интегральные поверхности не входят ни в одну из особых точек, симметричны относительно оси Oy и гомеоморфны эллиптическому цилиндру.

Из [1] и всего вышесказанного вытекает следующая

Теорема 3. Особыми кривыми уравнения (1) могут быть только 1) P-кривая (в случае (4)); 2) прямая (в случаях (3) – (5), (7)); 3) две параллельные прямые (в случае (4)); 4) две пересекающиеся прямые (в случаях (3) и (10)); 5) гипербола (в случаях (2), (3), (9), (10)); 6) парабола (в случаях (5), (6), (8) – (10)). При выполнении условий (2) – (6), (8) особая кривая седловая или узловая; при выполнении условий (7), (9), (10) особая кривая узловая.

1. Кожеро М.В., Спичекова Н.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 2. С. 95.

2. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М., 1960.

3. Спичекова Н.В. // Еругинские чтения-IX: Тез. междунар. мат. конф. Витебск, 2003. С. 86.

Поступила в редакцию 18.09.2003.

Наталья Викторовна Спичекова – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений М.В. Кожеро.

УДК 517.926

В.В. МИРОНЕНКО

ЧЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Necessary and sufficient conditions at which differential systems are reduced to each other by even transformation are established. Such systems are named equivalent. Conditions of equivalence of the set system to stationary system are specified. The received results are used for studying questions of existence and stability of periodic solutions of periodic differential systems.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x),\ t \in R,\ x \in D \subset R^n. \tag{1}$$

С помощью четного по t дифференцируемого преобразования вида

$$y = S(t,x),\ S: R \times D \to R \times G \tag{2}$$

получим новую дифференциальную систему

$$\frac{dy}{dt} = Y(t,y),\ t \in R,\ x \in G \subset R. \tag{3}$$

Множество всех четных по времени дифференцируемых преобразований дифференциальной системы (1) вида (2) образует группу.

Далее отдельно будем рассматривать случай, когда система (3) стационарна, т. е. имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = Y(y). \tag{4}$$

Для любой функции $P(t, x)$ положим по определению

$$P_ч(t,\ x) = \frac{P(t,\ x) + P(-t,\ x)}{2},\quad P_н(t,\ x) = \frac{P(t,\ x) - P(-t,\ x)}{2}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть существует четное по t преобразование $z=S_1(t, x)$, сводящее систему* (1) *к некоторой стационарной системе. Тогда существует*

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.

To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

и четное по t преобразование (2), *сводящее систему* (1) *к стационарной системе и обладающее свойством*

$$S(0, x)=x. \tag{6}$$

Доказательство. В качестве преобразования S возьмем преобразование $y = S(t,\ x) := S_1^{-1}(0,\ S_1(t,\ x))$.

Лемма 2. *Для того, чтобы четное по t преобразование* (2) *сводило систему* (1) *к системе* (3), *необходимо и достаточно выполнение тождеств*

$$\begin{gathered}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)\overset{t,x}{\equiv}Y_{н}(t,\ S(t,\ x)),\\ \frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)\overset{t,x}{\equiv}Y_{ч}(t,\ S(t,\ x)).\end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство. Преобразование $y=S(t, x)$ сводит систему (1) к системе (3) тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$Y(t,\ S(t,\ x))\overset{t,x}{\equiv}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X(t,\ x). \tag{8}$$

При доказательстве необходимости, выделяя и сравнивая четные и нечетные части в этом тождестве, придем к искомым соотношениям (7). При доказательстве достаточности придем к тождеству (8), сложив тождества (7).

Теорема 1. *Четное по t преобразование* (2), *обладающее свойством* (6), *сводит систему* (1) *к некоторой стационарной системе вида* (4) *тогда и только тогда, когда выполняются тождества*

$$\begin{gathered}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)\overset{t,x}{\equiv}0,\\ \frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)\overset{t,x}{\equiv}Y(S(t,\ x)),\end{gathered} \tag{9}$$

при этом правые части систем связаны между собой соотношением

$$X(0, x)\equiv Y(x).$$

Для доказательства достаточно положить в соотношении (7) $t=0$ и воспользоваться тем, что из свойства (6) следует тождество $\dfrac{\partial S(0,\ x)}{\partial x}=E$.

Замечание. Отказавшись от условия (6), достаточное условие в теореме 1 можно сформулировать следующим образом: пусть некоторая четная по t функция $S(t,\ x)$ удовлетворяет тождествам (9). Тогда преобразование (2) сводит систему (1) к некоторой стационарной системе (4).

