Результатом применения второй методики является так называемое *упорядоченное дерево решений*, в котором выбор следующего теста не зависит от результатов предыдущих тестов. Для выполнения этого условия конструируется дерево решений, в котором узлам одного уровня соответствует один и тот же тест. При реализации стратегии, которую задает такое дерево решений, для нахождения решения в различных ситуациях выполняется различное число тестов, но порядок их выполнения не изменяется. Этот частный случай интересен как в практическом, так и в теоретическом плане.

С практической точки зрения упорядоченные деревья решений просты в реализации, допускают возможность эффективного планирования процесса подготовки и принятия решений и его распараллеливание. В теоретическом плане рассмотрение данного частного случая деревьев решений позволило исследовать более эффективную с точки зрения вычислений технику определения информационных оценок и альтернативный критерий оптимизации. Его применение позволяет находить последовательности выполнения технологических операций не только наиболее информативные, но и доставляющие информацию, наиболее релевантную искомому решению.

Подробное описание теоретико-информационного метода анализа решающих функций, теоретико-информационной модели процедур принятия решений и информационно-технологической модели управления в целом имеется в [1–3].

1. Курбацкий А.Н. Автоматизация обработки документов. Мн., 1999.
2. Курбацкий А.Н., Чеушев В.А. Информационный метод анализа и оптимизации в системах поддержки принятия решений. Мн., 1999.
3. Курбацкий А.Н. Построение информационно-технологических систем. Мн., 2001.

Поступила в редакцию 25.06.2001.

УДК 519.4

В.М. КОТОВ

АСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА С ДЛИНАМИ ДУГ, РАВНЫМИ 1 ИЛИ 2

We present an approximation algorithm with worst-case performance 4/3 for the special case of the Asymmetric Travelling Salesman Problem in which all weights are either one or two.

Котов Владимир Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой дискретной математики и алгоритмики. Область научных исследований – комбинаторная оптимизация, теория алгоритмов, приближенные алгоритмы.
Автор более 60 научных работ, соавтор учебных пособий.

Хорошо известно, что если $P \neq NP$, то для задачи коммивояжера (TSP) с произвольными весами ребер не существует полиномиального приближенного алгоритма с гарантированной оценкой точности. В случае, когда веса ребер удовлетворяют неравенству треугольника, становится возможным построение полиномиального приближенного алгоритма с гарантированной оценкой точности. Лучшим из алгоритмов является алгоритм Кристофидеса–Сердюкова [1].

Пападимитриу и Янакакис [2], Вишванатан [3] исследовали специальные случаи (TSP), когда веса ребер (дуг) равны 1 или 2.

Вместо задачи коммивояжера с весами ребер (дуг) 1 и 2 мы будем рассматривать задачу коммивояжера на максимум (MTSP) [4–6] с весами 1 и 0. Задача MTSP формулируется следующим образом: в полном взвешенном графе K_n с неотрицательными весами дуг необходимо найти гамильтонов контур с максимальным суммарным весом дуг.

Основная причина подобного сведения состоит в том, что обе задачи (TSP с весами 1 и 2 и MTSP с весами 1 и 0) взаимосвязаны с точки зрения гарантированных оценок.

Действительно, пусть C – матрица весов размера $n \times n$ для TSP с весами 1 или 2. Рассмотрим задачу MTSP с матрицей весов C', элементы которой вычисляются по правилу $C'_{ij}=2-C_{ij}$.

Множество ребер (дуг), построенных алгоритмом для задачи MTSP берется в качестве решения для исходной задачи TSP с весами 1 или 2.

Очевидно, что если приближенный алгоритм для задачи MTSP с весами ребер 1 или 0 имеет гарантированную оценку $1-t$, то он может быть использован для задачи TSP с весами 1 или 2 описанным выше образом, причем его гарантированная оценка будет равна $1+t$.

В работе [7] для асимметричной задачи MTSP был предложен алгоритм с гарантированной оценкой 4/7, основанной на схеме "разбиение и релаксация".

Определим субтур как подмножество дуг некоторого гамильтонова контура. Этот субтур может быть подмножеством дуг некоторой релаксационной задачи, например задачи о назначении. Понятно, что часть дуг из решения задачи о назначении должна быть удалена, чтобы иметь субтур. Схема "разбиение и релаксация" состоит в следующем.

Вначале строятся решения некоторых релаксационных задач. Эти решения разбиваются на субтуры таким образом, чтобы линейная комбинация этих субтуров представлялась в виде линейной комбинации решений релаксационных задач. Результатом работы схемы является тот из субтуров, суммарный вес которого наилучший.

В работе [3] для асимметричной TSP с весами дуг 1 или 2 был предложен алгоритм, гарантированная оценка которого равна 17/12. Было показано, что эта задача эквивалентна специальной задаче покрытия вершин графа минимальным числом вершинно непересекающихся путей.

