магдебургский бургомистр Отто Герике в 1650 г. изобретает воздушный насос и при помощи его производит свой знаменитый опыт с „магдебургскими полушариями", доказывающий давление воздуха на земные тела; Роб. Бойль создает новое понятие о химическом элементе, оставшееся в химии и до на-

[1]) Несколько иной смысл имеет заявление Канта, сделанное в конце того периода, о котором идет сейчас речь. „В каждой отдельной естественной науке, говорит Кант в предисловии к „Метафизическим основаниям естествознания", можно найти собственно науку лишь постольку, поскольку в ней можно найти математику". Кант в этих словах придает математике значение не просто инструмента для исследования природы (как это делал Галилей). Кант видит в математике *критерий научности* самого естествознания; он признает за „собственно науку" одну лишь математику, „математизирует" естественные науки... И тем не менее, даже и Кант все же *оставляет математику в теснейшей связи с естествознанием* и в этом отношении не расходится принципиально с Галилеем. Для Галилея математика—метод исследования; для Канта—основа, твердый каркас „собственно научного" в естествознании... Но ни Галилей, ни даже Кант не разрабатывают математики *помимо естествознания*, мало говорят о ней, *как таковой*, как о самостоятельной науке с оригинальными, ей только свойственными задачами и достижениями.

щего времени. а 1661 г. устанавливает закон сжимаемости газов. несколько позже найденный независимо от него Мариоттом; гениальный. но рано умерший Джон Майо (1645—1679 г. г.), предшественник Лавуазье и Пристли, производит ряд замечательнейших опытов по химии горения и дыхания; патер Гассенди возобновляет атомизм и кладет основание механической схеме световых явлений в виде теории „истечения“ световых частиц; иезуит Гримальди (1618—1663 г. г.) выдвигает первые идеи другой—„колебательной“ теории света. развитой Гюйгенсом (1629—1695 г. г.); Ньютон в 1671 г. открывает рассеяние света; Герике в 1672 г. строит первую, еще очень несовершенную. электрическую машину; Ремер в 1676 г. измеряет скорость света. и т. д., и т. д. Наконец, в 1686—7 г. г. выходят Ньютоновы Philosophiae naturalis principia mathematica, систематизировавшие основные понятия и законы новой физики и об'яснявшие тяготением весь строй солнечной системы.. Можно сказать. что почти не проходило года без какого-либо поразительного открытия. Общий интерес к естествознанию достигал огромного напряжения: всюду шли споры на естественно-научные темы. делали опыты, выходили книги. образовывались кружки и общества для изучения природы и т. д.

10. „Новая“ физика—в противоположность „старой“. аристотелевски-средневековой—решительно становится на *количественно-механическую* точку зрения. Все процессы, происходящие в физическом мире, суть *движения* материальных частиц, передаваемые ударом или толчком.

Движения эти происходят преимущественно по кривым линиям; ибо даже всякое „прямолинейное“ движение предмета необходимо предполагает заполнение образующейся сзади движущегося предмета пустоты воздухом или иной средой, выталкиваемой передней частью предмета вперед и в стороны и обтекающей предмет с обоих его боков. Так, воздух, выталкиваемый паровозом поезда, течет вдоль движущихся вагонов и затем заполняет пустоту сзади поезда, где образуется ветер в направлении движения последнего, так сказать, догоняющий его (это видно по бумажкам, сухим листьям и другим легким предметам, всегда мчащимся за поездом). Поэтому, по Декарту, материальный мир есть *сложнейшая система „вихрей“*, разнообразнейших криволинейных движений частиц материи. А отсюда одной из первых задач физики становится изучение путей этих криволинейных движений, т. е. *кривых линий*. Метод такого изучения и дал Декарт, создав новую науку—*аналитическую геометрию*. Отсюда видна вся колоссальная важность этого великого изобретения Декарта; оно дало способ точного изучения движений, т. е., значит, всех процессов физических.

Исходной точкой аналитической геометрии является остроумный прием определения положения каждой точки в плоскости выраженными в числах расстояниями этой точки от двух произвольно проведенных в этой плоскости пересекающихся линий—*координат*. Каждая форма изучаемой кривой линии выражается тогда особым, характерным для нее *уравнением*[1]).

11. Подобным же образом и другое великое математическое изобретение XVII века—*исчисление бесконечно малых*—также возникло в целях изучения процессов природы, т. е. движений. Этот огромный и в высшей степени важный отдел математики был создан в течение XVII в. трудами ряда крупных умов; окончательную форму ему придали Ньютон и Лейбниц. Ньютон прямо назвал свой метод *методом флюксий* (от латин. fluo-теку: fluxio-течение), т. е методом течений (или *движений*).

[1]) Вот что говорит в своей „Геометрии“ сам Декарт. „Все проблемы геометрии легко можно свести к такого рода терминам. что потом для их построения будет нужно только узнать длину некоторых прямых линий. Поэтому я и не буду стесняться вводить в геометрию эти арифметические термины“. (Geometria, Francofurti ad Moenum. 1695, p.1). Вот именно такого „приложения арифметики (и алгебры) к геометрии“, такого применения числа к измерению пространственных величин и не было у древних греков.

„В исчислении флюксий, как это показывает само название, основные представления о бесконечно малых были заимствованы из учения о движении“ [1]), а именно: из динамики Галилея. Лейбниц исходил в своих основных понятиях не столько из механики (как Ньютон), сколько из геометрии: „примыкая непосредственно к геометрическому представлению, он положил в основу своих рассуждений *бесконечно малые величины*“ [2]).

Замечу, что в оценке Лейбницевых взглядов на бесконечно малые авторитетные математики расходятся. Так, *Г. Кантор* (в статье: „О точках зрения на актуально бесконечное“, переведенной в VI вып. „Новых идей в математике“, стр. 86) пишет: „Бесконечно малые представляют собою лишь *переменные*, произвольно малые вспомогательные величины, совершенно исчезающие из результатов; поэтому Лейбниц характеризовал их как простые *фикции*“. Напротив, *А. Н. Уайтхэд* говорит так: „в изложении основ дифференциального исчисления естествоиспытатель Ньютон был большим философом, чем признанный философ Лейбниц; но Лейбниц создал ту удивительную систему знаков, которая имела важное значение для развития этой науки... Лейбниц, как это ни покажется странным, полагал, что бесконечно малые величины действительно существуют (а вместе с ними и бесконечно малые числа). Идеи и терминология Ньютона носят более современный характер“ [3]).

Но изобретения обоих великих умов [4]) послужили одной и той же цели: они дали новый (и в высшей степени плодотворный) метод изучения *движений*, а след. и вообще процессов природы.

„Отныне, говорит Фосс (Сущность математики, стр. 13), открылся путь для дальнейшего развития исчисления бесконечно-малых. Стало ясно, что во всех процессах природы (*а их-то, главным образом, и имела в виду тогдашняя наука*) мы встречаемся с тем же, с чем и в геометрических и аналитических изысканиях. Определенная группа неизвестных процессов, которые—благодаря своей измеримости—допускают числовое выражение, дана при помощи их флюксий или производных относительно группы независимых переменных (величин времени или длины); требуется найти эти неизвестные процессы... Употребление бесконечно малых величин чрезвычайно облегчило наглядное понимание задач... Мало-по-малу удалось всецело выразить в системе дифференциальных уравнений не только вопросы геометрии и анализа, но и всю механику, и притом не только астрономическую (или механику неба), но и молекулярную: теорию упругости, гидродинамику, теорию распространения теплоты, а позднее также учение об электричестве и магнитизме, поскольку уже были установлены экспериментальные основы этих явлений“...

„Никогда еще никакая наука не праздновала таких триумфов, как математика в период героев исчисления бесконечно малых: Бернулли, Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Лапласа. Проникновение математического анализа во все области мира явлений в XVIII в. явилось воистину триумфальным шествием. Проблемы, о разрешимости которых в прежнее время даже думать не смели, теперь были поставлены и немедленно же, чуть не шутя, разрешены. Ничто в области точных естественных наук не казалось отныне недоступным человеческому уму“...

Столетием слишком позже возникновения аналитической геометрии была создана французским математиком Лагранжем *аналитиче-*

[1]) Проф. *А. Фосс.* Сущность математики, русск. пер., 1923, стр. 13.

[2]) Там же.

[3]) *А. Н. Уайтхэд.* Введение в математику. Русский перевод. Петроград. 1916, стр. 206-207.

[4]) Из предшественников их особенно замечателен гениальный французский математик *Ферма* (1601-1665 г.). Уайтхэд говорит про него так: „Ферма настолько развил идеи своих предшественников, что вся эта наука кажется почти созданной им“. Кроме того, тот же Ферма „имеет право разделить с Декартом и честь изобретения координатной (аналитической) геометрии“. (Введение в математику, стр. 200).

ская механика, позволившая распространить и на эту область все выгоды и достижения аналитического и числового трактования предмета.

12. Итак, в эпоху радикальной перестройки физического мировоззрения передового человечества, в XVI—XVIII в., математика разрабатывалась, главным образом, в целях ее непосредственного приложения к изучению природы. На сущности математики, как таковой, останавливались мало; а потому значение ее основных понятий (а вместе с этим и ее методология) представлялись еще очень неясно. Математика в эту эпоху ставилась в слишком тесную связь с науками о природе, с науками „реальными", от чего возникали многочисленные недоразумения И даже первоклассные умы, научно-философские гении впадали в ошибки в этих вопросах, туманно представляя себе отношение между математическим мышлением, с одной стороны, и реальностью, с другой. В общем считали, что математика занимается „реально существующим"; а потому *одни,* находя те или иные математические образования несогласными с обычными представлениями о реальности, признавали их невозможными, внутренно противоречивыми; *другие* на том-же основании признавали „реальными" такие математические образования, которые мы сейчас считаем чисто умственными построениями; *третьи* отвергали возможность изучения математикой чего-либо реально не существующего.

К первой из этих групп можно отнести Декарта и его школу, эти мыслители отвергали так наз. „мнимые количества", считая их *невозможными* в силу их „нереальности"[1]).

