Краткие сообщения

УДК 519.10

С.Е. БУХТОЯРОВ

О РАДИУСЕ СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ С СОВОКУПНО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Upper and lower attainable estimates of strong stability radius are obtained for a vector linear trajectorial problem of finding the set of jenerally-efficient solutions.

Исследованию сильной устойчивости векторных дискретных задач с паретовским и лексикографическим принципами оптимальности посвящен ряд публикаций [1–4]. Нами получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса указанного типа устойчивости векторной траекторной задачи с совокупно-экстремальным принципом оптимальности в случае чебышевской метрики в пространстве возмущающих параметров линейных частных критериев.

Пусть на системе подмножеств (траекторий) $T\subseteq 2^E$, $|T|\geq 2$, булеана множества $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $m\geq 2$, задана векторная целевая функция $f(t, A)=\{f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \ldots, f_n(t, A_n)\}$, $n\geq 1$, с линейными частными критериями (вида MINSUM)

$$f_i(t, A_i) = \sum_{j\in N(t)} a_{ij} \to \min_{t\in T}, \quad i\in N_n.$$

где A_i – i-я строка матрицы $A=[a_{ij}]_{n\times m}\in \mathbf{R}^{nm}$, $N_n=\{1, 2, \ldots, n\}$, $N(t)=\{j\in N_m : e\in t\}$. Будем полагать $f_i(\varnothing, A) = 0$.

В теории принятия решений наряду с широко известным принципом оптимальности по Парето рассматриваются и другие функции выбора (см., например, [5–7]). В настоящей статье под векторной {n-критериальной} линейной траекторной задачей $Z^n(A)$ будем понимать задачу поиска совокупно-экстремального множества (множества совокупно-экстремальных траекторий), которое определим традиционным образом [6–8]:

$$C^n(A) = \{t\in T : \exists i\in N_n\,(C_i(t, A_i) = \varnothing)\},$$

где

$$C_i(t, A_i) = \{t'\in T \quad g_i(t, t', A_i)>0\},$$
$$g_i(t, t', A_i) = f_i(t, A_i)-f_i(t', A_i), \quad i\in N_n.$$

Очевидно, что $C^1(A)$ ($A\in\mathbf{R}^m$) является множеством всех оптимальных решений скалярной задачи $Z^1(A)$.

В работе [8] получена формула для радиуса устойчивости задачи $Z^n(A)$, под которым, как обычно, понимается предел таких возмущений парамет-

ров векторного критерия, при которых не возникает новых совокупно-экстремальных траекторий. Ослабляя требование непоявления новых совокупно-экстремальных траекторий, приходим к понятию радиуса сильной устойчивости, которое впервые было введено в [9] для однокритериальных (скалярных) задач. Этот тип устойчивости трактуется как наличие таких возмущений упомянутых параметров, при которых хотя и возможно появление новых совокупно-экстремальных траекторий, но для каждого «малого» возмущения параметров существует хотя бы одно эффективное решение исходной задачи (не обязательно одно и то же), сохраняющее совокупную эффективность. Поэтому по аналогии с [1–4] под радиусом сильной устойчивости задачи $Z^n(A)$ будем понимать число

$$\rho^n(A) = \begin{cases} \sup\ \Omega, & \text{если} \quad \Omega \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если} \quad \Omega = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Omega=\{\varepsilon>0:\ \forall B\in B(\varepsilon)\ \ (C^n(A)\cap C^n(A+B)\neq\varnothing)\},$$
$$\mathcal{B}(\varepsilon)=\{B\in \mathbf{R}^{nm}:\|B\|<\varepsilon\},$$
$$\|B\|=\max\{|b_{ij}|:(i,j)\in N_n\times N_m\},\quad B=[b_{ij}]_{n\times m}\in \mathbf{R}^{nm}.$$

Ясно, что при выполнении равенства $C^n(A)=T$, т. е. в случае, когда множество $\overline{C^n}(A):=T\backslash C^n(A)$ пусто, радиус сильной устойчивости $\rho^n(A)$ равен бесконечности. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать так называемые нетривиальные задачи, т. е. задачи, для которых $\overline{C^n}(A)\neq\varnothing$. Возмущение параметров задачи $Z^n(A)$ будем производить путем сложения матрицы A с матрицами $B\in\mathcal{B}(\varepsilon)$, которые назовем возмущающими.

