дают решение уравнения (7). Заметим в заключение, что решение уравнения (8) с увеличением k становится весьма громоздким, поэтому находить его целесообразно в численном виде.

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.
2. Юницкий А.Э., Савчук В.П., Савенков В.А., Вярьвильская О.Н. // Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике “Механика-95”: Тез. докл., Минск, 6–11 февр. 1995 г. Мн., 1995. С. 253.
3. Савчук В.П., Савенков В.А., Вярьвильская О.Н. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 2. С. 54.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
5. Юницкий А.Э. Струнные транспортные системы на земле и в космосе. Гомель, 1995. С. 93.

Поступила в редакцию 28.12.2002.

Владимир Петрович Савчук – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

Ольга Валентиновна Титюра – магистрант кафедры теоретической и прикладной механики.

УДК 539.3

В.А. САВЕНКОВ

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

This paper considers dynamic contact problem for orthotropic strip. A general solution in terms of two potential functions is presented. The mixed boundary conditions lead to dual integral equations, which solving may find in the form of series.

Рассмотрим упругую ортотропную полосу, занимающую в плоскости Ox_1x_2 область $S(0<x_2<h)$; $L(x_2=0)$ и $L_1(x_2=h)$ – нижняя и верхняя границы области S. Предположим, что полоса своей нижней стороной опирается без трения на гладкое жесткое основание. По верхней границе полосы с постоянной скоростью c движется штамп с плоским основанием. Трение на участке $L'(|x_1|\le a)$ контакта штампа с полосой и внешняя нагрузка на остальной части $L''(|x_1|>a)$ контура L отсутствуют.

В предположении, что главные оси ортотропии совпадают с осями координат, используем следующие соотношения закона Гука [1]:

$$\sigma_{11}=c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \sigma_{22}=c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \sigma_{12}=c_{66}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$$

и соответствующие уравнения движения

$$\begin{gathered}c_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+c_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\\ c_{66}\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x_1^2}+c_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\end{gathered}\tag{1}$$

где c_{ij} – жесткостные характеристики материала, ρ – его плотность, σ_{ij} – компоненты напряжений, u_i – проекции перемещений на оси координат.

Примем новую систему координат, связанную со штампом. Производя преобразование для относительного движения

$$x=x_1-ct,\ \ y=x_2,\ \ t=t,$$

приводим уравнения (1) к виду:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+2\beta\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+\alpha\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+2\beta_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\alpha_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0, \qquad (2)$$

где

$$2\beta=\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{11}\left(1-M_1^2\right)},\ \alpha=\frac{c_{66}}{c_{11}\left(1-M_1^2\right)},\ M_1=c\sqrt{\frac{\rho}{c_{11}}},$$

$$2\beta_1=\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{66}\left(1-M_{12}^2\right)},\ \alpha_1=\frac{c_{22}}{c_{66}\left(1-M_{12}^2\right)},\ M_2=c\sqrt{\frac{\rho}{c_{66}}}.$$

Решение системы уравнений (2) ищем в виде

$$u_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad u_2=m\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

где m – постоянная, а $\Phi=\Phi(x,y)$.

Уравнения (2) удовлетворяются, если

$$\alpha+2\beta m=\frac{\alpha_1 m}{m+2\beta_1}=\mu,$$

а функция $\Phi(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mu_i\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi_i(x,y)=0.$$

Тогда $m_i=\dfrac{\mu_i-\alpha}{2\beta}$, где μ_i – корни уравнения $\mu^2-2a_1\mu+a_2=0$, в котором $2a_1=\alpha+\alpha_1-4\beta\beta_1$, $a_2=\alpha\alpha_1$.

В дальнейшем будем рассматривать наиболее распространенный на практике материал первого типа [2], для которого $a_2>0$, $a_1>\sqrt{a_2}$.

