б) Если постоянная величина c, используемая при доказательстве теоремы, не зависит от μ_1, то на основании неравенства (18) асимптотическая устойчивость вектора $x(t)$ будет экспоненциальной.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - xy^4, \\ \dot{y} = xy^2. \end{cases}$$

Функция $V(x, y)=x^2$ имеет производную по времени $\dot{V}(x, y) = -2x^2(x^2+y^4)$. Поэтому можно указать число $\sigma>0$ такое, что $\dot{V}(x, y) \leq -\sigma V(x, y)$, если только $(x^2+y^4) \geq \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^4)$. В соответствии с доказанным утверждением нулевое решение системы устойчиво, причем оно асимптотически устойчиво по координате x. Отметим, что для данного примера не выполняются требования ни одного из утверждений работ [4, 5].

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.
3. Абаньшин А.М. // Вестник ЛГУ. 1968. № 7. Вып. 2. С. 5.
4. Калитин Б.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1985. № 3. С. 39.
5. Александров Ф.Ю. // Прикл. мат. и мех. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 545.
6. Калитин Б.С. // Выбраныя навуковыя працы Беларускага дзяржаўнага універсітэта: У 7 т. Т. 6. Матэматыка. Мн., 2001. С. 232.

Поступила в редакцию 02.09.2003.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

УДК 517.943

Н.В. СПИЧЕКОВА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПФАФФА, ИМЕЮЩЕГО ТОЛЬКО НЕИЗОЛИРОВАННУЮ НЕЗАМКНУТУЮ ОСОБЕННОСТЬ

The character of integral surfaces of some Pfaff equation, which has only nonclosed nonisolated singularity, is investigated.

Рассматривается вполне интегрируемое уравнение Пфаффа

$$(Au+B(u, u), du)=0, \tag{1}$$

где $u=(x, y, z)$ – вектор из R^3, $(\ldots, \ldots)$ – скалярное произведение в R^3, A – линейный, B – билинейный операторы в R^3.

Пусть уравнение (1) имеет только неизолированные особые точки, заполняющие незамкнутую кривую. Ставится задача исследовать поведение интегральных поверхностей уравнения (1).

Определение 1. Кривую, которая задается уравнением $x=1{,}5y^2/a$, $z=-3y^3/a^2$, $a\in R$, будем называть P-кривой.

Из [1] следует, что справедлива

Лемма 1. Если особая кривая уравнения (1) незамкнута, то выполняется одно из следующих условий (обозначения взяты из [2]):

1) $I=0,\ \varpi(T)=1,\ r=3,\ r_c=8,\ \sigma_c=-2,\ r_3=2,\ \sigma_3=0;$ (2)

2) $I=0,\ \varpi(T)=1,\ r=3,\ r_c=8,\ \sigma_c=-2,\ r_3=0;$ (3)

3) $I=\dfrac{0}{0},\ \varpi(T)=0,\ r=3,\ r_c=4,\ \sigma_c=-2,\ r_3=0;$ (4)

4) $I=\dfrac{0}{0},\ \varpi(T)=0,\ r=2,\ r_c=1,\ \sigma_c=-1,\ r_3=0;$ (5)

5) $I=\dfrac{0}{0},\ \varpi(T)=0,\ r=2,\ r_c=2,\ \sigma_c=0,\ r_3=0;$ (6)

6) $I=0,\ \varpi(T)=-1,\ r=3,\ r_c=8,\ \sigma_c=-2,\ r_3=0;$ (7)

7) $I=\dfrac{0}{0},\ \varpi(T)=0,\ r=2,\ r_c=2,\ \sigma_c=-2,\ r_3=0;$ (8)

8) $I=\dfrac{0}{0},\ \varpi(T)=0,\ r=1,\ r_c=0,\ r_3=0;$ (9)

9) $(B(u,\ u),\ u)\equiv 0.$ (10)

В случаях (2) – (10) (1) может быть приведено к одному из следующих видов [1]:

$$\left(-1{,}5c_1z-3xy\right)dx+\left(6x^2+4{,}5yz\right)dy+\left(c_1x-1{,}5y^2\right)dz=0; \tag{11}$$

$$(a_1y+2\lambda c_1xy)dx+(b_1x+b_2y+\lambda b_3x^2+b_4yz)dy+c_1y^2dz=0, \tag{12}$$