Введем следующие обозначения:

$$\varphi^n(A)=\max_{t'\in C^n(A)}\ \max_{i\in N_n}\ \min_{t\in C^n(A)}\ \frac{g_i(t,\ t',\ A_i)}{\Delta(t,\ t')},$$

$$\psi^n(A)=\min_{t\in C^n(A)}\ \max_{i\in N_n}\ \max_{t'\in C^n(A)}\ \frac{g_i(t,\ t',\ A_i)}{\Delta(t,\ t')},$$

где

$$g_i(t,t',A)=f_i(t,A)-f_i(t',A),$$
$$\Delta(t,t')=|(t\cup t')\backslash(t\cap t')|.$$

Очевидно, что $\rho^n(A)\leq\psi^n(A)$.

Теорема. Для радиуса сильной устойчивости $\rho^n(A)$ нетривиальной задачи $Z^n(A)$, $n\geq1$, справедливы оценки

$$0<\varphi^n(A)\leq\rho^n(A)\leq\psi^n(A).$$

Доказательство. Для удобства изложения обозначим $\varphi:=\varphi^n(A)$, $\psi:=\psi^n(A)$.

Прежде всего отметим, что $\varphi>0$, поскольку из определения множества $C^n(A)$ следует

$$\forall t\in C^n(A)\quad \exists i\in N_n\quad \forall t'\in \overline{C^n}(A)\quad (\tau_i(t,t',A)>0).$$

Далее докажем, что $\varphi\leq\rho^n(A)$. По определению числа φ существуют такая траектория $t'\in C^n(A)$ и такой индекс $k\in N_n$, что для любой траектории $t\in\overline{C^n}(A)$ справедливы неравенства

$$0<\varphi\leq\frac{g_i(t,\ t',\ A_i)}{\Delta(t,\ t')}.$$

Откуда выводим, что для любой траектории $t\in \overline{C^n}(A)$ и всякой матрицы $B\in\mathcal{B}(\varphi)$ выполняются соотношения

$$g_k(t, t', A_k+B_k) = g_k(t, t', A_k) + g_k(t, t', B_k) \geq g_k(t, t', A) - \|B\|\Delta(t, t') > \\ > g_k(t, t', A_k) - \varphi\Delta(t, t') \geq 0.$$

Поэтому $C_k(t', A_k+B_k)\cap \overline{C^n}(A) = \varnothing$.

Следовательно, для любой матрицы $B\in\mathcal{B}(\varphi)$ имеем $C^n(A+B)\cap C^n(A)\neq\varnothing$, т. е. $\varphi\leq\rho^n(A)$.

Наконец, покажем, что $\rho^n(A)\leq\psi$. Согласно определению числа ψ существует такая траектория $t\in \overline{C^n}(A)$, что для любой траектории $t'\in C^n(A)$ и любого индекса $i\in N_n$ справедливо неравенство

$$\frac{g_i(t,\ t',\ A_i)}{\Delta(t,\ t')} \leq \psi.$$

В качестве возмущающей матрицы возьмем матрицу $B^*=[b^*_{ij}]_{n\times m}$, элементы которой для любого индекса $i\in N_n$ задаются по формуле

$$b^*_{ij} = \begin{cases} -\beta, & \text{если} \quad j\in N(t), \\ \beta, & \text{если} \quad j\notin N(t), \end{cases}$$

где $\psi<\beta<\varepsilon$. Тогда для любой траектории $t'\in C^n(A)$ получаем

$$g_i(t, t', A_i+B^*_i)=g_i(t, t', A_i)+g_i(t, t',\ B^*_i)\leq g_i(t, t', A_i)-\|B^*\|\Delta(t, t')\leq \\ \leq\Delta(t, t')(\psi-\beta)<0, \quad i\in N_n.$$

Тем самым доказано, что

$$\forall\varepsilon>\psi \quad \exists B^*\in\mathcal{B}(\varepsilon) \quad (C^n(A+B^*)\cap C^n(A)=\varnothing).$$

Следовательно, $\rho^n(A)\leq\psi i$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Всякая задача $Z^n(A)$, $n\geq 1$, сильно устойчива ($\rho^n(A)>0$).