Многие первоклассные мыслители XVI—XVIII веков считали *невозможными* „бесконечно большие" числа (с которыми, однако, совершенно уже свыклась современная математика). *Г. Кантор* („Основы общего учения о многообразиях",— пер. в „Новых идеях в математике", вып. VI, стр. 20) называет в числе их Декарта, Локка, Спинозу, Гоббза, Лейбница, Беркли, прибавляя, что „вряд ли и теперь возможно придумать более сильные доводы против введения бесконечных целых чисел, чем те, которые имеются у этих авторов"[2]).

Особенно много недоразумений вызывали величины „бесконечно малые" и их отношения к реальности. „Одни принимали их прямо за нули; другие создавали себе... представление о величинах, которые, будучи меньше всякой представляемой величины, все же заключают в себе зародыш возникновения конечного количества" [3]).

Дж. Беркли отрицает бесконечно малые величины, считая их *невозможными и в математике* на том основании, что их нет в *реальном* мире.

Дело в том, что Беркли — тонкий, хотя и односторонний и в некоторых важных вопросах предвзято настроенный, мыслитель—резкий *сенсуалист.* Сенсуализм, шедший еще частью от Аристотеля, возобновленный в XV веке Телезием и другими, был чрезвычайно распространен в XVIII столетии „Всякая мысль есть копия ощущения; следовательно, мыслить можно только о том, что может быть дано в виде реального восприятия",—таков лозунг сенсуализма. Отсюда требова-

---

[1]) *Ф. Журден.* Природа математики. Одесса, 1923 г., стр. 66.

[2]) Правда, в другом месте Кантор отмечает, что иногда (в противоречие с самим собой) Лейбниц высказывался самым недвусмысленным образом в пользу „собственно-бесконечного", причем Кантор приводит и соответствующую цитату. („Основы общ. учения о многообразиях", рус. пер., стр. 24).

[3]) Так резюмирует положение вопроса *А. Фосс* в своей сжатой, но богатой содержанием брошюре „Сущность математики" (рус. пер., 1923 г. стр. 22).

ние, чтобы и математика занимались только *конкретным*, чтобы все математические понятия соответствовали „реальностям“ (т. е., значит, напр., чтобы „математические“ точки были в то же время и физическими, и т. п.). А так как было очевидно, что „бесконечно малые“ величины не совпадают ни с какими физическими величинами (ибо физическое деление не может продолжаться беспредельно), то эти мыслители их попросту отрицали, называя нелепостями, „духами почивших количеств“, „химерическими порождениями воображения математиков“ и т. д.

Именно так выражается об этих величинах Беркли. Исходя из своего сенсуализма, Беркли полагает, что и математика должна иметь своим предметом только *чувственно воспринимаемое*[1]) (по его терминологии, *идеи;* идеи, как известно, Беркли понимал как восприятия „духов“; из них и состоит то, что *мы обычно* называем „внешней реальностью“).

Математические понятия Беркли *отожествлял* с реальными восприятиями и реальными предметами. Его „Записная книжка“ (Commonplacebook) полна заявлений в роде следующих.

„Мы не можем вообразить линию или пространство бесконечно большими; поэтому *нелепо* (курсив мой. В. И.) говорить или выставлять положение о бесконечных линиях или бесконечном пространстве“... „Нельзя рассуждать о вещах, о которых у нас нет идей (т. е. чувственных образов); след. нельзя рассуждать о бесконечно малых величинах“... „Линия состоит (*реально*. В. И.) из известного числа точек, лежащих между 2 точками“... Вот замечание о методе: „По отношению к линиям и фигурам должно быть применяемо *скорее ощущение* (sense), *чем разум или доказательство*, так как линии и фигуры чувственны“... Наконец даже: „Положение Архимеда относительно квадратуры круга *неприложимо к окружностям, содержащим в себе менее* 96 точек“... „Сравните кривую линию с равной ей прямой и *под микроскопом* вы найдете, что они неравны“...

Везде прямое отожествление *математических* элементов и понятий с *реальными*, физическими [2]).

Конечно, столь кричащее непонимание об'ектов математики и методов ее разработки можно найти лишь у таких противников математики и крайних сенсуалистов, как Беркли.

Однако, даже у специалистов математиков той эпохи нет еще положительной теории математического мышления в его отношении к реальности: и у них оно стоит в какой-то не совсем ясной близости к мышлению естественно-научному; и им не ясна еще специфическая природа математики, не ясны основания ее метода и характерные для нее приемы мысли [3]).

Многим из них казалось, что математическая наука *едина*, что нет и не может быть нескольких отличных друг от друга геометрий или арифметик, что эта единая математика (арифметика „вещественных“ чисел, эвклидова геометрия, ньютонова механика) в силу своей строгой доказательности „необходима“ (в философском смысле), что

---

[1]) Развивая это *совершенно неверное* положение, Беркли, тем не менее, попутно высказывает в отношении математики ряд ценных мыслей, критикуя Ньютона и других математиков той эпохи. См. об этом у проф. *А. В. Васильева*. „Пространство, время, движение. Исторические основы теории относительности“. Петроград, 1923, стр. 39—42.

[2]) См. также в сочинении The Analyst, adressed to an infidel mathematician, sect. 5, 6 и др., De motu и в других работах Беркли.

[3]) В высшей степени поучительным было бы рассмотрение методологии математики XVII—XVIII веков с этой именно точки зрения — отношения математического мышления к реальности.

она представляет собою необходимое и общеобязательное (рациональное, априорное) построение ума, а в то же время и вместе с тем выражает и законы реального мира, как он нами познается.

13. Особенно ярко и отчетливо отразилась эта фаза математической науки и ее методологии в воззрениях *Канта*. Канта надо считать завершителем и систематизатором той методологии математики, какая создалась на почве невиданно быстрого и обильного достижениями расцвета ее в XVI XVIII веках. Кант стоит на пороге следующего периода, основные положения которого зарождаются как раз около времени конца его жизни.

Как известно, в своей теории знания, развитой в „Критике чистого разума" (1781 г.), Кант попытался связать методы математики и естествознания (как эти науки сложились в XVI–XVIII веках, найдя свое заключительное выражение в знаменитых „Математических началах естественной философии „Ньютона, 1686-7 г.), с положениями, с одной стороны, „скептической" (вернее, „позитивной") теории знания Юма, а с другой—с теорией рационального познания—с „априоризмом", шедшим от Лейбница.

Согласно взглядам Канта, во-первых, *математические* науки существуют каждая в единственном числе: есть только *одна* арифметика (вещественных чисел), только *одна* геометрия (эвклидова), только *одна* механика (ньютонова). Канту совершенно чужда еще та мысль, которая стала пробиваться после его смерти,—мысль о *множественности* (научных и законных) форм каждой математической науки. Эта мысль, из которой вышли так. наз. „воображаемые математические науки", обусловила полную переоценку и пересоздание методологии и философии математики. Кант и не подозревал еще надвигавшейся революции!..

Во-вторых, по Канту, эта единая математика безусловно достоверна, „аподиктична", необходима; а потому она может быть только *априорной*: т. е., она представляет из себя продукт деятельности познавательной способности человека (и именно, особой способности „чистого наглядного представления", или „чистого воззрения"), строящей (на основе, конечно, отдельных, разрозненных данных опыта) *единые*, *бесконечные* и *необходимые* „чистые „формы" воззрения" (по современной терминологии, „восприятия"): пространство и время. Эти две „формы" суть необходимые условия всякого нашего опыта: они как бы налагаются нашим познающим умом на все отдельные показания чувственного опыта, вмещают в себя эти последние. Таким образом, математические пространство и время, *как общие формы всякого опыта, суть создания нашего ума*.

В-третьих, эти создаваемые умом общие формы (и основанные на них науки: геометрия и арифметика) суть в то же время и необходимые и единственно возможные формы научного понимания и об'ективирования нами *действительности*. Эти создаваемые мыслящим суб'ектом формы являются и об'ективными формами самого реального мира, [1]) поскольку он нами познается.

14. Замечательно, что эта тенденция сливать математику с реальностью неоднократно прорывалась и позже; она доходит в виде пережитка до наших дней. Так, напр., в некоторых отношениях такой сильный мыслитель, как глава марбургской школы „неокантианцев" Герман Коген, *увлеченный стремлением везде найти в познании* математику,

[1]) Хотя Кант не отрицал „эмпирической" реальности пространства и времени и придавал им лишь „трансцендентальную" идеальность (т. е., идеальность в смысле *необходимых условий всякого нашего опыта*), однако, воззрения его в этом вопросе не лишены больших неясностей.

считает возможным вывести „реальность“ из *математического* бесконечно-малого, не замечая радикального различия *чисто умственного*, математического *построения* от *реально-чувственного бытия*.

И у нас один из видных нео-православных церковников, свящ. Павел Флоренский в брошюре „Мнимости в геометрии“ (М. 1922 г.) пытается обосновать некоторое подобие средневековой картины реального мира на чисто математической,—мало того, и в математическом-то аспекте только *условной*, только иллюстративной—локализации мнимых количеств *не во втором измерении плоскости* (как это обычно делают), а на *обратной стороне* этой последней (второе измерение плоскости, говорит о. Флоренский, уже занято одной из координат Декарта).

Брошюра о. Флоренского вся основана на смешении математически условного с реально существующим.

На том же смешении понятий основана и недавно вышедшая брошюра *М. М. Гаркуши* „Параллельные линии. Постулат Эвклида. Пространственный минимум. В чем ошибка Лобачевского?“, М. 1926. Автор все время указывает на *невозможность беспредельной (реальной) дробимости реального пространства*. „Числовые величины, подчиняясь нашей фантазии, могут быть уменьшаемы до бесконечности; величины же реально пространственные только до своего последнего минимума и до нуля... В результате смешения этих понятий и родилась (по мнению автора) „параллель“ Лобачевского—его основная ошибка“ (стр. 7—8). Автор никак не может себе усвоить, что „воображаемая“ геометрия вовсе и не нуждается в совпадении ее положений с данными „опыта“, особенно взятыми в ограниченном масштабе. Такого же рода совершенно неосновательные требования выставляют и сторонники так наз. „натуральной геометрии“, согласно взглядам которых геометрическое равенство должно всегда сопровождаться и физическим совпадением („конгруэнцией“) при наложении. Поэтому, напр., никогда ни одна кривая линия не может быть равной по величине прямой, и т. д.

Наконец, даже такой первоклассный, творческий математический ум, как знаменитый Георг Кантор, не свободен от указанных смешений.