где $b_1c_1-a_1b_3=0,\ b_3+2c_1=3,\ b_4+c_1=3;$

$$aydx+bxdy+6xydz=0; \tag{13}$$

$$(a_1x-2b_1y-2c_1z+\lambda x^2+a_2z^2+xy)dx+(b_1x-x^2)dy+(c_1x-a_2xz)dz=0; \tag{14}$$

$$a_1xydx+(b_1y+b_2z+b_3x^2+\lambda y^2)dy+c_1ydz=0, \tag{15}$$

где $a_1+b_3=3,\ a_1b_2-2b_3c_1=0;$

$$(a_1x+a_2y+a_3z+\lambda x^2+a_4yz)dx+(b_1x+b_2xz)dy+(c_1x+b_2xy)dz=0, \tag{16}$$

где $a_4+2b_2=6,\ a_2b_2-a_4b_1=0,\ a_3b_2-a_4c_1=0;$

$$(a_1x-2b_1y-2c_1z+\lambda x^2+a_2y^2+a_3z^2)dx+(b_1x-a_2xy)dy+(c_1x-a_3xz)dz=0; \tag{17}$$

$$(a_1x+a_2z)dx+3(x^2+z^2)dy+(-a_2x+a_1z)dz=0. \tag{18}$$

В (12), (14), (16), (17) λ=0,1; в (15) λ=0, ±1.

Решения уравнений (11) – (18) приведены в [1].

Теорема 1. Пусть $\Omega_i\in R$, i=1, 2, 3; $z\in\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3$, $f\in C(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)$, причем $f(z)<0$, $z\in\Omega_1$; $f(z)=0$, $z\in\Omega_2$; $f(z)>0$, $z\in\Omega_3$. Если а) $\Omega_1=(z_0;\ +\infty)$, $\Omega_2=\{z_0\}$, $\Omega_3=(0;\ z_0)$ или б) $y>0$ и $\Omega_1=(0;\ +\infty)$, $\Omega_2=\Omega_3=\varnothing$, то поверхность, задаваемая уравнением $x^2-y^2=f(z)$, гомеоморфна плоскости.

Доказательство. Легко видеть, что отображение ψ, которое точке (x, y, z) исходной поверхности ставит в соответствие точку (x', y', z') плоскости а) $z'=0$; б) $y'=0$ такую, что

$$\text{а)}\ (x',\ y',\ z')=\begin{cases}(x,\ \operatorname{sgn}\ (y)\sqrt{x^2+z-z_0},\ \ 0),\ \ z\ge z_0\\ (\operatorname{sgn}\ (x)\sqrt{y^2-z+z_0},\ \ y,0),\ \ z<z_0\end{cases};$$

$$\text{б)}\ (x',\ y',\ z')=(x,\ 0,\ z)$$

инъективно.

Учитывая, что прообразом точки (x', y', z') служит точка (x, y, z):

$$\text{а)}\ (x,\ y,\ z)=\begin{cases}(x',\ \operatorname{sgn}\ (y')\sqrt{x'^2-f(y'^2-x'^2+z_0)},\ \ y'^2-x'^2+z_0),\ \ y'^2\ge x'^2\\ (\operatorname{sgn}\ (x')\sqrt{y'^2+f(y'^2-x'^2+z_0)},\ y',\ y'^2-x'^2+z_0),\ \ y'^2<x'^2\end{cases};$$

б) $(x,\ y,\ z)=(x',\ \sqrt{x'^2-f(z')},\ z')$, получим, что ψ – сюръекция.

Поскольку последовательность точек (x_n, y_n, z_n) исходной поверхности сходится к точке (x_0, y_0, z_0) этой поверхности, а $\psi(x_n, y_n, z_n)\to\psi(x_0, y_0, z_0)$, то отображение ψ непрерывно. Аналогично можно показать, что ψ^{-1} также непрерывно. Значит, ψ – биекция, непрерывная в обе стороны. Теорема доказана.

Легко видеть, что справедлива следующая

Теорема 2. Пусть Ω_1, $\Omega_2\in R$, $f\in C(\Omega_1\times\Omega_2)$. Если Ω_1 и Ω_2 гомеоморфны R, то поверхность, задаваемая уравнением $z=f(x, y)$, $x\in\Omega_1$; $y\in\Omega_2$, гомеоморфна плоскости.

Определение 2. Регулярную область G [3] назовем П-областью (П1-областью), если интегральные поверхности в G гомеоморфны плоскости и не входят (входят) в особую кривую уравнения (1).