В результате получим следующие выражения для перемещений и напряжений:

$$u_1=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x},\quad u_2=m_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+m_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial y},$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{c_{66}}=\left(1+m_1\right)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y}+\left(1+m_2\right)\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\partial y},$$

$$\sigma_{xx}=k_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}+k_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2},\quad \sigma_{yy}=l_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}+l_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2},$$

$$k_i=c_{12}m_i-c_{11}\mu_i,\quad \mu_i l_i=\mu_i c_{12}-c_{22}m_i.$$

В нашем случае необходимо удовлетворить условиям:

$$\sigma_{xy}=0 \quad \text{на } L_1(\eta=1), \qquad (3)$$

$$u_2=-u_0 \quad \text{на } L'(|\xi|<\beta,\ \eta=1), \qquad (4)$$

$$\sigma_{yy}=0 \quad \text{на } L''(|\xi|>\beta,\ \eta=1), \qquad (5)$$

$$\sigma_{xy}=u_2=0 \quad \text{на } L(\eta=0), \qquad (6)$$

где $\xi=x/h$, $\eta=y/h$, $\beta=a/h$ – безразмерные переменные, u_0 – нормальное перемещение штампа.

Для решения задачи функции напряжений возьмем в форме интеграла Фурье [3]:

$$\Phi_i=\int_0^\infty f_i(\lambda)\operatorname{ch}\gamma_i\eta\lambda\cos\lambda\xi\, d\lambda,\quad i=1,\ 2,$$

где $f_i(\lambda)$ – неизвестные функции, которые определяются из граничных условий, $\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_i}}$.

Тогда перемещения и компоненты напряжений будут иметь вид:

$$hu_1 = -\int_0^\infty \lambda(\varphi_{11} + \varphi_{12})\sin\lambda\xi d\lambda, \quad hu_2 = \int_0^\infty \lambda(m_1\gamma_1\varphi_{21} + m_2\gamma_2\varphi_{22})\cos\lambda\xi d\lambda,$$

$$h^2\sigma_{xx} = \int_0^\infty \lambda^2(k_1\gamma_1^2\varphi_{11} + k_2\gamma_2^2\varphi_{12})\cos\lambda\xi d\lambda, \tag{7}$$

$$h^2\sigma_{yy} = -\int_0^\infty \lambda^2(l_1\varphi_{11} + l_2\varphi_{12})\cos\lambda\xi d\lambda,$$

$$h^2\sigma_{xy} = -c_{66}\int_0^\infty \lambda^2\left[\gamma_1(1+m_1)\varphi_{21} + \gamma_2(1+m_2)\varphi_{22}\right]\sin\lambda\xi d\lambda,$$

где $\varphi_{1i}=f_i(\lambda)\text{ch}\gamma_i\lambda\eta$, $\varphi_{2i}=f_i(\lambda)\text{sh}\gamma_i\lambda\eta$.

При таком выборе функций напряжений условия (6) удовлетворяются автоматически.

Полагая $\eta=1$ для σ_{xy} из (7) и подставляя его в (3), получим

$$f_2(\lambda) = -\frac{(1+m_1)\gamma_1\,\text{sh}\,\gamma_1\lambda}{(1+m_2)\gamma_2\,\text{sh}\,\gamma_2\lambda} f_1(\lambda). \tag{8}$$

Подставляя (8) в выражения для u_2 и σ_{yy} из (7), полагая в них $\eta=1$, получим:

$$\frac{h(\sigma_{yy})_{\eta=1}}{u_0 l_1} = -\int_0^\infty F(\lambda)\cos\lambda\xi d\lambda, \tag{9}$$

$$\frac{(u_2)_{\eta=1}}{u_0} = \int_0^\infty Q(\lambda)F(\lambda)\cos\lambda\xi d\lambda. \tag{10}$$

Здесь

$$F(\lambda) = \frac{(1+m_1)\ \gamma_1\lambda^2\,\text{sh}\,\gamma_1\lambda}{u_0 h l_1}\left(\frac{\text{cth}\,\gamma_1\lambda}{\gamma_1(1+m_1)} - \frac{l_2\,\text{cth}\,\gamma_2\lambda}{l_1\gamma_2(1+m_2)}\right) f_1(\lambda),$$

$$Q(\lambda) = \frac{(m_2 - m_1)\gamma_1\gamma_2 l_1}{\lambda\left[l_1(1+m_2)\gamma_2\,\text{cth}\,\gamma_1\lambda - l_2(1+m_1)\gamma_1\,\text{cth}\,\gamma_2\lambda\right]}.$$