Правда, в общей форме он ясно различает („Основы общего учения о многообразиях“, рус. пер., стр. 30) *собственно математическую*, „умственную“ бесконечность (целых чисел), которую он называет „*интра-суб ективной*, или имманентной, *реальностью*“, и бесконечность *транс-суб'ективную* (или *транзиентную*), „поскольку бесконечные числа следует рассматривать как выражения, или отображения процессов и отношений во внешнем мире, поскольку различные числовые классы... являются представителями мощностей, имеющих действительное место в телесной или духовной природе“.—Однако, в деталях своих рассуждений он не всегда проводит точную границу между математическим и реальным аспектами бесконечных чисел, и у него иногда не совсем ясно, что он разумеет под „действительностью, или существованием бесконечных чисел“, под их „реальностью“ и т. д. Кантору вредит в этом пункте его заигрывание с богословскими точками зрения, благодаря которому у него встречается немало таких, напр., мест, как „краткие намеки“ на доказательство „сотворенного бесконечного“, из которых один состоит в „умозаключении от высшего совершенства существа божия к возможности сотворения Transfinitum ordinatum, а затем от его всеблагости и величия к необходимости фактически последовавшего сотворения Transfinitum“, а другой—в доказательстве „a posteriori, что допущение Transfinitum in natura naturata дает лучшее... об'яснение явлений“... (К учению о трансфинитном“, рус. пер., стр. 121). Подобных мест у Кантора немало. Признание бесконечностей в реальном мире на основании (несомненной) возможности *математических* бесконечностей—со слабой опорой в богословских аргументах—есть, конечно, незаконное выхождение за строгие пределы собственно математики.

В сущности, как кажется, надо различать не два, а *три* рода бесконечностей: 1) бесконечность *не-собственная*—незавершенный ряд беспредельно возрастающих чисел („дурная“ *математическая* бесконечность). 2) *собственная* бесконечность—завершенный в известном смысле, хотя и беспредельный, ряд чисел („актуальная“ *математическая* бесконечность) и 3) бесконечность реально существующего („актуальная“, но уже не математическая, а *реальная* бесконечность).

У нас нередко смешивают две последних бесконечности и считают, что, раз Кантор показал возможность завершенной, актуальной *математической* бесконечности, то этим доказана и *реальная* бесконечность... На самом деле это две совершенно различных проблемы, и от математики к реальности тут аргументировать нельзя. Это смешение заметно, напр., у *Б. П. Вышеславцева* в его книге „Этика Фихте“.

15. Начиная с конца XVIII в., то понимание математики, на почве которого стоял Кант, постепенно оказывается несостоятельным. Наступает *пятый* (и пока последний, захватывающий и современность) период в развитии математики и ее методологии.

Этот период характеризуется, прежде всего, появлением ряда *новых*, ранее не существовавших математических наук. И эти новые науки лежат, так сказать, в иной плоскости методологии, чем прежние математические науки. И ранее, в XVII и XVIII веках возникали новые математические науки: аналитическая геометрия, аналитическая механика, счисление бесконечно малых. При этом менялась, конечно, и методология, — однако, так сказать, *внутри самой математики*. Теперь же стала меняться и философская, *гносеологическая* методология ее. Стали вводиться *новые познавательные принципы*, *новые* основные, исходные положения, давшие начало так наз. „воображаемым“ наукам.

Параллельно с развитием этих наук постепенно осознается и их *методология* — те процессы мысли, которые привели к их возникновению. А в связи с этим получает новую форму и учение о методах наук математических вообще.

Вместе с тем, внутри математики (в ее новом, более обширном составе) происходит дифференциация: одни дисциплины отрываются от тесной связи с реальностью и выделяются в состав *чистой* математики (науки „собственно математические“); другие, наоборот, начинают ставить себе задачей как раз исследование этой реальности, приближаясь таким образом до известной степени к наукам естественным. Оказывается, что вопрос, о котором шло много споров: что именно изучает математика? умственные ли построения или же реальность? — решается очень просто... Математика (в ее целом) изучает и то, и другое, — но только различными своими отделами и, конечно, различными методами. То, что иногда, быть может, чувствовалось как „апория“, как безвыходное внутреннее противоречие (ибо, с одной стороны, сознавали, что элемент умственного построения играет в математике какую-то очень важную роль; а с другой — казалось нелепым, чтобы могла существовать наука, „отрешившаяся“ от реальности), оказалось двумя сторонами одного и того же сложного целого. Место прежнего, не дифференцированного единства заняла опирающаяся на более отчетливое усмотрение сущности математики дифференциация.

Эта перегруппировка математических дисциплин, быть может, еще не вполне утвердилась в общем сознании; однако, существо дела, по-видимому, говорит всецело за нее.

16. С самого рубежа между XVIII и XIX столетиями начинает все настойчивее пробиваться мысль о том, что арифметика наших обычных, „вещественных“ чисел и эвклидова геометрия не представляют собою единственно возможных типов арифметической и геометрической науки.

У источника этого движения стоит один из самых широких и глубоких умов математики — знаменитый „князь математиков“ Гаусс (1777—1855 г.). Еще около 1792 г. (т. е. при жизни Канта и всего через 11 лет после выхода в свет „Критики чистого разума“) Гаусс приходит к мысли, что одна из основных аксиом эвклидовой геометрии — постулат о непересекаемости (при любом продолжении) лежащих в одной плоскости „параллельных линий“ — не является строго обоснованной, и что поэтому возможна иная, не-эвклидова система геометрии. Однако, Гаусс высказал это свое убеждение только в письмах к ближайшим друзьям и не опубликовал его в печати [1]). И честь опубликования первых трудов по не-эвклидовой геометрии выпала на долю нашего русского

[1]) Беру у *А. Фосса* (Сущность математики, стр. 94) цитаты из писем Гаусса. „Вот уже свыше 30 лет (пишет Гаусс Тауринусу 8 ноября 1824 г.), как я занимаюсь этим предметом. Допущение, что сумма 3 углов △-а меньше 180°, приводит к совершенно новой и отличной от нашей геометрии. Эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя вполне удовлетворительно“. „Мое убеждение (письмо Бесселю 27 янв. 1829 г.), что нельзя обосновать геометрию вполне a priori, еще более укрепилось“ (последние слова уже прямо против Канта!)

гениального математика, проф Казанского университета Н. И. Лобачевского. Лобачевский, независимо от Гаусса и совершенно не зная о его воззрениях, пришел к тому же убеждению относительно необоснованности аксиомы о параллельных линиях. 12-го февраля ст. ст. 1826 г. он прочел в заседании факультета первый свой мемуар о новой геометрии, а в 1829 г. выпустил первое печатное ее изложение.

В 1832 г. выпустил небольшую работу в том же духе сын университетского товарища Гаусса венгерец *Иоанн Болиаи*, на которого, повидимому, имели косвенное влияние воззрения Гаусса. Позже на этом поприще выступили *Риманн*, *Бельтрами*, *Ф. Клейн* и многие другие. И теперь „не-эвклидовы" [1]) геометрии являются признанными членами в семье наук.

Тот же Гаусс способствовал и созданию первой системы арифметики, выходившей за пределы традиционной арифметики вещественных чисел. Гаусс расширил понятие о числе введением „комплексных" чисел и тем дал начало арифметике многих типов единиц (чисел комплексных, гиперкомплексных, кватернионов), законы которой оказываются отличными от законов арифметики чисел вещественных. Позже для теории комплексных чисел много сделал французский математик *Коши*; учение о кватернионах разработал в 40-х годах XIX в. ирландский математик *В. Р. Гамильтон* (хотя, как указывает А. Фосс, они были введены, собственно говоря, тем же Гауссом в 1819-20 г. г.).

Позже *Г. Кантор* (предшественником которого был в этом *Больцано* в своих „Парадоксах бесконечного") создает еще иной тип арифметики—*арифметику бесконечных множеств и трансфинитных чисел*.

Наконец, в XX в. возникает и отличная от ньютоновской система механики (эйнштейнова), пролагающая путь к образованию механики „воображаемой".

Таким образом, последний период истории математических наук отмечен, прежде всего, появлением целого ряда ранее не существовавших, „воображаемых" наук.

Каждая из этих новых наук представляет собою вполне „научное" (в математическом смысле,—т. е. стройное, логическое, вытекающее из основных допущений, лишенное внутренних противоречий) целое.

Эти основные допущения образованы (в известных пределах) свободно, но затем развиваются строго логично, при помощи дедукции. Оказалось, что традиционные математические дисциплины суть не *единственно возможные*, *„разумно" необходимые* системы, что кроме них и параллельно им может быть построен ряд иных математических наук.

Возникновение „воображаемых" математических наук сделало неизбежным распадение математики на две принципиально одна от другой отличные области: 1) на „чистую", отвлеченно мыслимую, или собственно „построительную" математику и 2) математику реальную.

А так как в основе каждой из этих областей математики лежат специфические для нее методы, то и методология математики получает теперь две различных формы: одну—в области чистой математики и др гую—в области математики „реальной" (см. ниже).

Теперь об'ектом „чистой" математики становится уже не то, что „существует реально", т. е. в фактическом смысле, а то, что существует, в качестве *правомерного логического построения*; т. е., то

---

[1]) О не-эвклидовых геометриях, а также о других упоминаемых здесь математических системах я дам краткие сведения ниже.

1) что может (в известной области) мыслиться без внутренних противоречий, 2) что строго логически выводится из предпосылок, хотя бы последние строились до известной степени произвольно. „Чистая“ математика обнимает теперь отвлеченно возможное, логически мыслимое, строго связное и вытекающее из предпосылок; она становится наукой об *умственных построениях*.

Только приняв во внимание эту радикальную перестройку методологии новейшей (чистой) математики, можно понять и оценить определения, даваемые этой науке ее современными представителями[1]). Вне общего направления современной математики определения эти могут показаться неожиданными, а пожалуй—и странными и парадоксальными...

Известно определение чистой математики, данное одним из крупнейших математиков-философов нашего времени *Бертраном Рёсселем*. Чистая математика, говорит Рёссель, целиком состоит из утверждений следующего типа: если такое-то положение справедливо в применении к какому-нибудь об‘екту, то в применении к тому же об‘екту справедливо и такое-то другое положение. Здесь существенно, во-первых, то, что вопрос, справедливо-ли на самом деле первое положение, не подлежит обсуждению, а во-вторых, что нет необходимости указывать, что̀ представляет собою тот об‘ект, в применении к которому признается справедливым первое положение.

