Воспользуемся следующим тождеством:

$$|x|^p = D^{-1}(p)\operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{iux\}}{|u|^{1+p}}du\right] = D^{-1}(p)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(xu)}{|u|^{1+p}}du, \qquad (12)$$

где $0<p<\alpha<2$, тогда:

$$|d_T(\lambda)|^p = D^{-1}(p)\operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{iud_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}du\right].$$

Учитывая соотношение $E\{iud_T(\lambda)\}=\exp\left\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_T(\lambda)\right\}$, приведенное в статье [3], получим:

$$EI_T(\lambda)=\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{-c_\alpha|u|^\alpha\gamma_T(\lambda)\}}{|u|^{1+p}}du. \qquad (13)$$

Произведем в интеграле правой части (13) замену переменной интегрирования $u=\frac{x}{[c_\alpha\gamma_T(\lambda)]^{1/\alpha}}$. С учетом (7) получим:

$$EI_T(\lambda)=\frac{1}{F(p,\alpha)c_\alpha^{p/\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\left\{-c_\alpha\frac{|x|^\alpha}{c_\alpha\gamma_T(\lambda)}\gamma_T(\lambda)\right\}}{\frac{|x|^{1+p}}{[c_\alpha\gamma_T(\lambda)]^{(1+p)/\alpha}}}\frac{1}{[c_\alpha\gamma_T(\lambda)]^{1/\alpha}}dx=$$

$$=[\gamma_T(\lambda)]^{p/\alpha}\frac{1}{F(p,\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\exp\{-|x|^\alpha\}}{|x|^{1+p}}dx=[\gamma_T(\lambda)]^{p/\alpha},$$

что и требовалось показать.

Соотношение (10) доказывается аналогично. Теорема доказана.

1. Masry E., Cambanis S. // Stochastic Processes and Theeir Applications. 1984. Vol. 18. P. 1.
2. Cambanis S. Complex symmetric stable variables and processes // Contributions to Statistics: Essays in Honour of Norman L. Johnson. 1983. P. 63.
3. Соболева Т. В. Статистические свойства преобразования Фурье наблюдений устойчивого стационарного случайного процесса. Д 20009 от 21.02.2000.
4. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.

Поступила в редакцию 15.09.2000.

Соболева Татьяна Валентиновна – инженер-программист учебной лаборатории БГУ.

УДК 519.24

Н.Н. ТРУШ, Т.В. ЦЕХОВАЯ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЕМИИНВАРИАНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОЦЕНКИ ВАРИОГРАММЫ

The estimate of the variogram of stationary stochastic process with discrete time is constructed. Higher order semi-invariants of examined estimate are found, their asymptotic behavior is considered.

Рассмотрим случайный процесс $Y(s)=\mu+\delta(s)$, $s\in Z$, где $\mu=MY(s)$. Предположим, что $\delta(s)$, $s\in Z$ – стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, неизвестной вариограммой [1]

$$\nu(h) = M(\delta(s+h) - \delta(s))^2; \; s, \; h \in Z.$$

Пусть в результате некоторого эксперимента получено n последовательных наблюдений $Y(1), Y(2), \ldots, Y(n)$ за процессом $Y(s)$, $s \in Z$. В качестве оценки вариограммы рассмотрим статистику:

$$\hat{\nu}(h) = \frac{1}{n-h} \sum_{s=1}^{n-h} \left(Y(s+h) - Y(s)\right)^2, \tag{1}$$

где $h = \overline{0, n-1}$. Положим также, $\nu(-h) = \nu(h)$, $h = \overline{0, n-1}$ и $\nu(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Рассмотрим асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков оценки вариограммы, заданной соотношением (1).

Теорема 1. *Если имеет место соотношение*

$$\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{t_{p-1}=-\infty}^{\infty} \left| c_p(t_1, \ldots, t_{p-1}) \right| < \infty, \tag{2}$$

где $c_p(t_1, \ldots, t_{p-1})$, $t_j \in Z$, $j = \overline{1, p-1}$, $p > 2$ *– смешанный семиинвариант порядка* p *случайного процесса* $\delta(s)$, $s \in Z$, *то для оценки* $\hat{\nu}(h)$, $h = \overline{0, n-1}$, *задаваемой равенством* (1),

$$\operatorname{cum}\{\hat{\nu}(h_1), \; \hat{\nu}(h_2), \ldots, \; \hat{\nu}(h_p)\} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3}$$

$$h_j = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{1, p}, \; p > 2.$$

Доказательство. Обозначим $m_{i_j} = \begin{cases} 1, & i_j = 0, 2, \\ -2, & i_j = 1, \end{cases}$ $j = \overline{1, p}$. Применяя приведенные в [2] свойства смешанных семиинвариантов, будем иметь