В данной работе предлагается алгоритм для асимметричной MTSP с весами 1 или 0 при условии, что в орграфе существует цикл веса n. Гарантированная оценка алгоритма равна 2/3. Это значит, что имеется алгоритм для асимметричной TSP с весами 1 или 2, гарантированная оценка которого равна 4/3.

Описание алгоритма

Пусть имеется асимметричная матрица C размера $n \times n$, значения элементов которой равны 1 или 0. Вес ребра $e=(i, j)$ будет обозначаться как $C(e)$, или C_{ij}. Для набора ребер X величина $c(X)$ будет обозначать суммарный вес ребер из набора X. Через X^{opt} будем обозначать величину оптимального решения задачи MTSP.

Пусть множество дуг A соответствует оптимальному решению задачи о назначении для графа G с матрицей весов C. Не умаляя общности, мы будем рассматривать в A только дуги с весом 1. В соответствии с этими дугами все вершины графа G можно разбить на два класса.

Первый, "красный", класс состоит из вершин, входящих в контуры длины 2, т. е. контуров, состоящих ровно из двух дуг с весом 1. Такие контуры будут называться "красными" контурами.

Второй, "синий", класс состоит из вершин других контуров ("синие" контуры), длина которых больше 2, или незамкнутых маршрутов ("синие" маршруты).

Рассмотрим граф G^A, в котором одна "красная" вершина соответствует одной "красной" вершине в G, а две "синие" вершины соответствуют одной "синей" вершине в G.

Пусть вершина i' в G^A соответствует "красной" вершине i в G, а вершины j', j'' соответствуют "синей" вершине j в G.

Мы введем ребро между двумя "красными" вершинами i' и j' в G^A, если C_{ij}=1 или C_{ji}=1 в G, и при этом вершины i, j не из одного "красного" цикла.

Мы также введем ребро между "красной" вершиной i' и "синей" вершиной j' (j'') в G^A , если C_{ij}=1 (C_{ji}=1) в G.

Между двумя "синими" вершинами и между двумя "красными" из одного цикла ребер нет.

Пусть M является паросочетанием в графе G^A, которое покрывает максимальное количество "красных" вершин. Очевидно, что такое паросочетание соответствует максимальному взвешенному паросочетанию в графе G^A, когда ребра между двумя "красными" вершинами имеют вес, равный 2, а ребра между "красной" вершиной и "синей" вершиной имеют вес, равный 1.

В соответствии с графом G^A и паросочетанием M построим граф G^M следующим образом.

Сначала склеиваются пары "синих" вершин в G^A, каждая из которых соответствует одной "синей" вершине исходного графа G.

После этого добавляются ребра из паросочетания M и дополнительные ребра, причем каждое такое дополнительное ребро соединяет пару "красных" вершин из одного цикла.

Понятно, что степень каждой вершины в графе G^M не превосходит 2, поэтому G^m состоит из циклов и цепочек.

Утверждение. Если два ребра в паросочетании M будут смежные после склеивания, то направления соответствующих им дуг в G различны, т. е. одна дуга входящая, а другая – выходящая для соответствующей "синей" вершины.

Существует два вида циклов и два типа цепочек в графе G^M

Первый тип циклов состоит только из "красных" вершин. Циклы такого вида будут обозначаться как R_{cir}. Цикл такого типа связан с множеством вершин и дуг исходного графа G следующим соотношением.

Лемма 1. Пусть цикл вида R_{cir} состоит из $2k$ вершин. Тогда на этих вершинах существует субтур, состоящий из не менее чем $3k/2$ дуг из множества A или имиджей ребер из паросочетания M.

Доказательство. Обходим цикл R_{cir} в одном из направлений. Пусть S является подмножеством имиджей ребер из M, соответствующих выбранному направлению, а T является подмножеством имиджей ребер из M, не соответствующих выбранному направлению, т. е. имеющих обратное направление. Не умаляя общности, пусть $|S|>|T|$. Тогда $|S|> k/2$. Поэтому множество дуг S вместе с соответствующими дугами из каждого "красного" цикла в R_{cir} соответствуют субтуру, количество дуг в котором не меньше $3k/2$.

Первый тип цепочек состоит только из “красных” вершин. Цепочки такого вида будут обозначаться как R_{ch}. Цепочки такого типа связаны с множеством вершин и дуг исходного графа G следующим соотношением.

Лемма 2. Пусть цепочка вида R_{ch} состоит из $2k$ вершин. Тогда существует субтур на этих вершинах, состоящий из не менее чем $4k/3$ дуг из множества A или имиджей ребер из паросочетания M.

Второй тип циклов состоит из “красных” и “синих” вершин. Циклы такого вида будут обозначаться как RB_{cir}.

Лемма 3. Для цикла вида RB_{cir} существует такой набор ребер M' из M, что каждый “красный” цикл, который имеет вершину в рассматриваемом цикле RB_{cir}, смежен одному из ребер M'.

Второй тип цепочек состоит из “красных” и “синих” вершин. Циклы такого вида будут обозначаться как RB_{ch}.

