УДК 519.10

В.М. КРАВЦОВ

ОЦЕНКИ СНИЗУ ЧИСЛА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Explicit formula for determination of r-non-integer vertices number of the three-axial assignment polytope, i. e. the vertices with the number of fractional components being equal r, is obtained.

Настоящая работа является продолжением исследований нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)=\left\{x=\|x_{ijt}\|_n : x_{ijt}>0\,\forall(i,j,t)\in N_n^3,\right.$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ijt}=1\,\forall t\in N_n,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}x_{ijt}=1\,\forall j\in N_n,\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}x_{ijt}=1\,\forall i\in N_n\}$, где $N_n=\{1, 2, \ldots, n\}$, $N_n^3=N_n\times N_n\times N_n$, трехиндексной аксиальной задачи о назначениях порядка $n\geq 2$, начатых в [1–5].

Напомним [6, 7], что всякая вершина многогранника $M(3, n)$ содержит не более чем $3n-2$ положительных компонент.

Пусть $r\in R_n=\{4, 6, 7, \ldots, 3n-2\}$. Вершину многогранника $M(3, n)$ будем называть r-нецелочисленной, если она содержит ровно r дробных компонент.

В [4] доказано, что для любого числа $r\in R_n$ и только для него у многогранника $M(3, n)$ существуют r-нецелочисленные вершины.

Через $\sigma(n, r)$ будем обозначать число всех r-нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, а через $m(r)$ – наименьшее натуральное число k, для которого выполняется неравенство $\sigma(k, r)>0$.

Неопределенные здесь термины и обозначения взяты из [3, 4].

В работе [4] доказана следующая основная теорема, позволившая опровергнуть гипотезу 18 из [6].

Теорема 1. Для любых натуральных чисел $n\geq 3$ и $r\in R_{n-1}$ справедливо неравенство

$$\sigma(n,r)\geq\binom{n}{m(r)}^3\left((n-m(r))!\right)^2\sigma(m(r),r),$$

причем равенство достигается в случае, когда $r\in\{2m(r), 2m(r)+1\}$.

В настоящей статье этот результат обобщен следующим образом.

Теорема 2. Для любых натуральных чисел $n>m(r)\geq 5$ и $r\in\overline{R}_{n-1}$ справедливо неравенство

$$\sigma(n,r)>\binom{n}{m(r)}^3\left((n-m(r))!\right)^2\sigma(m(r),r)+\sum_{l=1}^{q(n,r)}\delta(n,r,l),$$

где

$$\overline{R}_{n-1}=R_{n-1}\setminus\{4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\},$$

$$q(n, r)=\min\left\{\left[\frac{r}{6}\right]-1,\ n-m(r)\right\},$$

$$\delta(n,\ r,\ l) = \binom{n}{m(r)+l}^3 \left((n-m(r)-l)!\right)^2 \binom{m(r)+l}{3l}^3 \times$$
$$\times \frac{((3l)!)^3}{(3!)^{3l}\, l!} \sigma(m(r)-2l,\ r-6l)(\sigma(3,\ 6))^l. \qquad (1)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать, что для любых натуральных чисел $n>m(r)>5$, $r \in \overline{R}_{n-1}$ и $l \in \{1, 2, \ldots, q(n, r)\}$ у многогранника $M(3, n)$ существует по меньшей мере $\delta(n, r, l)$ r-нецелочисленных вершин, дробные компоненты каждой из которых содержатся в $m(r)+l$ двумерных сечениях матрицы, представляющей собой соответствующую вершину. Напомним, что под двумерным сечением ориентации (jt) матрицы $x=\|x_{ijt}\|_n$ будем понимать совокупность элементов матрицы x с фиксированным значением индекса i.

Пусть l – произвольное число из множества $\{1, 2, \ldots, q(n, r)\}$, а I_s, J_s, T_s, $s=0, 1, 2, \ldots, l$, – некоторые подмножества (возможно, тождественные) множества $\{1, 2, \ldots, m(r)+l\}$, подчиненные условиям:

$$I_p \cap I_q = \varnothing,\quad J_p \cap J_q = \varnothing,\quad T_p \cap T_q = \varnothing \quad \forall p, q \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l\},\quad p \neq q,$$
$$|I_0| = |J_0| = |T_0| = m(r)-2l,\quad |I_s| = |J_s| = |T_s| = 3 \quad \forall s \in N_l.$$

Положим $I(l)=\bigcup\limits_{s=0}^{l} I_s$, $J(l)=\bigcup\limits_{s=0}^{l} J_s$, $T(l)=\bigcup\limits_{s=0}^{l} T_s$.