Определение 3. Пусть особые точки уравнения (1) заполняют гиперболу. Регулярную область G будем называть П2-областью, если интегральные поверхности в области G гомеоморфны плоскости и входят в одну из ветвей особой гиперболы.

Регулярную поверхность [3] уравнения (1) будем называть квазисингулярной, или кратко – $к_0$-поверхностью, если она задается общим решением, в котором произвольная постоянная равна нулю.

Через l обозначим особую кривую уравнения (1), причем запись l_c и l_y означает, что кривая l является седловой или узловой (в каждую ее точку соответственно входит конечное или бесконечное число интегральных поверхностей).

P-кривая $x=1{,}5y^2/c_1$, $z=-3y^3/c_1^2$ – особая для уравнения (11), решение которого имеет вид: $z=c\left|c_1x-1{,}5y^2\right|^{3/2}+6y^3/c_1^2-6xy/c_1$; $c_1x-1{,}5y^2=0$. При любом c общее решение уравнения (11) задает две интегральные поверхности, каждая из которых входит в особую кривую и (по теореме 2) гомеоморфна плоскости. Значит, l_y.

Особые точки уравнения (12) заполняют прямую $x=0$, $y=0$ (если $\lambda=0$ или $\lambda=1$, $a_1=0$) или две прямые $x=0$, $y=0$ и $x=-a_1/c_1$, $y=0$ (если $\lambda=1$, $a_1\neq0$). Аналогично предыдущему случаю получаем, что при $c_1\in(0; 3/2)$ l_c; при $c_1\notin(0; 3/2)$ l_y.

Прямая $x=0$, $y=0$ – особая для уравнения (13), причем при $ab>0$ l_c; при $ab>0$ l_y.

Особые точки уравнения (14) заполняют одну прямую $x=0$, $z=-b_1y/c_1$ (при $a_2=0$) или две прямые $x=0$, $z=0$ и $x=0$, $z=2c_1/a_2$ (при $a_2\neq0$, $b_1=0$). При любых значениях параметров l_y.

Особая парабола $y=0$, $b_2z+b_3x^2=0$ уравнения (15) является седловой при $b_3\in(0; 3)$ и узловой при $b_3\in(-\infty; 0)\cup(3; +\infty)$.

Если в уравнениях (11) – (15) l_c, то в особую кривую входят только k_0-поверхности. Регулярные области – это П-области. Если l_y, то все интегральные поверхности гомеоморфны плоскости и входят в l.

Если $a_4\neq0$ и уравнение $\lambda x^2+a_1x-a_2a_3/a_4=0$ не имеет ненулевых корней, то уравнение (16) имеет только неизолированные особые точки, заполняющие кривую $x=0$, $(y+z+(a_2+a_3)/a_4)^2-(z-y+(a_2-a_3)/a_4)^2=4a_2a_3/a_4^2$.

Пусть $\lambda=1$, $0<a_4<6$, $a_1^2+4a_2a_3/a_4<0$. Решение уравнения (16) имеет вид: $(y+z+(a_2+a_3)/a_4)^2-(z-y+(a_2-a_3)/a_4)^2=h(x, c)$, $x=0$, где $h(x, c)=s_1(x, c)-s_2(x)$, причем $s_1(x, c)=c|x|^{-a_4/b_2}$, $s_2(x)=2x^2/3+8a_1x/(a_4+6)-4a_2a_3/a_4^2$. Так как $s_1(x, c)\to 0$ при $x\to\pm\infty$, $s_1(x, c)\to\infty$ при $x\to 0$, то для каждого $c>0$ уравнение $h(x, c)=0$ имеет два корня разных знаков. Очевидно, $h(x, c)<0$ при любом x, если $c\le 0$. Используя теорему 1, получим, что в каждую ветвь особой гиперболы входит две k_0-поверхности, гомеоморфные плоскости и расположенные в различных подпространствах относительно плоскости $x=0$. Каждое из указанных подпространств распадается на три П-области. Значит, в данном случае l_c.

Аналогично получаем, что при $\lambda=0$, $a_4\in(0; 6)$, $a_1=0$, $a_2a_3\neq 0$ поведение интегральных поверхностей эквивалентно предыдущему случаю.