Следствие. Пусть существует некоторое четное по t преобразование (2), *обладающее свойством* (6), *которое сводит систему* (1) *к некоторой стационарной системе* (4). *Тогда эта стационарная система имеет вид*

$$\frac{dy}{dt}=X(0, y). \tag{10}$$

Лемма 3. *Для любых трех дифференцируемых вектор-функций* $S(t, x)$, $X(t, x)$, $Y(t, x)$ *размерности n имеет место тождество*

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X(t,\ x)\right)Y(t,\ x)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}Y(t,\ x)\right)X(t,\ x)\equiv\\ \equiv\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\left(\frac{\partial X(t,\ x)}{\partial x}Y(t,\ x)-\frac{\partial Y(t,\ x)}{\partial x}X(t,\ x)\right).\end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Будем преобразовывать левую часть тождества (11):

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X(t,\ x)\right)Y(t,\ x)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}Y(t,\ x)\right)X(t,\ x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x_i}X_i(t,\ x)\right)Y_j(t,\ x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x_i}Y_i(t,\ x)\right)X_j(t,\ x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x_i\partial x_j}X_i(t,\ x)Y_j(t,\ x)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x_i}\frac{\partial X_i(t,\ x)}{\partial x_j}Y_j(t,\ x)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x_i\partial x_j}Y_i(t,\ x)X_j(t,\ x)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x_i}\frac{\partial Y_i(t,\ x)}{\partial x_j}X_j(t,\ x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x_i\partial x_j}(X_i(t,\ x)Y_j(t,\ x)-Y_i(t,\ x)X_j(t,\ x))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x_i}\frac{\partial X_i(t,\ x)}{\partial x_j}Y_j(t,\ x)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x_i}\frac{\partial Y_i(t,\ x)}{\partial x_j}X_j(t,\ x)\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\left(\frac{\partial X(t,\ x)}{\partial x}Y(t,\ x)-\frac{\partial Y(t,\ x)}{\partial x}X(t,\ x)\right).$$

От левой части тождества (11) мы пришли к правой его части. Это и означает справедливость утверждения леммы.

Теорема 2. *Четное по t преобразование* (2), *обладающее свойством* (6), *для которого* $\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\neq 0$ *всюду, кроме, быть может, некоторого множества без внутренних точек, сводит систему* (1) *к стационарной системе* (10) *тогда и только тогда, когда имеет место тождество*

$$\frac{\partial X_{\text{ч}}(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial X_{\text{ч}}(t,\ x)}{\partial x}X_{\text{н}}(t,\ x)-\frac{\partial X_{\text{н}}(t,\ x)}{\partial x}X_{\text{ч}}(t,\ x)\overset{t,\,x}{\equiv}0. \qquad (12)$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть четное по t преобразование (2) сводит систему (1) к стационарной системе (10). В этом случае согласно теореме 1 выполняются тождества (9). Продифференцируем второе из них по t:

$$\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial t\partial x}X_{\text{ч}}(t,\ x)+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{\text{ч}}(t,\ x)}{\partial t}\overset{t,\,x}{\equiv}\frac{\partial Y(S(t,\ x))}{\partial S}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial t}. \qquad (13)$$

С учетом первого из тождеств (9) тождество (13) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial t\partial x}X_{\text{ч}}(t,\ x)+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{\text{ч}}(t,\ x)}{\partial t}\overset{t,\,x}{\equiv}-\frac{\partial Y(S(t,\ x))}{\partial S}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{\text{н}}(t,\ x). \qquad (14)$$

Теперь продифференцируем по x первое из тождеств (9):

$$\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial t\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{\text{н}}(t,\ x)\right)\overset{t,\,x}{\equiv}0.$$

Отсюда получаем тождество

$$\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial t\partial x}\overset{t,\,x}{\equiv}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{\text{н}}(t,\ x)\right),$$

с учетом которого тождество (14) перепишется в виде

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.

To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)\right)X_{ч}(t,\ x)+$$
$$+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial t}\overset{t,\,x}{\equiv}-\frac{\partial Y(S(t,\ x))}{\partial S}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x). \tag{15}$$

Дифференцируя второе из тождеств (9) по x, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)\right)\overset{t,\,x}{\equiv}\frac{\partial Y(S(t,\ x))}{\partial S}\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}.$$

Учитывая это тождество, перепишем соотношение (15) в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)\right)X_{ч}(t,\ x)+$$
$$+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial t}\overset{t,\,x}{\equiv}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)\right)X_{н}(t,\ x),$$

откуда

$$\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)\right)X_{н}(t,\ x)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)\right)X_{ч}(t,\ x)\overset{t,\,x}{\equiv}0.$$