Очевидно, что $|I(l)|=|J(l)|=|T(l)|=m(r)+l\ \forall l \in \{1, 2, \ldots, q(n, r)\}$.

Обозначим $I_{l+1}=N_n \backslash I(l)$, $J_{l+1}=N_n \backslash J(l)$, $T_{l+1}=N_n \backslash T(l)$.

Возможны два случая:

$$1)\ n > m(r)+q(n,r);$$
$$2)\ n = m(r)+q(n,r).$$

В первом случае имеем $I_{l+1} \neq \varnothing$, $J_{l+1} \neq \varnothing$, $T_{l+1} \neq \varnothing$. Для любой тройки подмножеств (I_s, J_s, T_s), $s=0, 1, \ldots, l+1$, определим многогранник $M(I_s, J_s, T_s)=$
$=\{x=\|x_{ijt}\|_{I_s \times J_s \times T_s} : x_{ijt} \geq 0\ \forall (i, j, t) \in I_s \times J_s \times T_s$, $\sum\limits_{i \in I_s} \sum\limits_{j \in J_s} x_{ijt}=1\ \forall t \in T_s$, $\sum\limits_{i \in I_s} \sum\limits_{j \in T_s} x_{ijt}=1\ \forall j \in J_s$, $\sum\limits_{j \in J_s} \sum\limits_{j \in T_s} x_{ijt}=1\ \forall i \in I_s\}$. Заметим, что многогранник $M(I_s, J_s, T_s)$, $s=0, 1, \ldots, l+1$, отличается от многогранника $M(3, m_s)$, где $m_s=|I_s|=|J_s|=|T_s|$, лишь нумерацией элементов их матриц.

Пусть $y^0 = \|y^0_{ijt}\|_{I_0 \times J_0 \times T_0}$ – $(r–6l)$-нецелочисленная вершина многогранника $M(I_0, J_0, T_0)$, $y^s = \|y^s_{ijt}\|_{I_s \times J_s \times T_s}$, $s=1, 2, \ldots, l$, – 6-нецелочисленная вершина многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, а $y^{l+1} = \|y^{l+1}_{ij}\|_{I_{l+1} \times J_{l+1} \times T_{l+1}}$ – целочисленная вершина многогранника $M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1})$. Тогда согласно лемме 2 [3] матрица $x^0 = \|x^0_{ijt}\|_n$, элементы которой определяются по формуле

$$x^0_{ijt} = \begin{cases} y^s_{ijt}, \text{ если } (i,\ j,\ t) \in I_s \times J_s \times T_s,\ s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l+1, \\ 0 \text{ для остальных } (i,\ j,\ t) \text{ из } N_n^3, \end{cases}$$

является r-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3, n)$.

Известно (см. с. 309 [7]), что для числа $f_0^z(M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1}))$ целочисленных вершин многогранника $M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1})$ справедливо равенство

$$f_0^z(M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1}))= f_0^z(M(3, n-m(r)-l))=((n-m(r)-l)!)^2.$$

Так как для любых чисел $r\in \overline{R}_{n-1}$ и $l\in\{1, 2, \ldots, q(n, r)\}$ справедливо равенство $m(r-6l)=m(r)-2l$, то число $(r-6l)$-нецелочисленных вершин многогранника $M(I_0, J_0, T_0)$ равно $\sigma(m(r)-2l, r-6l)$, а число 6-нецелочисленных вершин многогранника $M(I_s, J_s, T_s)$, $s=1, 2, \ldots, l$, равно $\sigma(3, 6)$. Для завершения доказательства остается заметить, что декартовы произведения $I_s\times J_s\times T_s$, $s=0, 1, 2, \ldots, l$, приводящие к получению различных r-нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, можно образовать $\frac{1}{l!}\binom{n}{m(r)+l}^3\binom{m(r)+l}{3l}^3\prod_{h=0}^{l-1}\binom{3(l-h)}{3}^3$ способами $\left(\prod_{h=0}^{0}(\cdot)=1\right)$ и воспользоваться равенством $\prod_{h=0}^{l-1}\binom{3(l-h)}{3}^3=\frac{((3l)!)^3}{(3!)^{3l}}$.