Из полученной теоремы и теоремы 1 [8] вытекает следующий известный результат.

Следствие 2 [9]. Для любой скалярной задачи $Z^1(A)$ радиусы устойчивости и сильной устойчивости совпадают.

Приведем примеры, иллюстрирующие достижимость нижней и верхней оценок для радиуса сильной устойчивости.

***Пример* 1**. Пусть $n = 2$, $m = 4$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $t_1 = \{e_1\}$, $t_2 = \{e_2\}$, $t_3 = \{e_3\}$, $t_4 = \{e_4\}$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $C^2(A) = \{t_1, t_2\}$, $\varphi^2(A) = \frac{1}{2}$, $\psi^2(A) = \frac{3}{2}$, и согласно теореме

$$\frac{1}{2} \leq \rho^2(A) \leq \frac{3}{2}.$$

Если $\varepsilon>\frac{1}{2}$, то для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} \beta & \beta & -\beta & -\beta \\ \beta & \beta & -\beta & -\beta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon>\beta>\frac{1}{2},$$

имеем $C^2(A+B) = \{t_3, t_4\}$. Следовательно, $\rho^2(A)=\varphi^2(A)=\frac{1}{2}$.

***Пример* 2.** Пусть n, m и T такие же, как в примере 1, а матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $C^2(A) = \{t_1, t_2\}$, и согласно теореме $\rho^2(A) = \varphi^2(A) = \psi^2(A) = \frac{1}{2}$.

***Пример* 3.** Пусть n=2, m=4, $T=\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $t_1=\{e_1\}$, $t_2=\{e_2\}$, $t_3=\{e_1, e_3\}$, $t_4=\{e_2, e_4\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $C^2(A) = \{t_1, t_2\}$, $\varphi^2(A) = 1$, $\psi^2(A) = 6$.

Нетрудно проверить, что для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, где $\varepsilon=\psi^2(A) = 6$, хотя бы одна из траекторий t_1 или t_2 сохраняет совокупную экстремальность в задаче $Z^n(A+B)$, т. е. выполняется соотношение

$$C^2(A) \cap C^2(A + B) \neq \varnothing.$$

Откуда с учетом теоремы получаем $\rho^2(A) = \psi^2(A) = 6$.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры 29».

1. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. // Дискретная математика. 1998. Т. 10. Вып. 3. С. 3.
2. Emelichev V.A., Berdysheva R.A. // Computer Science Journal of Moldova. 1998. Vol. 6. № 2. P. 119.
3. Емеличев В.А., Никулин Ю.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 47.
4. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. // Optimization. 2002. Vol. 51. № 4. P. 645.
5. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. М., 1987.
6. Шоломов Л.А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М., 1989.
7. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. М., 1989.
8. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 84.
9. Леонтьев В.К. // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169.

Поступила в редакцию 11.11.2003.

Сергей Евгеньевич Бухтояров – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В.А. Емеличев.

УДК 519.24

Н.Н. ДЕМЕШ, Т.В. СОБОЛЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СОСТАВЛЯЮЩИХ МНОГОМЕРНОГО УСТОЙЧИВОГО ПРОЦЕССА

The function describing the dependence structure of multidimentional stable process with descrete time is defined. Mathematical expectation and dispersion of estimation of the considered function are calculated.

Исследование свойств устойчивых процессов с характеристическим показателем α, $0<\alpha<2$, во временной области традиционными методами затруднено, так как у них существуют конечные моменты только порядка p, $0<p<\alpha$. Для таких процессов ковариационная функция не определена.