Воспользуемся леммой 4 применительно к последним двум слагаемым. Тогда получим тождество

$$\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial t}+$$
$$+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\left(\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)-\frac{\partial X_{н}(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)\right)\overset{t,\,x}{\equiv}0. \tag{16}$$

При этом частная производная $\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}$ не равна нулю тождественно. Умножив тождество (16) слева на выражение $\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\right)^{-1}$, там, где это выражение существует, придем к соотношению (12). Выполнение этого соотношения мы можем гарантировать всюду, кроме, быть может, множества без внутренних точек. Тогда из непрерывности левой части соотношения (12) следует выполнение этого соотношения всюду в $R\times D$.

Достаточность. Пусть верно тождество (12). Покажем, что в этом случае существует четное по t преобразование (2), обладающее свойством (6), которое сводит систему (1) к стационарной системе (10). В качестве такого преобразования возьмем решение уравнения $\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)=0$ с начальным условием $S(0,\ x)=x$. Это решение существует, единственно [1, с. 319], [2, с. 295], четно по t, и его частная производная по x не равняется нулю тождественно. Умножим тождество (12) слева на частную производную $\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}$ и будем преобразовывать получившееся соотношение.

$$\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\left(\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)-\frac{\partial X_{н}(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)\right)\overset{t,\,x}{\equiv}0;$$

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

$$\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)+\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x^2}X_{ч}(t,\ x)X_{н}(t,\ x)-$$

$$-\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x^2}X_{ч}(t,\ x)X_{н}(t,\ x)-\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{н}(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)-$$

$$-\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x^2}X_{н}(t,\ x)X_{ч}(t,\ x)+\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x^2}X_{н}(t,\ x)X_{ч}(t,\ x)\overset{t,\,x}{\equiv}0;$$

$$\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial x}\right)X_{н}(t,\ x)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{н}(t,\ x)}{\partial x}\right)X_{ч}(t,\ x)\overset{t,\,x}{\equiv}0.$$

Учитывая первое из тождеств (9), которому удовлетворяет функция $S(t, x)$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial x}\right)X_{н}(t,\ x)+\frac{\partial^2 S(t,\ x)}{\partial x\partial t}X_{ч}(t,\ x)\overset{t,\,x}{\equiv}0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}\frac{\partial X_{ч}(t,\ x)}{\partial x}\right)X_{н}(t,\ x)\overset{t,\,x}{\equiv}0. \qquad (17)$$

Рассмотрим функцию

$$Y(t,\ S)=\frac{\partial S(t,\ S^{-1}(t,\ S))}{\partial x}X_{ч}(t,\ S^{-1}(t,\ S))=\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x).$$

Из соотношения (17) следует, что она удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial Y(t,\ S)}{\partial t}+\frac{\partial Y(t,\ S)}{\partial S}\left(\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{н}(t,\ x)\right)\equiv 0.$$

Выражение в скобках в этом соотношении тождественно равно нулю, откуда следует тождественное равенство нулю частной производной $\frac{\partial Y(t,\ S)}{\partial t}$. Таким образом, имеет место соотношение $Y(t, s)\equiv Y(S)$.

Осуществим теперь взятое нами преобразование:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial t}+\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X(t,\ x)=\frac{\partial S(t,\ x)}{\partial x}X_{ч}(t,\ x)=Y(t,\ S)=Y(S)=Y(y),$$

откуда и следует справедливость утверждения теоремы.

Лемма 4. *Пусть система* (1) *сводится к системе* (3) *некоторым четным по t преобразованием* (2), *имеющим обратное преобразование. Тогда это преобразование устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями краевых задач*

$$\frac{dx}{dt}=X(t,\ x),\ \ \Phi(x(-\omega),\ x(\omega))=0 \qquad (18)$$

и

$$\frac{dy}{dt}=Y(t,\ y),\ \ \Phi\left(S^{-1}(\omega,\ y(-\omega)),\ S^{-1}(\omega,\ y(\omega))\right)=0. \qquad (19)$$

Доказательство. Взаимно однозначное соответствие между множествами решений устанавливается самим преобразованием (2). Ввиду четности этого преобразования имеет место следующая цепочка равенств:

$\Phi(x(-\omega), x(\omega))=\Phi(S^{-1}(-\omega, y(-\omega))), S^{-1}(\omega, y(\omega))=\Phi(S^{-1}(\omega, y(-\omega))), S^{-1}(\omega, y(\omega))$,

из которой и следует утверждение леммы.

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.