$$\operatorname{cum}\{\hat{\nu}(h_1), \; \hat{\nu}(h_2), \ldots, \; \hat{\nu}(h_p)\} = \left[\prod_{j=1}^{p}(n-h_j)\right]^{-1} \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \ldots \sum_{s_p=1}^{n-h_p} \sum_{i_1, \ldots, i_p=0}^{2} m_{i_1} \ldots m_{i_p} \times$$

$$\times \operatorname{cum}\left\{\delta\left(s_1 + \left[\frac{i_1}{2}\right] h_1\right) \delta\left(s_1 + \left[\frac{i_1+1}{2}\right] h_1\right), \ldots, \delta\left(s_p + \left[\frac{i_p}{2}\right] h_p\right) \delta\left(s_p + \left[\frac{i_p+1}{2}\right] h_p\right)\right\}, \tag{4}$$

где $\left[\frac{i}{2}\right]$ означает целую часть числа $\frac{i}{2}$.

На основании леммы 2.5 [2] правую часть равенства (4) перепишем в виде

$$\left[\prod_{j=1}^{p}(n-h_j)\right]^{-1} \sum_{\bigcup_{q=1}^{L} D_q = D} \; \sum_{s_1=1}^{n-h_1} \ldots \sum_{s_p=1}^{n-h_p} \sum_{i_1, \ldots, i_p=0}^{2} m_{i_1} \ldots m_{i_p} \times$$

$$\times \prod_{q=1}^{L} \operatorname{cum}\left\{\delta\left(s_t + \left[\frac{i_t - 1 + r}{2}\right] h_t\right); \; (t, r) \in D_q\right\}, \tag{5}$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям множества $D = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), \ldots, (p,1), (p,2)\}$, $D_1, \ldots, D_L$ – неупорядоченные непустые множества, такие, что $\bigcup_{q=1}^{L} D_q = D$, $D_i \bigcap D_j = \varnothing$, $i \neq j$, $1 \leq L \leq 2p$, а

$\operatorname{cum}\left\{\delta\left(s_t + \left[\frac{i_t - 1 + r}{2}\right] h_t\right); \; (t, r) \in D_q\right\}$ означает смешанный семиинвариант наблюдений случайного процесса $\delta(s_t+\left[\frac{i_t-1+r}{2}\right]h_t)$ с индексами $(t,r)\in D_q$, $q=\overline{1,\ L}$.

В силу (2) при больших n из всех слагаемых соотношения (5) наибольший вклад в величину семиинварианта оценки вариограммы будут вносить слагаемые, являющиеся произведением p семиинвариантов второго порядка случайного процесса $\delta(s)$, $s\in Z$. Рассмотрим неразложимое разбиение множества D, которое соответствует одному из слагаемых такого типа: $D_1=\{(1,1), (2,2)\}$, $D_2=\{(2,1), (3,2)\}$,..., $D_{p-1}=\{(p-1,1), (p,2)\}$, $D_p=\{(p,1), (1,2)\}$.

Обозначим это слагаемое I, тогда, используя свойства смешанных семиинвариантов и определение ковариационной функции $\sigma(h)$, $h\in Z$, будем иметь

$$\left[\prod_{j=1}^{p}(n-h_j)\right]^{-1}\sum_{s_1=1}^{n-h_1}\ldots\sum_{s_p=1}^{n-h_n}\sigma(s_1-s_2)\times\ldots\times\sigma(s_{p-1}-s_p)\sigma(s_p-s_1). \qquad (6)$$

Для преобразования выражения сделаем замену переменных суммирования: $r_1=s_1$, $r_i=s_{i-1}-s_i$, $i=\overline{2,p}$, а затем изменим порядок суммирования. Тогда получим

$$\frac{n-\max\limits_{i=\overline{1,\ p}}h_i}{(n-h_1)(n-h_2)\ldots(n-h_p)}\times$$

$$\times\sum_{r_2=1-n+h_2}^{n-h_1-1}\ \sum_{r_3=1-n+h_3}^{n-h_2-1}\ldots\sum_{r_p=1-n+h_p}^{n-h_{p-1}-1}\left(1+\frac{m(r_2,\ldots,\ r_n)}{n-\max\limits_{i=\overline{1,\ p}}h_i}\right)\sigma(-r_2-\ldots-r_p)\prod_{j=2}^{p}\sigma(r_j),$$

где функция $m(r_2,\ldots,\ r_n)$ такая, что $\left|\frac{m(r_2,\ldots,\ r_n)}{n-\max\limits_{i=\overline{1,\ p}}h_i}\right|<1$. Учитывая (2), получим требуемый результат.