Подставляя (9) и (10) в граничные условия (4) и (5), получим систему парных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty Q(\lambda)F(\lambda)\cos\lambda\xi d\lambda = 1,\ 0 \le \xi \le \beta, \tag{11}$$

$$\int_0^\infty F(\lambda)\cos\lambda\xi d\lambda = 0,\ \xi > \beta. \tag{12}$$

Решение этой системы будем искать в виде ряда:

$$F(\lambda) = \beta\sum_{j=0}^\infty a_j J_{2j}(\lambda\beta), \tag{13}$$

где $J_{2j}(\lambda\beta)$ – функции Бесселя первого рода, a_j – неизвестные коэффициенты. В этом случае уравнение (12) удовлетворяется, так как [4]

$$\int\limits_0^\infty J_{2j}(\lambda\beta)\cos\lambda\xi d\lambda = 0,\ \xi > \beta,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Уравнение (11) после подстановки выражения (13) примет вид:

$$\beta\sum_{j=0}^{\infty} a_j \int\limits_0^\infty Q(\lambda) J_{2j}(\lambda\beta)\cos\lambda\xi d\lambda = 1,\ 0 < \xi < \beta . \tag{14}$$

Используя разложение $\cos\lambda\xi$ в ряд Фурье [5],

$$\cos\lambda\xi = J_0(\lambda\beta) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\lambda\beta)\cos 2k\omega ,$$

где $\omega=\arcsin(\xi/\beta)$, уравнение (14) перепишем в виде:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \int\limits_0^\infty Q(\lambda) J_{2j}(\lambda\beta)\left[J_0(\lambda\beta) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\lambda\beta)\cos(2k\omega)\right] d\lambda = \frac{1}{\beta}. \tag{15}$$

Уравнение (15) удовлетворяется тождественно, если

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j A_{kj} = \begin{cases} 1/\beta,\ k = 0, \\ 0,\ k = 1,\ 2,\ \dots . \end{cases} \tag{16}$$

Здесь

$$A_{kj} = \int\limits_0^\infty Q(\lambda) J_{2k}(\lambda\beta) J_{2j}(\lambda\beta) d\lambda .$$

Неизвестные коэффициенты в разложении (13) определятся в результате решения системы линейных алгебраических уравнений (16). После ее решения контактное напряжение $q=(\sigma_{yy})_{\eta=1}$ под штампом вычисляется по формуле:

$$\frac{hq}{u_0 l_1} = \beta\sum_{j=0}^{\infty} a_j \int\limits_0^\infty J_{2j}(\lambda\beta)\cos\lambda\xi d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (-1)^j \frac{T_{2j}(\xi/\beta)}{\sqrt{1-(\xi/\beta)^2}},\ |\xi| \le \beta , \tag{17}$$

где T_{2j} – полиномы Чебышева.

Контактное напряжение под штампом

x/a		0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,95
$\frac{hq(x)}{u_0 l_1}$	A	0,486	0,49	0,532	0,617	0,874	1,785
	B	0,472	0,48	0,528	0,614	0,867	1,771

В таблице приведены значения функции $hq(x)/u_0 l_1$, рассчитанные по формуле (17) для материала $A(E_y/E_x=0{,}5;\ G_{xy}/E_x=0{,}6;\ \nu_{xy}=0{,}31;\ M_2=0{,}5)$ и материала $B(E_y/E_x=0{,}2;\ G_{xy}/E_x=0{,}1;\ \nu_{xy}=0{,}28;\ M_2=0{,}3)$.

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
2. De J., Patra B. // Indian J. pure appl. Math. 1994. Vol. 25. № 7. P. 767.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л., 1963.
4. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М., 1949.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.

Поступила в редакцию 03.02.2003.

Валерий Алексеевич Савенков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.