To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm

Теорема 3. *Пусть* 2ω*-периодическая по* t *система* (1) *с общим решением в форме Коши* $x(t)=\varphi(t;\ t_0,\ x_0)$ *сводится четным* 2ω*-периодическим обратимым преобразованием* (2) *к некоторой системе* (3) *с общим решением в форме Коши* $y(t)=\psi(t;\ t_0,\ y_0)$. *Тогда*:

1) *отображения за период* $[-\omega;\ \omega]$ $\Pi_1(x)=\varphi(\omega;\ -\omega,\ x)$ *и* $\Pi_2(y)=\varphi(\omega;\ -\omega,\ y)$ [3, с. 209] *систем* (1) *и* (3) *соответственно связаны между собой соотношениями*

$$\begin{aligned}\Pi_2(y_0) &= S(\omega,\ \Pi_1(S^{-1}(\omega,\ y_0))),\\ \Pi_1(x_0) &= S^{-1}(\omega,\ \Pi_2(S(\omega,\ x_0)));\end{aligned} \tag{20}$$

2) *решение* $y(t)$ *системы* (3), *удовлетворяющее начальному условию* $y(\omega)=y_0$, *является* 2ω*-периодическим тогда и только тогда, когда является* 2ω*-периодическим решение* $x(t)$ *системы* (1), *удовлетворяющее начальному условию* $x(\omega)=x_0=S^{-1}(\omega,\ y_0)$;

3) *при этом характер устойчивости решения* $y(t)$ *совпадает с характером устойчивости решения* $x(t)$.

Доказательство. Из условий теоремы вытекают следующие соотношения:

$$\psi(t;\ t_0,\ y_0)=S(t,\ \varphi(t;\ t_0,\ x_0))=S(t,\ \varphi(t;\ t_0,\ S^{-1}(t_0,\ y_0)));$$

$$\varphi(t;\ t_0,\ x_0)=S^{-1}(t,\ \psi(t;\ t_0,\ y_0))=S^{-1}(t,\ \psi(t;\ t_0,\ S(t_0,\ x_0))).$$

Поэтому имеют место равенства

$$\Pi_2(y_0)=\psi(\omega,\ -\omega,\ y_0)=S(\omega,\ \varphi(\omega,\ -\omega,\ S^{-1}(-\omega,\ y_0)));$$

$$\Pi_1(x_0)=\varphi(\omega,\ -\omega,\ x_0)=S^{-1}(\omega,\ \psi(\omega,\ -\omega,\ S(-\omega,\ x_0))).$$

Учтем четность преобразования $S(t,\ x)$ и придем к соотношениям (20).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Подействуем на второе из соотношений (20) преобразованием $x\to S(\omega,\ x)$. Получим следующее соотношение:

$$S(\omega,\ \Pi_1(x_0))=S\Big(\omega,\ S^{-1}\big(\omega,\ \Pi_2\big(S(\omega,\ x_0)\big)\big)\Big)=\Pi_2(S(\omega,\ x_0)). \tag{21}$$

Пусть $x(t)=\varphi(t;\ \omega,\ x_0)$ – 2ω-периодическое по t решение системы (1). Согласно общему принципу [3, с. 209] в этом случае имеет место равенство $\Pi_1(x_0)=x_0$. Из этого равенства и соотношения (21) получаем соотношения $S(\omega,\ \Pi_1(x_0))=S(\omega,\ x_0)=\Pi_2(S(\omega,\ x_0))$. Это значит, что для $y_0=S(\omega,\ x_0)$ верно равенство $\Pi_2(y_0)=y_0$, из которого, в силу все того же общего принципа следует, что функция $y(t)=\psi(t;\ \omega,\ y_0)$ является 2ω-периодичной по t.

Аналогично покажем, что из 2ω-периодичности функции $y(t)=\psi(t;\ \omega,\ y_0)$ вытекает 2ω-периодичность функции $x(t)=\varphi(t;\ \omega,\ x_0)$.

Сохранение характера устойчивости соответствующих периодических решений следует из непрерывности функций $S(t,\ x)$ и $S^{-1}(t,\ x)$ и формул (20). При этом необходимо учесть, что характер устойчивости периодического решения совпадает с характером устойчивости неподвижной точки соответствующего отображения за период [3, с. 209].

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1985.
2. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.

Поступила в редакцию 18.12.2003.

Владимир Владимирович Мироненко – аспирант кафедры дифференциальных уравнений ГГУ им. Ф. Скорины. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений БГУ А.П. Садовский.

This document has been edited with Infix PDF Editor - free for non-commercial use.
To remove this notice, visit: www.iceni.com/unlock.htm