Лемма 4. Для цикла вида RB_{ch} существует такой набор ребер M' из M, что каждый “красный” цикл, который имеет вершину в рассматриваемой цепочке RB_{ch}, смежен одному из ребер M'.

Пусть множество M^A является объединением множеств M' для всех циклов RB_{cir} и цепочек RB_{ch}. Используя решение задачи о назначении A и граф G^M, произведем разбиение вершин графа G на две группы вершин R и RB следующим образом.

Группа R состоит из вершин циклов R_{cir} и цепочек R_{ch}.

Группа RB состоит из вершин одного "синего" цикла (цепочки) множества A и из вершин "красных" циклов, которые связаны с циклом (цепочкой) ребрами M^A.

Каждая такая группа определяет множество дуг, состоящее из дуг A и дуг, которые являются имиджами ребер M^A, причем концевые точки дуг должны быть в одной группе.

Условие $C(A)>C(X^{opt})$ обеспечивает такое взаимно однозначное соответствие между дугами в A и дугой в оптимальном решении, при котором дуге с весом 1 из оптимального решения соответствует дуга с весом 1 в A.

Поэтому существует соответствие между дугами в группах и дугами в оптимальном решении, когда для каждой группы суммарный вес дуг из A в группе не меньше суммарного веса соответствующих дуг из оптимального решения. Это означает, что можно анализировать каждую группу отдельно.

Лемма 5. Если группа RB состоит из k вершин, а суммарный вес ее дуг из A и M^A равен w, то существует субтур на этих вершинах с суммарным весом не меньше $2w/3$.

Доказательство. Пусть группа состоит из $2k_1$ “красных” вершин и k_2 “синих” вершин, $k=2k_1+k_2$. Возможны все ситуации.

1. $k_2 > k_1$.

Если "синие" вершины связаны в цикл, то можно построить субтур с общим суммарным весом k_1+k_2, беря k_2-1 дуг из "синего" цикла, одну дугу из каждого "красного" цикла и один имидж из M^A между вершинами из одного из "красных" циклов и одной из вершин из "синего" цикла.

Так как общий вес дуг из A в группе равен k, то из условия $k_2 \geq k_1$ следует, что

$$k_1+k_2 \geq 2(2k_1+k_2)/3.$$

Если "синие" вершины связаны в цепочки, то можно построить субтур с общим суммарным весом k_1+k_2-1. беря k_2-1 дуг из "синей" цепочки и одну дугу из каждого “красного” цикла.

Так как общий вес дуг из A в группе равен $k-1$, то из условия $k_2 > k_1$ следует, что

$$k_1+k_2-1 \geq 2(2k_1+k_2-1)/3.$$

2. $k_2 < k_1$.

В этом случае можно построить субтур с суммарным весом $2k_1$, беря одну дугу из каждого "красного" цикла и k_1 имиджей из M^A между каждым "красным" циклом и вершиной из "синего" цикла.

Суммарный вес дуг из A в группе не превышает $2k_1+k_2$, поэтому из условия $k_2 < k_1$ следует, что

$$2k_1 \geq 2(2k_1+k_2)/3.$$

Приведенные леммы обосновывают следующий алгоритм AM для поиска субтура в графе с гарантированной оценкой 2/3 в случае разбиения вершин графа G на группы R и/или RB.

Алгоритм AM состоит в следующем.

1. Решаем задачу о назначении и строим множество A.
2. Строим G^A и находим паросочетание максимального веса M.
3. Строим G^M и определяем группы R.
4. Находим M^A и определяем группы RB.
5. Строим субтуры для каждой группы.

Лемма 6. Если паросочетание M в G^A покрывает все "красные" вершины, то каждая вершина в G принадлежит R_{cir} или RB.

Теорема. Если $c(X^{opt})=n$, то существует паросочетание в G^A, которое покрывает все "красные" вершины.

Следствие 1. Если $c(X^{opt})=n$, то алгоритм AM гарантирует построение субтура с суммарным весом, как минимум, $2n/3$.

Следствие 2. Если $c(X^{opt})=n$ и все вершины “красные”, то алгоритм AM гарантирует построение субтура с суммарным весом, как минимум, $3n/4$.

1. Christofides N. // Technical Report, GSIA. 1976.
2. Papadimitriou C., Yannakakis M. // Math. of Oper. Res. 1993. Vol. 18. P. 1.
3. Vishwanathan S. // Information Processing Letters. 1992. 44. P. 297.
4. Fisher M., Nemhauser G., Wolsey L. // Oper. Res. 1979. Vol. 4. P. 799.
5. Ковалев М.М., Котов В.М. Субоптимальные алгоритмы решения задачи коммивояжера. Деп. в ВИНИТИ. № 2403-82. 1982. 31 с.
6. Они же // Изв. АН БССР. 1984. № 4. С. 45.
7. Они же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1986. № 3. С. 44.

Поступила в редакцию 23.01.2001.