Таким образом, математика может быть определена как *наука, в которой мы никогда не знаем, о чем мы говорим, и никогда не знаем, верно ли то, что мы говорим*[2]).

Во избежание недоразумений, необходимо точно понять это определение.

Прежде всего, оно страдает неполнотой: в нем не указаны *об‘ем* и *область* тех положений, которые входят в математику. *Не всякие логические выводы одних положений из других дадут математику.* Рёссель слишком приближает математику к логике. В этом отношении определение Рёсселя хорошо дополняется другим, столь же известным определением *(Г. Кантора)*, согласно которому *матеметика есть наука о хорошо упорядоченных многообразиях*, или *о формах хорошо упорядоченных многообразий*.

Мы можем упорядочивать „многообразия“ (т. е. вообще все возможные содержания нашего знания) по *количеству и числу, по времени, пространству, порядку*, а также в отношении того синтеза форм времени и пространства, в которой отливается *движение*. И все эти формы составляют содержание математических наук.

Таким образом, определение Рёсселя должно было бы получить приблизительно следующий вид: *чистая мататматика есть наука логических выводов одних положений из других в сфере форм хорошо упорядоченных многообразий*.

В последней фразе своего определения математики Рёссель играет понятиями: *знать, верно* и т. д.

[1]) Некоторые из современных определений математики собраны у *А. Фосса* (Сущность математики, Госизд., 1923, стр. 68) и у проф. *А. В. Васильева* (Математика, Казань. 1916).

[2]) Не имея под руками того сочинения Рёсселя, в котором он дает это определение (The principles of Mathematics), я беру его из книги *И. Е. Орлова* „Логика естествознания“. Скажу кстати, что книга И. Е. Орлова написана с настоящим знанием дела. Менее удовлетворительной представляется мне в ней как раз глава III, посвященная математике.

Это придает пикантность его определению, но может повести к недоразумениям, если не истолковать совершенно отчетливо употребляемых Рёсселем терминов.

Говоря: „мы никогда не знаем, *о чем* говорим", Рёссель имеет в виду *предметное* знание с его *конкретными* об'ектами. „Дважды два—четыре" означает не 4 яблока или лошади или мысли или отношения, словом, вообще ничего определенного, конкретного, а *четыре вообще*: все вообще и ничего в частности. Поэтому „мы и не знаем, о чем (конкретном) говорим"... обо всем и ни о чем в частности... Но это не значит, конечно, будто мы не знаем, *о чем математическом* мы говорим: *математическое* содержание данного положения совершенно ясно—не известен лишь тот *конкретный* материал, к которому оно прилагается.

„Мы не знаем, верно ли то, что мы говорим", значит только то, что (*реальная*) *верность, истинность выводного положения зависит от истинности того положения, из которого мы его выводим*. В чистой математике возможны „воображаемые" построения—такие, которые мы строим (в известной мере) произвольно. Поскольку эти основные допущения *совпадают* с реальной действительностью, постольку с последней будут совпадать (т. е. будут *реально* истинны) и выводные положения (теоремы данной науки). Поскольку основные положения окажутся *не соответствующими* реальной действительности, постольку ей не будут отвечать и положения выводные. Но вопрос о таком соответствии или несоответствии *в чистую математику, как таковую, не входит*. Вопрос этот должен относиться к другой отрасли знания—к *математике реальной*.

Но у Рёсселя в его остроумной формуле отлично подчеркнута одна основная сторона *современной чистой математики*—ее построительно-логический, конструктивно-дедуктивный характер, ее (вполне законно обоснованное) равнодушие к реальности, изучение которой (с математических ее сторон) составляет задачу иного ряда дисциплин. Такое „равнодушие к реальности" со стороны *чистой* математики отнюдь не обозначает ее „химеричности", „оторванности от жизни, от реальности" и т. п.

Все это обозначает лишь ставший неизбежным *новый шаг вперед в дифференциации научной мысли, в разделении научного труда*. Освободившись от погони за „реальностью", *чистая математика* сможет создать наиболее полный и наиболее тонко разработанный *репертуар построений, а след., и возможных об'яснений действительности*. А затем *реальная математика* сумеет использовать эти возможные об'яснения, сделать из них выбор, скомбинировать их для наилучшего, наиболее стройного, непротиворечивого и обоснованного *истолкования реальности, как таковой*. При этом она применит свои особые методы, отличные от методов частой математики.

18. Аналогичны рёсселеву и другие современные определения чистой математики: все они подчеркивают *построительно-логический, конструктивно-выводной* характер этой науки.

Б. Пирс (как и вообще все строгие логицисты) слишком тесно связывает (в сущности, сливает) математику с логикой. Математика есть „наука", выводящая необходимые следствия, говорит Пирс в своей Linear associative Algebra (1870 г.) [1])

Э. Папперщ (1892 г.) говорит: „предмет чистой математики составляют отношения, которые могут быть логически устанавливаемы

---

[1]) Беру *А. Фосса*, Сущность математики, стр. 68.

между какими-либо мыслимыми элементами, когда мы их принимаем за входящие в состав какого-либо вполне упорядоченного многообразия; закон порядка этого многообразия должен подлежать нашему выбору".

Сжатое и очень ясное определение дает M. Böcher. „Математика[1]) есть наука, которая при помощи логических приципов выводит из логических определений дедуктивные заключения" [2]).

В этом определении выпукло указаны два основных методологических приема, которыми строится современная чистая матматика: [1]) *мысленное построение* основных элементов (аксиом, определений и т. д.) и [2]) *дедукция следствий* этих элементов, совершаемая на основе „логических принципов".

То же (в существе) говорит и Кутюра („Философские принципы математики", 185): „метод математики—дедукция... Всякая дедукция предполагает первые предложения, которые приходится постулировать и которых нельзя вывести, и эти постулаты могут быть заимствованы из какого угодно источника познания, эмпирического или априорного".

В другом месте того-же сочинения (стр. 6) Кутюра говорит то же в применении специально к геометрии и механике.

„Геометрия и механика, очищенные, насколько возможно, от интуиции, стали „гипотетико-дедуктивными системами", основанными на известном числе аксиом и постулатов, из которых все остальное выводится логически".

Тот же смысл имеет и современное „аксиоматическое" понимание геометрии, развитое в особенности *Д. Гильбертом*. В своем сочинении „Основания геометрии" [3]) Гильберт ставит себе задачей (стр. 1) „выставить для геометрии [4]) *полную и возможно более простую* систему аксиом и вывести из них важнейшие геометрические теоремы так, чтобы при этом возможно ярче выяснилось значение различных групп аксиом и об'ем следствий, выводимых из отдельных аксиом". Иначе говоря, Гильберт старается создать „канон" основных аксиом, систематизировать *построительный* элемент геометрической науки [5]).

---

[1]) „Чистая", конечно.

[2]) Таким образом, и исходные положения, и принципы выводов из этих положений характеризуются в современной матиматике как *логические*, т. е систематически, планомерно, последовательно и эффективно (с надлежащими результатами) *мыслимые* (построяемые и выводимые), а не просто „воспроизводящие" ту или иную реальность. Современная чистая математика, таким образом, окончательно перестает быть способом простого и непосредственного *изучение реальности* и делается *системой умственных построений*.

[3]) Рус. пер. под ред. проф. А. В. Васильева, со статьями редактора и А. Пуанкаре, изд: „Сеятель", Петроград, 1923.

[4]) „Геометрии вообще", т. е. как эвклидовой, так и всякой „не-эвклидовой".

[5]) В сущности даже Д. С. Милль, главный представитель противоположной „эмпиристической" методологии математики, не мог не сознавать, что в математике дело „чувственным" опытом не исчерпывается. И у него мы находим такие, напр., признания. „Метод всех дедуктивных наук (а типом их Д. С. Милль считает совершенно правильно математику. В.И.) *гипотетичен*. Науки эти излагают следствия из некоторых предположений, предоставляя особому исследованию вопрос о том, истинны эти предположения или нет, и если не в точности истинны, то достаточно ли близко приближаются они к истине". В сущности, тут есть уже почти прямое признание значения в математике „построений", а если угодно, то и намек на необходимость „реально-математического" исследования („особое исследование" вопроса о соответствии предположений реальности). Или: „Геометрия основана на гипотезах; ...во всякой науке мы можем, рассуждая на основании гипотез, получить систему заключений, столь же достоверных, как заключения геометрии, т. е. столь же строго соответствующих гипотезам и столь же непреодолимо требующих признания—*в том случае, если* эти гипотезы справедливы".

Наконец, об арифметике: „Наука о числах истинна лишь в том смысле, что ее предложения правильно вытекают, если предположить истинными посылки". (Система логики, пер. под ред. *В. Ивановского*, 1899 года., стр. 205, 179, 203). Таким образом, Приведу еще определение математики, даваемое проф. *А. В. Васильевым* в его статье „Математика" (Казань, 1916, стр. 58). Проф. Васильев отмечает особое важное значение для математики *символизма*.

„Желая дать самое широкое значение слову *математика,* говорит проф. Васильев, мы не можем не ввести в определение ее употребления символов. Поэтому, оставаясь в общем на точке зрения Рёсселя и Уайтхэда, следовало бы определить *чистую математику, как систему логических следствий, выводимых с помощью символов из предпосылок* (аксиом, постулатов, гипотез), которые могут быть устанавливаемы свободно разумом".

Итак, *построение* (*конструкция*) и логические *выводы* из построений (*дедукция*) являются теми основными методами, какими строится современная *чистая* математика.

19. Перейдем к новому пониманию современной математикой ее отношений к реальности.

Выше было уже сказано о том, что в современной математике явственно намечается распадение ее на „чистую" и „реальную".

Чистая математика имеет содержанием известного рода умственные построения, которые могут не совпадать с „реальностью", — мало того *не могут все совпадать* с ней уже потому, что для каждой области упорядоченных многообразий таких построений имеется *несколько.*

Однако, это вовсе не значит, конечно, что математика *вся в целом* „оторвалась" от действительности, стала заниматься чем-то нереальным, фиктивным, ударилась в „идеализм" и т. п. Как я уже говорил, дело сводится тут просто *к более правильному и более глубоко обоснованному* распределению труда между различными по характеру дисциплинами этой науки.