Теорема 2. *Пусть случайный процесс $\delta(s)$, $s\in Z$, таков, что семиинвариантные спектральные плотности $f_s(\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-1})$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-1}\in\Pi=[-\pi,\pi]$, $s=\overline{2,p}$, p – произвольное натуральное число, $p>2$, определенные в работе* [2], *непрерывны на области определения. Тогда для оценки $\hat{v}(h)$, $h=\overline{0,n-1}$, задаваемой равенством* (1), *имеет место* (3).

Доказательство. Рассмотрим (6). Подставляя вместо ковариационных функций их выражения через спектральные плотности, а затем преобразуя полученное соотношение, получаем

$$\frac{(2\pi)^{p-1}(n-\max\limits_{i=\overline{1,p}}h_i)}{(n-h_1)(n-h_2)\ldots(n-h_p)}\int\limits_{\Pi^{p-1}}g(y_2,\ldots,\ y_p)\ \Phi^{n}_{h_1\ldots h_p}(y_2,\ldots,\ y_p)\ dy_2\ldots dy_p,$$

где $g(y_2,\ldots,\ y_n)=\int\limits_{\Pi}f(y_1)f(y_1+y_2)\ldots\ f(y_1+\ldots+y_p)e^{i\sum\limits_{j=2}^{p}y_j\frac{(h_1-h_j)}{2}}dy_1$, ядро

$$\Phi^n_{h_1\dots h_p}(y_2,\dots,y_p)=\frac{(2\pi)^{1-p}}{(n-\max\limits_{i=\overline{1,p}} h_i)}\frac{\sin\frac{(n-h_1)(-y_2-\dots-y_p)}{2}}{\sin\frac{(-y_2-\dots-y_p)}{2}}\prod_{j=2}^{p}\frac{\sin\frac{(n-h_j)y_j}{2}}{\sin\frac{y_j}{2}}.$$

В силу свойств ядерной функции очевидно, что $I\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Таким образом, теорема доказана.

Между вариограммой $\nu(h)$, $h\in Z$, и ковариационной функцией $\sigma(h)$, $h\in Z$, существует связывающее их соотношение [1]. Асимптотическое поведение семиинвариантов высших порядков оценки ковариационной функции рассматривалось, например, в работе [3].

1. Cressie N., Grondona M.O. A comparision of variogram estimation with covariogram estimation // The Art of Statistical Science. 1992. C. 191.
2. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.
3. Труш Н.Н., Шабуневич Т.В. // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Сб. тр. междунар. науч. конф. Брест, 1997. С. 49.

Поступила в редакцию 27.09.2000.

Труш Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики БГУ.
Цеховая Татьяна Вячеславовна – инженер-программист ФПК по ПМ и ЭВМ БГУ.

УДК 519.24

Н.В. МАРКОВСКАЯ

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК СМЕШАННЫХ МОМЕНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

In this article limit distribution of estimates of mixed moments of higher orders of stationary stochastic processes is found under limitation on mixed cumulants.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $x(t)$, $t\in Z=\{0, \pm1, \dots\}$. Предположим, что $Mx(t)=0$, $t\in Z$. Обозначим $m_n(t_1, \dots, t_{n-1})$ – смешанный момент n-го порядка, $c_n(t_1, \dots, t_{n-1})$ – смешанный семиинвариант n-го порядка, $f_n(t_1, \dots, t_{n-1})$ – семиинвариантную спектральную плотность n-го порядка, $t_j\in Z$, $x_j\in\Pi$, $j=\overline{1,n-1}$, $n\geq 2$, $f_2(x)=f(x)$, $x\in\Pi$.

Пусть смешанный момент n-го порядка неизвестен и требуется по T последовательным через равные промежутки наблюдениям

$$x(0),\ x(1),\ \dots,\ x(T-1)$$

за процессом $x(t)$, $t\in Z$, построить его оценку и исследовать ее статистические свойства.

Для смешанного момента n-го порядка построим оценку вида

$$\hat{m}_n(t_1,\dots,t_{n-1})=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} x(t_1+t)x(t_2+t)\ \dots\ x(t_{n-1}+t)x(t), \quad (1)$$

$t, t_j\in Z$, $j=\overline{1,n-1}$, $n\geq 2$.

В работе [3] показано, что построенная оценка смешанного момента n-го порядка (1) является несмещенной оценкой для смешанного момента n-го порядка и состоятельной в среднеквадратическом смысле.