Во втором случае доказательство проводится аналогично с той лишь разницей, что при $l=q(n, r)$ имеет место соотношение $M(I_{l+1}, J_{l+1}, T_{l+1})=\varnothing$, поскольку $I_{l+1}=\varnothing$, $J_{l+1}=\varnothing$, $T_{l+1}=\varnothing$. Теорема 2 доказана.

Аналогичным образом доказываются следующие неравенства

$$\sigma(n, 10)\geq\binom{n}{4}^3((n-4)!)^2\sigma(4, 10)+\binom{n}{5}^3\times((n-5)!)^2\binom{5}{3}^3\sigma(3, 6)\sigma(2, 4),\ n>4, \qquad (2)$$

$$\sigma(n, 12)\geq\binom{n}{5}^3((n-5)!)^2\sigma(5, 12)+\frac{1}{2}\binom{n}{6}^3\times((n-6)!)^2\binom{6}{3}^3\sigma(3, 6)\sigma(3, 6),\ n>5. \qquad (3)$$

Из теоремы 1 в силу неравенств (2), (3) и теоремы 2 получаем

Следствие 1. Пусть $n>m(r)>2$. Для любого натурального числа $r=4, 6, 7, 8, 9, 11$ и только для него справедлива формула

$$\sigma(n, r)=\binom{n}{m(r)}^3((n-m(r))!)^2\sigma(m(r), r).$$

Из теоремы 2 и неравенств (2), (3) вытекает

Следствие 2. Для числа $f_0^u(M(3, n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$ справедливо неравенство

$$f_0^u(M(3, n))\geq\sum_{r\in R_n}\binom{n}{m(r)}^3((n-m(r))!)^2\sigma(m(r), r)+\sum_{r\in R_{n-1}}\Delta(n, r),$$

где

$$\Delta(n, r)=\begin{cases}\sum_{l=1}^{q(n,r)}\delta(n, r, l), \text{ если } r\in\overline{R}_{n-1},\\ \binom{n}{5}^3((n-5)!)^2\binom{5}{3}^3\sigma(3, 6)\sigma(2, 4), \text{ если } r=10,\\ \frac{1}{2}\binom{n}{6}^3((n-6)!)^2\binom{6}{3}^3\sigma(3, 6)\sigma(3, 6), \text{ если } r=12,\end{cases}$$

$0!=1$, $\binom{n}{n}=1$, а число $\delta(n,\ r,\ l)$ определяется по формуле (1).

1. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 1999. № 12. С. 65.
2. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. // Вести. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 3. С. 67.
3. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 2000. № 12. С. 89.
4. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 59.
5. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Дискрет. материалы. 2001. Т. 13. Вып. 2. С. 120.
6. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Дискрет. материалы. 1991. Т. 3. Вып. 2. С. 3.
7. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.

Поступила в редакцию 26.05.2001.

Виктор Михайлович Кравцов – студент 4-го курса факультета прикладной математики и информатики.

УДК 514.765

Ю.Я. РОМАНОВСКИЙ

ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ СОБСТВЕННОЙ ГРУППОЙ ПУАНКАРЕ

The geometrical interpretation of homogeneous space generated by an own Poincaré group is given.

Пусть M – ориентированное пространство Минковского, в котором задана инерциальная система координат [1]. Любому вектору $\mathbf{z}\in M$ можно поставить в соответствие эрмитову матрицу следующим образом:

$$\mathbf{z}\to z_0\sigma_0+z_1\sigma_1+z_2\sigma_2+z_3\sigma_3=\begin{pmatrix} z_0+z_3 & z_1-iz_2 \\ z_1+iz_2 & z_0-z_3\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где z_0, z_1, z_2, z_3 – координаты вектора $\mathbf{z}$, σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 – матрицы Паули [2].

Если на векторном пространстве эрмитовых матриц $He(2)$ задать скалярное произведение $<z, u>=(Tr(z)Tr(u)-Tr(zu))/2$, то соответствие (1) является изоморфизмом ориентированных пространств Минковского.

Рассмотрим аффинное пространство

$$K=\left\{\begin{pmatrix} E & 0 \\ z & E\end{pmatrix} \middle| z\in He(2)\right\}$$

над векторным пространством

$$\underline{K}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0\end{pmatrix} \middle| z\in He(2)\right\}.$$

С помощью отображения

$$\rho: He(2)\to \underline{K}: z\to Z=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0\end{pmatrix},$$

которое является биекцией, задаем структуру ориентированного пространства Минковского на $\underline{K}$ со скалярным произведением $<Z, U>=<\rho^{-1}(Z), \rho^{-1}(U)>$.