Да! „чистая" математика имеет содержанием действительно построения, дедуктивно развиваемые из основных начал, устанавливаемых до известной степени произвольно. Да! она допускает *несколько* параллельных друг другу и теоретически одинаково обоснованных, равно логичных, равноправных и равно „возможных" конструкций той или иной области математического знания. Но именно поэтому „чистая" математика и *не имеет прямого отношения к реальности.* Она представляет собою лишь „репертуар" возможных пониманий действительности (из которых, быть может, ни одно *не охватывает этой действительности в целом)*: она есть как бы „клавиатура", общий запас нот, из которого фактически будут приложены к действительности лишь одна или какая-либо комбинация нескольких.

Характеристика „чистой" математики.

20. Как сказано выше, современное состояние математики приводит к различению в ее составе 1) математики „чистой", или наук „собственно математических", и 2) наук „реально-математических". Эти две группы дисциплин различаются и своим внутренним строением, и отношением каждой из них к „реальности", а также методами их построения и обработки.

истина стучалась в двери даже к предубежденному в этом вопросе мыслителю. Само собой разумеется, что Милль выдвигает на первый план не эти „гипотетические" моменты математики, а эмпиристические и истолковывает первые в свете вторых, как их второстепенные придатки.

Термин „*чистая* математика“ употребляется в *нескольких* значениях, которые необходимо разграничить.

Во-первых, „чистую“ математику иногда противополагают *прикладной*, разумея под последней разнообразные приложения математики в технике и включая в „чистую“ все математические дисциплины собственно-теоретического характера.

Во-вторых, иногда (правда, скорее в повседневном обиходе, чем у специалистов) под „чистой“ математикой разумеют вее математические науки—в противоположность наукам естественным.

В-третьих, сами математики иногда либо включают в „чистую“ математику все математические дисциплины, кроме механики, либо понимают под „чистою математикой“ одно только учение о числе. Это последнее понимание освящено именем Гаусса, видевшего в арифметике науку математическую *par excellence:* изучение природы, по Гауссу, опирается на математику, которая поэтому является „царицей наук“, а сама математика (в широком смысле,—включая геометрию и механику) опирается на арифметику [1]).

Так смотрит, напр., и *А. Фосс*, делящий „всю совокупность математических изысканий на *чистую* математику и область ее *приложений*. К последним относятся *геометрия* и *механика*—в самом широком смысле. *Чистая-же математика есть наука о числах*“. (Сущность математики, 1923, стр. 15).

Я употребляю термин „чистая математика“ в отличном от всех этих смыслов значении: под „чистой математикой“ у меня разумеется *изучение всех отвлеченно возможных типов построений* математических элементов и дедуктивных выводов из них. В таком смысле учения „чистой математики“ необходимо *множественны*, ибо в каждой области возможно несколько отвлеченно равноправных и равно научных построений.

Понимаемой в таком смысле „чистой математике“ противостоит *математика реальная*,—изучающая действительный, проявляющийся в опыте строй той или другой (подчиняющейся математике) сферы реальности (а также и человеческой деятельности). Реальная математика, очевидно, необходимо *единственна*, „однозначна“, так как строй действительности, конечно, *один*.

Выбор терминов и установление их значений—дело практического удобства; необходимо только точно разграничить значения каждого термина и строго выдерживать принятые значения их [2]).

21. Я уже сказал выше, что в современной „чистой“ математике *конструктивный* („построительный“) момент получил особо важное, первенствующее значение и что очевиднейшим свидетельством этого служит факт возникновения в XIX и XX веках ряда „воображаемых“ математических наук.

Это не значит, конечно, чтобы элемент этот впервые появился именно в современной математике. Он был на лицо в математической науке и раньше,—только был менее осознан и не проводился так систематично и широко.

---

[1]) „Арифметика стоит в том же отношении к математике, в каком последняя стоит к изучению ирироды Математика есть царица наук, а арифметика есть царица математики“. Беру эти слова Гаусса из книги проф. *А. В. Васильева* „Целое число“, Петроград, 1922, стр. 14.

[2]) Понятий „чистой“ и „прикладной“ (а также „смешанной“) математики касается проф. *А. В. Васильев* в статье „Математика“ (изд. Казанского Физико-математич. Общества, Казань, 1916, стр. 24—27). В этой брошюре проф. Васильев говорит и еще об одном разграничении в пределах математики—о различении математики *точной и приближенной* (которую он отожествляет с „практической“).

В чем же, в каких формах проявляется в математике эта конструктивная деятельность мышления?

Всякое вообще мышление происходит, главным образом, при помощи *понятий*, связываемых в суждения и умозаключения. И вот, оказывается, что математические понятия образуются *не так, как понятия о реальных* предметах, что есть *особый* способ их возникновения, не вполне похожий на способ образования понятий, специфических для наук естественных. Этот способ и есть *построение, конструкция*. По нему и всю математику называют часто наукой *конструктивной* (или, что то же, *построительной)*, а также *рациональной* (или *умозрительной,* иначе *спекулятивной*).

Школьная логика до сих пор говорит еще обычно только об одном способе образования понятий: а именно, при помощи *абстракции*.

Понятия, согласно этой логике, возникают при помощи *отвлечения* (абстрагирования) несходных признаков от ряда сходных (в общем) представлений, *об'единения* (синтеза) их сходных признаков в одно целое, придания этому целому общего значения *(обобщение*, генерализация), и наконец, обозначения этого целого известным названием, или термином *(называние)*.

Этот способ образования понятий применим только к реальным предметам: понятия о таких предметах образуются действительно этим путем, т. е. начиная с „абстракции“. Поэтому такой способ образования понятий обычно и называется *абстрактивным*.

Однако, есть и другой процесс выработки понятий,—давно, конечно, фактически применявшийся в науке, но в общей форме выделенный логикой и теорией познания лишь в сравнительно недавнее время. Это—способ *конструктивный*: он-то и создает основные понятия чистой математики.

„Конструктивные“ понятия образуются *также при помощи опыта*, но не опыта чувственного восприятия, а „опыта“ некоторых *активных умственных операций—опыта воображения и мышления.*

„Опыт“ есть понятие многосмысленное (как и все вообще наши понятия), и отожествление его с одним только „чувственным“ опытом сильно мешает ясности научно-методологических воззрений. Можно выделить, по меньшей мере, следующие значения этого термина: (не считая того значения, в котором он равнозначен „эксперименту“): 1) опыт *чувственных* восприятий, 2) опыт в самом *широком* смысле —всяких вообще переживаний, испытываний, желаний, действий и т. д. („у него большой опыт в организационной работе“, или „в отвлеченном мышлении“, или „в чувствах любви и ненависти“, или „в творчестве“ и т. п.), 3) опыт *научный*, как то организованное целое самых разнообразных умственных процессов, на котором основывается та или другая наука (или наука вообще).

И вот, „опыт воображения и мышления“, столь широко применяемый в математике, относится именно к этой последней рубрике.

Возьмем, напр., математическое понятие *о бесконечности*—в какой-либо из его разновидностей (бесконечность пространства, времени, числа и т. д.).

Как оно образуется? Понятие о бесконечности пространства, напр., я составляю себе при помощи воображения. Я *воображаю* себя летящим, положим, вверх; когда я долетаю до солнца, мое мышление подсказывает мне, что это еще не конец возможности моего воображаемого пути,—я могу лететь дальше. Я умственно долетаю до самых далеких звезд, и опять сознаю, что и тут еще не конец. И сколько бы раз я ни делал остановки на этом моем воображаемом пути, каждый раз я сознаю, что конца еще нет,—есть возможность лететь (умственно) дальше... Таким образом, понятие математической бесконечности есть понятие *не о чем-то* конкретном и доступном внешним чувствам (в роде, напр., камня, дерева и т. д.), а о *некоторой деятельности ума*, которая и образует (или „построяет") это понятие. Бесконечность нельзя видеть, ощупать и т. д.: это просто *мысль* о безграничной возможности для нашего воображения переходить всякие пределы...

Возьмем другое основное понятие математики—понятие о *числе*. Как оно возникает?

Прежде всего, мы должны отчетливо поставить вопрос, о каком „возникновении" числа идет речь?

Числа могут „возникать" в результате пересчета или измерения предметов. Однако, когда мы спрашиваем о возникновении *числа вообще*, мы имеем в виду не это, не пересчет или измерение на основании ранее уже готовой схемы чисел, а возникновение *этой самой схемы*—той системы их, при помощи которой производятся пересчет и измерение. Акт пересчета той или другой группы об'ектов состоит в приведении каждого из членов этой группы в поединичное соответствие с ранее уже образованным рядом идущих в строгой последовательности „порядковых" чисел, а всей группы в целом—в соответствие с одним из ряда последовательно, от члена к члену, возрастающих (каждый раз на единицу) *количественных чисел*. Ясно, что выполнение акта пересчета возможно *лишь тогда, когда у нас в уме сложилась эта схема правильно возрастающих чисел* („натуральных"—целых положительных: 1, 2, 3, и т. д.). Если же этой схемы в нашем уме еще нет (как у животных или у маленьких детей) или она существует лишь в самых скромных зачатках, то и акт пересчета будет либо вовсе невозможным, либо будет осуществляться лишь как раз до того пункта, до которого у нас сложилась эта схема: один дикарь будет считать только до 5, другой только до 31 (см. выше) и т. д.

Итак, акт „пересчета" становится возможным лишь благодаря тому, что схема чисел (хотя-бы небольшая) у нас уже образовалась. *Сама же эта схема* образуется посредством ряда актов *умственного синтеза* отдельных единиц в некоторые целые („числа").

Этот умственный синтез *может*, конечно, немедленно по достижении нового числа иллюстрироваться и подкрепляться приложением этого числа к пересчету групп реальных предметов; но *суть* образования числа—не в этом приложении, а в акте умственного синтеза, *создающего новое, ранее не бывшее в уме число, как целое*. И это вновь построенное число—для того, чтобы оно могло быть приложено к пересчету группы об'ектов, должно пониматься *уже как отвлеченное*, как *приложимое* ко всем группам реальных предметов (или, по крайней мере, к *нескольким* классам их). Умственно синтезированная „тройка" есть *тройка вообще*: и хотя-бы она была тотчас-же приложена к пересчету деревьев, но *и к этому пересчету она прилагается на основании своей общезначимости*—на основании того, что она есть „тройка" не только какого-либо одного рода предметов, а „тройка" *всяких вообще* предметов,—просто „тройка", т. е. одна единица и еще одна и еще одна.

22. В виду важности уяснения этого вопроса я попробую еще раз выделить элементы *чувственного* (в обычном, популярном смысле) и *умственного* опыта в процессе образования системы чисел.

Чувственный опыт в построении чисел дает понятие о *конкретной* единице—напр., о животном, о дереве, как *о естественном целом.*

Но понятия об *отвлеченной единице*—о „единице вообще"—и о *числе*, как *совокупности* единиц, даются уже опытом воображения и мышления.

Надо иметь в виду, что термины „один", „единица" покрывают два различных содержания. Во-первых, *единство*, т. е. тесную связность частей одного конкретного предмета, *как целого*, так или иначе выделяющегося из окружающей его обстановки и от других предметов; и во-вторых, тот факт, что этот предмет представляет собою *единицу*, что он „один"—в противоположность всякому множеству, в которое он может войти членом.

И вот, *единство конкретного предмета*, его целостность мы воспринимаем преимущественно „чувственным" опытом. Береза, баран и т. д. представляют собою „единства" на основании тесной связности их частей; отдельные члены такого „единства" гораздо прочнее и теснее связаны друг с другом, чем с окружающей средой, и это единство отчетливо выделяется именно, как *одно целое*.

Напротив, каждое такое целое становится *единицей, как составным элементом* (или зачатком) *числа*, лишь после некоторой нашей активной операции: а именно, *деятельности счета*. Это тоже „опыт", но только иной, чем чувственное восприятие; это—наша *активная деятельность*, которая отнюдь не навязывается нам извне сама собою, независимо от нашей воли (как это имеет место с внешним восприятием), а требует с *нашей стороны произвольного и планомерного усилия*. Если мы такой произвольной деятельности не проявим, то, сколько бы мы ни восприняли отдельных об'ектов, „числа" их у нас не получится. Таким образом, число возникает тоже, конечно, из „практики", из „опыта", но только из практики и опыта *активных операций* выделения единиц, их синтеза и т. д., т. е., вообще говоря, *счета*.

23. Подобным же образом, в *геометрии и механике* „чувственный" опыт дает нам восприятия конкретных пространственных положений, отношений между предметами, движений и т д. Но только опыт умственных деятельностей воображения и мышления сливает эти отдельные восприятия в некоторое целое—в представление и понятие *пространства*, как об'екта математической науки.

Отдельные пространственные восприятия даются нам многими путями. Очень серьезные исследователи признают, что „пространственность" есть такое же основное качество ощущений и восприятий, как и цвет, напр., или сила освещения и т. п. Они говорят поэтому о „первичной об'емности" ощущений. Так, выстрел из пушки уже сразу кажется нам занимающим *большее* пространство, чем, напр., жужжанье комара; ощущение при погружении тела в ванну *об'емистее* укола булавкой. Далее, пространственные восприятия возникают из многообразных ассоциаций и переработок данных опыта зрительного, осязательного и двигательного (это известно из психологии).

Но все эти чувственные восприятия и их переработки дают нам лишь *конкретные* показания относительно величин и расстояний предметов. В них еще нет основных свойств *пространства, как такового* (ближайшим образом—эвклидова): бесконечности, сплошной однородности, индифферентности ко всякому содержанию (предметы от перемещения в пространстве не меняют величины и формы), прямолинейного характера, единства (ибо все отдельные его участки сливаются в нем в одно целое) и т. д. И вот, эти-то общие свойства эвклидова пространства получаются уже не при помощи „чувственного" опыта, а при помощи опыта воображения и мышления.

В еще гораздо большей степени участвует построяющая функция ума при образовании понятий о не-эвклидовых пространствах. Там вся основная работа проделывается воображением и мышлением,- непосредственное восприятие дает лишь элементарнейший материал для сложных умственных построений и для строго дедуктивного выведения из них следствий.

Подобным же образом возникает *и представление* (*и понятие*) времени. *Психологический зародыш* его дается нам конкретным представлениям *смены* отдельных, друг за другом идущих переживаний. Такая „смена" воспринимается нами, как некоторые думают, уже непосредственно: мы сознаем самый процесс перехода, *самый момент* *смены*—в то самое время, как она совершается. Настоящее, как думают эти мыслители, прямо связывается с будущим—с тем, что за этим настоящим следует, во что оно переходит. Точно так же есть тесная связь и между настоящим и только что прошедшим прошлым: настоящее как-бы на наших глазах „вырастает“ из прошлого, оно постепенно из него выходит,—и этот переход мы непосредственно сознаем. „Настоящее есть не тонкая линия, разделяющая прошлое и будущее, а довольно широкое седло, сидя на котором мы озираем как прошлое, так и будущее“.

Кроме такого непосредственного восприятия, „смена“ моментов сознается нами еще *косвенно*—через сопоставление содержания данного момента с отличным от него содержанием предыдущих моментов, сохранившимся в нашей памяти и сознаваемым нами также в качестве реально переживавшихся. Такое сопоставление приводит нас к мысли о переходе предшествующего в последующее, о смене первого вторым.

Кроме момента „смены“, нами воспринимается психологически и само „течение“ времени, сама „длительность“ - в зависимости от количества, силы, значения для нас пережитых за данный период состояний. При этом есть разница в оценке в зависимости от того, когда она производится. Известно, что промежуток времени, бедный психическим содержанием, кажется *во время его переживания* очень длинным („скука“); *в воспоминании* же он представляется чрезвычайно коротким; наоборот, период, богатый сильными переживаниями, „пролетает очень быстро“, кажется при переживании его коротким, в воспоминании же занимает большое место.

На основе этих психологических данных ум построяет *математическое* понятие времени, как общей формы всех событий, бесконечной в обе стороны—и в прошедшее, и в будущее, сплошной (не имеющей перерыв в), вполне равномерно текущей (независимо от нашей оценки содержания отдельных периодов, наоборот, дающей схему для всех наших оценок продолжительности), наконец, единой (так как всякий промежуток времени составляет часть этой общей, все охватывающей схемы).

Всех этих признаков в „психологическом“ времени нет: но они составляют самое существенное содержание времени математического; и они вносятся в понятие времени *умом*—построением воображения.

Нечто подобное имеет место и в применении к движению: и здесь также на известной конкретной, чувственно-опытной основе восприятий постепенно складываются отвлеченные, *математические* понятия о движении.

Таким образом, в математическом мышлении „чувственный“ опыт дает конкретный материал; научную же форму материал этот получает лишь при посредстве „умственного опыта“ построения, активных операций воображения и мышления.

24. Построяющая деятельность воображения и мышления, применяемая в математике, совершается *систематически* и на основе некоторых *принципов*. Систематичность и определяющее значение принципов являются характерными особенностями чистой математики.

Так, основа арифметики—„натуральные“ (целые положительные) числа—построяются при помощи активной умственной операции—*счета*, исходящей из принципа *повторения* (*итерации*,—от латин. iterum= повторно) любое, неограниченное число раз основного элемента всякого натурального числа (+1) и *синтеза* этих повторенных единиц в непрерывно, с каждой новой единицей растущие целые (числа).

И такое построение происходит *систематически*, т. е. без перерывов, в строго последовательном порядке нарастания величины чисел. Отсюда 1) ни одно число не может быть образовано, если ранее не уяснены в принципе все предшествующие ему, меньшие, чем оно, числа, 2) каждое число занимает строго определенное место в системе чисел,—оно больше предшествующего ему на одну единицу и меньше следующего за ним также на одну единицу. Так, напр., число 5 может быть образовано только тогда, когда уже есть число 4; и если мы не знаем еще, что такое 4, мы не можем знать и того, что такое 5. Это число 5 занимает далее в системе строго определенное место—между 4 и 6,—его никуда нельзя передвинуть с этого места,—оно понятно *только в этой связи*.

Таким образом, в „рядах“ математических понятий их содержание нарастает по известному закону, в строго систематической последовательности—с такими (равными один другому) перерывами между отдельными членами ряда, какие предусматриваются законом образования данной системы (напр., с перерывом в *одну единицу* в системе натуральных чисел). Это можно выразить так: основные математические понятия имеют *рядовой* характер; они образуют *ряды*, отдельные члены которых тесно связаны между собою общим законом образования данного ряда. Каждое понятие „вытекает" из предыдущего по основному закону образования ряда, *функционально* связано со своим предыдущим.

25. В этом „рядовом" характере математических понятий их радикальное отличие от понятий реальных, естественно-научных. *Типические естественно-научные* понятия не образуют „рядов", члены которых стояли бы на *одинаковых* расстояниях от своих предыдущих и последующих. Ель, сосна, пихта, кедр, кипарис, туя, лиственница (или ветла, верба, ива)—не составляют „ряда", связанного *одним* определенным законом своего образования. В одних отношениях известные из этих деревьев ближе к одним, в других—к другим. Различия между ними даны уже реальной действительностью, и они в одних случаях больше, в других меньше,—то выступают различия одного рода, то другого... Нет той простоты, закономерности и четкости, какие мы имеем в правильно нарастающем, математическом ряде: 1, 2, 3, 4 и т. д. И это, конечно, потому, что числовой ряд есть систематическое создание нашего ума по определенному, единому на всем протяжении этого ряда закону, тогда как реальная действительность далеко не вполне подчиняется стройным, строго систематическим формам математического упорядочения многообразий.

Поэтому, напр., сосну может изучать и человек, не знающий, что такое туя, и обратно: тую—не знающий сосны... Можно изучать сосну раньше кипариса (или кипарис раньше сосны); можно знакомиться с этими видами хвойных деревьев в нескольких последовательных порядках, и каждый, с известной точки зрения, будет не только возможным, но правильным...

Но понять, что такое 5, не узнав ранее, что такое 4, *совершенно немыслимо*.

26. Высказывалось мнение, что основные математические понятия (и в частности, понятие числа) образуются таким же путем, как и типичные естественно-научные понятия, т. е. при помощи *абстракции* от конкретных восприятий, от данных *чувственного* опыта. В логической науке мнение это было выдвинуто, между прочим, Д. С Миллем в его „Системе логики".

Д. С. Милль написал свою „Систему логики" в начале 40-х годов XIX века, когда принципиальные позиции *современной* математики еще только намечались в отдельных, передовых математических умах.

Поэтому нет ничего удивительного в том, что в области методологии математики он высказал мнения, являющиеся для нашего времени уже устаревшими.

Милль стоял на старой почве тесного единения математики с естествознанием, столь характерного для предыдущего периода математических наук, и его основная тенденция состояла в том, чтобы показать, что методология наук математических тожественна с методологией естествознания, что эта последняя есть *единственный* тип научной методологии.

Вот что говорит Д. С. Милль об арифметике: „Все основные истины науки о числах опираются на очевидность ощущений; доказательством их служит восприятие глазами или пальцами того, что любое данное число предметов (напр., 10 шаров) может, благодаря раз'единению и перераспределению, возбуждать в наших чувствах впечатления всех сочетаний чисел, сумма которых равна 10" [1]).

Прежде всего, у Милля не проведено отчетливой границы между двумя *совершенно различными* операциями: 1) образованием самой системы чисел (числового ряда) и 2) актом пересчета какого-либо конкретного множества. *Акт пересчета*, как мы говорили, *требует уже готовой, ранее составленной системы чисел* и без нее не может быть выполнен.

Построение же самих *чисел*, как (отвлеченных), совокупностей единиц, есть нечто совершенно иное. *Числа, как таковые*, суть не какой-либо непосредственно воспринимаемый *признак* группы предметов (в роде, напр., их цвета), а результат особой дея-

[1]) Система логики, пер. под ред. В. Н. Ивановского, М., 1899, стр. 202—203.

тельности „счисления" — некоторой активно выполняемой операции. Поэтому, как мы говорили, *образование самого ряда чисел* есть основа и необходимая предпосылка всякого пересчета конкретных об'ектов. Эта—задача в высшей степени трудная, требовавшая, как мы видели, многих веков для своего завершения. Трудности процессов отвлечения, синтеза и т. д. преодолевались лишь с огромными усилиями, шаг за шагом.

Милль не замечает того, „что воспринять глазами или пальцами, что любое данное число предметов (напр., 10 шаров) может, благодаря раз'единению и перераспределению, возбуждать в наших чувствах впечатления всех сочетаний чисел, сумма которых равна 10", — возможно только в том случае, если мы пр дварительно *сосчитаем* общую сумму шаров (10), а также все те группы их, суммы которых равны 10. Тут дело не в „ощущениях" (как думает Милль), а в активной *деятельности* пересчета, предполагающей уже *готовую* схему натуральных чисел.

Ошибочность выведения Миллем чисел и отношений между ними из „ощущений" будет очевидной, если мы возьмем более крупные числа. Пока мы имеем дело с *маленькими* числами (Милль берет, напр., группы из 2 и 3 камешков), может еще казаться, что они возникают из чувственного опыта—из простого восприятия. Однако, на самом деле это не что иное, как одна из иллюзий популярного мышления: если какой-либо процесс мышления элементарен и происходит очень быстро, его вовсе не замечают. Если предо мной всего *два* зерна (или камешка), то я могу, конечно, *мгновенно*, посмотрев на них, сказать, что „зерен тут два",—потому, что я их *сосчитал* в один миг. Но возьмите не два зерна, а 23, положим,—и тогда на вопрос, сколько тут зерен, может быть дан только один ответ: „позвольте, я их посчитаю". Мало того, даже когда перед нами 2—3 предмета, но когда *условия их восприятия и пересчета затруднены*, число их можно установить только отчетливо производимым действительным пересчетом. Представьте себе, что вы темной ночью в незнакомом вам парке хотите сосчитать отдельную группу деревьев,—напр., елей, ветви которых переплелись друг с другом. Как вы это сделаете? Вы станете проверять неясно вами воспринимаемые контуры стволов ощупыванием их (и вообще нижних частей этих елей)... „Вот одна ель... вот вторая..., Всего тут две". Т. е., вы выполните *акт пересчета*. Кажущаяся доказательность недостаточно проанализированного „воображаемого примера", условия которого взяты произвольно (четкая раздельность об'ектов), рушится от небольшого изменения этих, воображаемых условий.

Итак, несомненно, что число возникает не из пассивных чувственных восприятий, а из активных операций мысли.

Аналогичное надо сказать и про другие группы математических понятий. Так, геометрические фигуры (даже самые простые) суть не просто восприятия [1]), как таковые, а продукты активной умственной работы.

В природе мы имеем *тела*, и притом всегда не совсем правильной, не строго геометрической формы. Чтобы получить, напр., математический (плоский) треугольник, мы должны 1) совершенно отвлечься от 3-го измерения, от плотности, цвета, тяжести и других физических свойств тел, 2) представить себе этот треугольник ограниченным строго прямыми линиями, 3) отвлечься от телесных свойств этих линий (которые на чертеже, напр., всегда представляют собой тела 3 измерений) и т. д.

Если активные операции мышления так очевидны уже в простейших образованиях эвклидовой геометрии, то они еще в гораздо большей степени имеют место в неэвклидовых геометриях, большинство элементов и образований которых даже вовсе (или почти) не допускают наглядного представления.

27. Может явиться вопрос: в каком отношении стоят счетные операции нашей мысли к *природе, как таковой?* Раз число есть продукт пересчитывания, то в каком смысле оно приложимо к природе самой по себе, помимо этой нашей операции?

Мы убеждены, что все в природе доступно пересчитыванию, все может быть (отвлеченно говоря) сосчитано: и звезды, и движения электронов в атоме... Мы не видим никакой причины, из-за которой

---

[1]) Это признает в сущности и Д. С. Милль. „В природе... нет вещей, вполне точно соответствующих определениям геометрии..." (Система логики, 178). Заключения геометрии необходимы только в том смысле, это „они с точностью вытекают из тех предположений, из которых они выводятся. А эти предположения не только не необходимы, но даже не истинны: они преднамеренно более или менее уклоняются от истины... Эти заключения необходимо следуют из того или другого положения, которое, по условиям исследования, не подлежит вопросу" (179).

В сущности, Милль, говоря о „гипотетичности" положений математики, о „преднамеренном уклонении от истины" ее основных предположений и т. п., имеет в виду как раз то, о чем говорили мы, как о „конструктивном" характере этой науки. Только Милль не разрабатывает этой темы и подходит к ней со стороны своих эмпиристических предпосылок.

нельзя было-бы приложить к любой совокупности числовую схему. Однако, *пока* такой пересчет реально *не произведен*, в природе существует для нас лишь некоторая *неопределенная множественность*. Уже в простейших умственных актах мы замечаем такую множественность; напр., одним актом зрительного восприятия мы можем воспринять поверхность, отдельные участки которой окрашены в *разные* цвета. Но эта множественность цветов окраски выразится числом только после того, как она станет „хорошо упорядоченной", т. е. точно будет нами определена при помощи пересчета.

Далее, надо иметь в виду, что при измерении любого предмета или группы предметов, любого процесса, линии, площади, об'ема и т. д. результат может быть выражен *любым числом*.

В измерении все зависит от величины той единицы, какою мы измеряем. Об'ем этой комнаты мы можем выразить в кубических саженях, аршинах, вершках, футах, дюймах, метрах, дециметрах, сантиметрах, миллиметрах, верстах, а также в „третях кубич. аршина", в „семнадцатых долях кубич. метра", в 0,00179-х долях кубич. сажени и т. д. *до бесконечности*.

Поэтому *число в природе*, как *точно определенная*, однозначная множественность, *не существует*. И даже когда предметы сами подсказывают нам вполне определенные, казалось-бы, единицы для их пересчета (напр., яблоки, булки хлеба),—и тогда мы можем считать *парами* (или половинками, третями, десятыми долями и т. д.), причем получим для одного и того же множества каждый раз совершенно иные числа. И фактически мы часто так именно и поступаем: раздавая хлеб, мы делим 5 хлебов на доли по $^1/_4$ хлеба в каждой и узнаем, что в 5 хлебах таких долей будет 20, и т. п.

Числа в отношении к реальности—*условны* и зависят от той единицы, какую мы для измерения этой реальности принимаем в каждом отдельном случае. А выбор этот случаен, или, точнее говоря, он определяется не самой данной реальностью, как таковой, а теми или иными нашими задачами, жизненными потребностями и т. д., т. е. чем-то, привходящим к данной реальности извне.

28. Теперь я коснусь нескольких деталей процесса образования системы натуральных чисел и их отличительных признаков.

Прежде всего, в числе все единицы его должны быть *тожественны* одна с другой, вполне равны и равноценны одна другой,— именно как *единицы* числа.

Отсюда вытекает одно важное условие всякой операции пересчета группы об'ектов: об'екты эти должны быть взяты как (генерически) тожественные,—только тогда их можно будет пересчитать. Так, один баран и еще один баран составят, конечно, *двух баранов*; но один баран и одна корова не составят ни двух баранов, ни двух коров, а *двух домашних животных*; один баран и одна редька составят, положим, *два продукта сельского хозяйства*; один баран и одно психическое настроение, будучи сосчитаны, дадут *две вещи*, *два восприятия*, *два слова*, *или названия* и т. д. Об'екты для того, чтобы их можно было считать, должны быть взяты *как одинаковые:* должны быть исключены все специфические признаки каждого из них,—должно быть оставлено только то, в чем они сходны, генерически тожественны.

Это очищение считаемых об'ектов от специфических признаков каждого из них дается далеко не сразу. Первобытное и детское мышление, при их установке на конкретное, иногда склонны сами числовые номера об'ектов считать какими-то присущими каждому из них, специфическими их качествами. Одну девочку 4 лет учили (порядковому) счету на акте пересчета ящиков буфета. Когда ее попросили повторить пересчет, она сказала: „вот этот ящик первый; а который второй, я забыла...“

29. Большое значение имеет различие между числами *отвлеченными и именованными.*

Первобытное мышление, насквозь конкретное, знало только именованные числа, или, пожалуй, точнее: только нечто недифференцированное, нерасчлененное и смутное, в чем совмещались элементы как именованных, так и отвлеченных чисел. Все группы предметов какого-либо одного рода (напр., положим, предметов длинных или деревьев, людей) считались *одними и теми же* именами числительными,—и тут, следовательно, числительные имели характер имен отвлеченных. Но разные роды предметов считались *различными* сериями имен числительных; тут, значит, на первом плане стояла конкретная, качественная определенность предметов, т. е. то, что характеризует числа именованные. Во всяком случае, характер „именованности“ решительно преобладал на заре математической мысли.

Однако, с течением времени на первый план выдвигается „отвлеченный“ момент числа. Он ясен уже при образовании хотя бы даже самой минимальной системы чисел; уже те дикари, которые знают только два настоящих числа: „один“ и „два“, понимают под своими *netat* и *neis* не ту или иную конкретную единицу и двойку, а „один вообще“, единицу чего угодно, и „два вообще“. Нечего и говорить о развитых системах чисел: преодолев первые трудности отвлечения, начав систематически строить ряд чисел, человечество уже, конечно, строит их вне зависимости от конкретного материала—не в именованной форме, а в чисто отвлеченной. „Миллион сто семнадцать тысяч пятьсот сорок три“ есть, конечно, уже не число яблок или камней или песчинок, а просто и вообще „столько-то“—число, большее на единицу своего предыдущего и меньше на единицу своего последующего. А числа Архимедова „Псаммита“ не могут даже и отдаленно быть конкретно сосчитаны: это чистые продукты отвлеченного, систематического построения. И в настоящее время в математике, как *науке*, отвлеченный момент играет, конечно, доминирующую роль.

30. Укажу еще одно условие счета совокупностей реальных об'ектов (все равно физических или умственных): пересчет возможен только в отношении, так сказать, законченных в своем составе групп. Если производится, напр., перепись населения или количества скота в целой стране, то результат пересчета может быть только „приблизительный“,—строго говоря, полученное число не будет выражать действительного количества особей группы.

Уже в течение процесса пересчета группы состав ее изменился: некоторые особи умерли, другие родились, и общее число стало уже не то.

Условие это проф. *А. В. Васильев* (Из истории и философии понятия о целом положительном числе, Казань, 1891 г., стр. 19—20) формулирует так: считаемые предметы „не должны пропадать, не должны сливаться друг с другом, не могут делиться на два или более во время пересчитывания; к ним не могут прибавляться во время этой операции новые предметы“.

31. Числа и их названия (имена числительные) могут быть *количественными и порядковыми.* Числительные количественные обозначают число единиц в группе, порядковые-же—номер каждой отдельной входящей в группу единицы, ее место в общем составе группы при данном акте ее пересчета.

В сущности говоря, это различие числительных количественных и порядковых зависит от того, на что мы направляем внимание при пересчете. В каждый момент процесса пересчитывания мы имеем, во-первых, группу, составленную рядом уже произведенных нами актов синтеза единиц, и во-вторых, новую единицу, которую мы в данный момент прибавляем к ранее составившейся группе.

Если мы будем говорить об этой последней, уже имеющейся у нас группе, мы выскажем количественное числительное, которое выразить ее состав из единиц (5,8); если же мы сосредоточим внимание на вновь присчитываемой в данное мгновение единице, у нас будет порядковый номер этой единицы, порядковое числительное.

Поднимался вопрос: который из этих типов имен числительных соответствует более основной, более первичной операции считающей мысли? Мы полагаем, что это дело условное и зависит в каждом *реальном* случае пересчета, как сказано, от направления внимания считающего. Можно сказать только одно: если отрешиться от реальных условий действительного выполнения пересчета и взять процесс *в его отвлеченной, логической типичности*, то первичными надо будет признать, как кажется, числительные *порядковые*. Действительно, если мы имеем группу из 4 об'ектов и присоединем к ней еще одну единицу, один об'ект. то количественное числительное (5) мы получим *именно в силу того, что мы прибавляем к 4-м следующую за 4-мя, т. е. 5-ю, единицу*. Мы мыслим приблизительно так: „у нас есть группа из 4 единиц; следующий номер, а значит, и следующий по порядку об'ект будет 5-й; присоединяя его к имеющейся группе 4-х, получаем новую группу 5“ Установление следующего порядкового номера есть, повидимому. операция более простая и более основная, чем синтезирование новой группы. Идея последовательного синтеза единиц входит в само существо понятия о числе, как результате акта пересчета; именно такой последовательный синтез создает затем группы, т. е, числительные количественные [1]).

32. Итак, в образовании математических понятий работа воображения и мышления играет огромную роль; и „чистая“ математика состоит из систем дедуктивных выводов из этих построяемых умом основных элементов.

Отсюда становится понятной и та особенность „чистой“ математики, что в ней, в сущности, *все содержание дано* уже в известном смысле с того самого момента, как образованы исходные понятия. Конечно, все возможные выводы из этих понятий надо еще сделать; отношения между ними надо найти, „усмотреть“. Это работа в высшей степено трудная, часто требующая величайшего напряжения гениальных умов.

Но как ни трудны *фактически* эти процессы *интуиции* и *дедукции*, результаты их с *логической* точки зрения уже предзаложены в основных допущениях и построениях.

Необходимо самым тщательным образом уяснить себе этот *конструктивно-систематический* характер чистой математики, делающий ее внутреннюю структуру совершенно отличной от (типического) естествознания.

О „реальной“ и „прикладной“ математике краткие сведения будут даны несколько ниже.

Дополнительные замечания.

1. Историки и методологи математики нередко определяют развитие математической науки так, что в XVII и XVIII веках мыслители *создавали* математические построения, не особенно заботясь о их критическом обосновании, а в XIX в. начали их *обосновывать*. Мне кажется, что процесс этот становится яснее, если привести это совершенно справедливое замечание в связь с образованием в XIX в. „воображаемых“ математических наук и начать с XIX в. *новый период* математического знания, отмеченный полной реформой методологии чистой математики, как это сделано в настоящей статье.

2. У нас нередко, и очень решительно, высказываются по научным вопросам лица, не достаточно сведущие в том, о чем им приходится трактовать. В качестве примера укажу на статью *В. Егоршина* „Естествознание и классовая борьба“ („Под знаменем марксизма“, 1926 г., № 6), в которой автор ставит математикам (и, в частности, проф. I Москов. Гос. унив. *Н. Н. Лузину) в упрек то, что составляет сущность современного научного понимания чистой математики.*

---

[1]) Деление чисел на количественные и порядковые проводится иногда математиками еще в другом значении. Так. *Г. Кантор* определяет „количественное“ число так: „Если в некотором данном множестве М, которое состоит из определенных, резко отличающихся друг от друга конкретных вещей или отвлеченных понятий (называемых элементами множества) и которое мыслится как некоторая вещь для себя. мы отвлечемся как от состава элементов, так и от порядка их следований друг за другом, то в нас возникнет определенное общее понятие..., которое я называю *мощностью* М, или *количественным числом*, присущим множеству М.“. Кантор для обозначения его вводит условной знак — две горизонтальных черточки над буквой М ($\overline{\overline{M}}$). Эти две черточки обоз-

Вообще в статье В. Егоршина есть целый ряд недоразумений, о которых здесь впрочем, не место говорить.

3. У нас есть очень солидные и полезные работы по вопросу об основаниях геометрии. Такова работа проф. *В. Ф. Кагана* „Основания геометрии", 2 тома; серия работ проф. *С. А. Богомолова:* „Современные воззрения на аксиомы и метод геометрии", Спб., 1907; „Вопросы обоснования геометрии", ч. I, 1913; „Основания геометрии", 1923; наконец известная переводная „Энциклопедия элементарной математики" *Вебера* и *Велльштейна,* переведенная под ред. и с примеч. *В. Ф. Кагана* (том II посвящен геометрии, тригонометрии, аналитической геометрии и стереометрии; Одесса, 1909—10).

Популярный общий обзор истории математики, кончая XVII веком, дает в I томе „Элементов высшей математики" *Г. Лоренца* переводчик этой книги *В. П. Шереметевский* (4 изд. М. 1919). Так, глава IX второго отдела дает понятие об „аналитической геометрии" Декарта, а гл. X того же отдела содержит „очерк развития анализа бесконечно малых в XVII веке".

Более подробные указания литературы по методологии и истории наук математических я дам в конце этого отдела, посвященного математике.

4. *Г. Кантор* предлагает вместо термина „*чистая* математика"—„*свободная* математика". „Современная точка зрения на геометрию... резко отличается от прежней, когда под геометрией понимали науку, изучающую свойства реального пространства... По меткому замечанию *Пиери,* геометрия стала „гипотетически-дедуктивной системой". По прекрасному выражению *Г. Кантора,* „сущность математики заключается именно в ее свободе; творец учения о бесконечности предлагает вместо обычного предиката „чистая" говорить „свободная математика". (Проф. *С. А. Богомолов.* Вопросы обоснования геометрии ч. I. стр. 76-77).

5. Греки переняли от египтян „землемерие"—практическую технику („геометрия" и значит „землемерие") и превратили ее в *аксиоматически-дедуктивную науку об эвклидовом пространстве.* В XIX и XX веках наука об эвклидовом пространстве расширилась в *учение о различных (отвлеченно мыслимых) типах пространств* и, далее, в еще более общее учение *об известных типах многообразий вообще.* Так геометрия шла от техники к теории действительности, а от теории действительности к „чистой" теории возможных построений. Вместе с этим росла глубина, мощь и широта научного понимания.

Рукопись настоящей статьи любезно согласился прослушать уважаемый *Вл. Кондр. Дыдырко,* мой товарищ по профессуре в Белорусском Госуд. университете. Приношу ему за это мою глубокую благодарность.

(*Продолжение следует*).

начают, что „над М совершен *двойной* акт абстракции: в отношении состава элементов и в отношении их взаимного порядка". — Если же „произведен только первый род абстракции и элементы сохраняют и в понятии тот же взаимный порядок, с каким они мыслятся in concreto в М, получится *порядковый тип* М" (в других местах Кантор употребляет прямо термин: „порядковое число"). *Г. Кантор.* К учению о трансфинитном, пер. П. Юшкевича, в „Новых идеях в математике, сборник № 6. СПБ, 1914, стр. 134 и след.