При $\lambda=1$, $a_4>6$, $a_1^2+4a_2a_3/a_4<0$ или $\lambda=0$, $a_1=0$, $a_2a_3\neq 0$, $a_4\in(-\infty; 0)\cup(6; +\infty)$ l_y. Каждое из подпространств, на которые плоскость $x=0$ делит R^3, двумя k_0-поверхностями (их поведение аналогично предыдущему случаю) разбивается на П1- и две П2-области.

При $\lambda=1$, $a_4<0$, $a_1^2+4a_2a_3/a_4<0$ l_y. Плоскость $x=0$ разделяет две П1-области.

Будем говорить, что особая точка (x, y, z) уравнения (16) принадлежит множеству l_1, l_2, l_3 или l_4, если соответственно $y\ge 0$, $y\le 0$, $z\ge 0$, $z\le 0$.

Если $\lambda=a_2a_3=0$, $a_1\neq 0$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $a_2=a_3=0$. При $a_4\notin[0; 6]$ l_y, при $a_4\in(0; 6)$ l_c.

При $a_4=-6$ плоскость $x=0$ разделяет две П1-области.

При $a_4\in(0; 6)$ плоскость $x=0$ разделяет R^3 на два подпространства, каждое из которых двумя k_0-поверхностями, гомеоморфными плоскости, разбивается на три П-области. В одном подпространстве одна k_0-поверхность входит в l_1 и l_3, вторая – в l_2 и l_4. Во втором подпространстве одна k_0-поверхность входит в l_1 и l_4, вторая – в l_2 и l_3.

При $a_4\notin[0; 6]$ и $a_4\neq -6$ поведение k_0-поверхностей эквивалентно предыдущему случаю. Плоскость $x=0$ разделяет R^3 на два подпространства, каждое из которых двумя k_0-поверхностями разбивается на три регулярные области, одна из которых П1-область. В одном из этих подпространств бесконечно много интегральных поверхностей, гомеоморфных плоскости, входят в l_1 и l_3 или в l_2 и l_4. Во втором подпространстве бесконечно много интегральных поверхностей, также гомеоморфных плоскости, входят в l_1 и l_4 или в l_2 и l_3.

Уравнение (17) имеет только неизолированные особые точки, заполняющие незамкнутую кривую $x=0$, $a_2y^2+a_3z^2-2b_1y-2c_1z=0$, если выполняется одно из следующих условий: 1) $a_1^2+4b_1^2/a_2+4c_1^2/a_3<0$, $\lambda=1$, $a_2a_3<0$; 2) $\lambda=0$, $a_1=0$, $a_2a_3<0$, $b_1^2/a_2+c_1^2/a_3\neq 0$; 3) $\lambda=0$, $a_2a_3<0$, $a_1\neq 0$, $b_1^2/a_2+c_1^2/a_3=0$; 4) $a_2=0$, $a_3b_1\neq 0$ или $a_3=0$, $a_2c_1\neq 0$. Поведение интегральных поверхностей уравнения (17) в случаях 1) – 3) эквивалентно поведению интегральных поверхностей уравнения (16), в котором соответственно 1′) $\lambda=1$, $a_4<0$, $a_1^2+4a_2a_3/a_4<0$; 2′) $\lambda=1$, $a_1^2+4a_2a_3/a_4<0$, $a_4>6$; 3′) $\lambda=a_2a_3=0$, $a_4<-6$. Используя теорему 2, легко видеть, что в случае 4) l_y. Плоскость $x=0$ разделяет две П1-области.

Прямая $x=z=0$ является особой для уравнения (18), решение которого имеет вид: $3y-a_2\,\mathrm{arctg}(z/x)+0{,}5a_1\ln(x^2+z^2)=c$; $x=z=0$. При $a_2\neq 0$ в особую прямую входят все интегральные поверхности. Используя теорему 2 и учитывая, что если в (18) $y=\mathrm{const}$, то начало координат – особая точка типа фокус, получим, что интегральные поверхности гомеоморфны плоскости и «накручиваются» на особую прямую, бесконечно приближаясь к ней. При $a_2=0$

интегральные поверхности не входят ни в одну из особых точек, симметричны относительно оси Oy и гомеоморфны эллиптическому цилиндру.

Из [1] и всего вышесказанного вытекает следующая

Теорема 3. Особыми кривыми уравнения (1) могут быть только 1) P-кривая (в случае (4)); 2) прямая (в случаях (3) – (5), (7)); 3) две параллельные прямые (в случае (4)); 4) две пересекающиеся прямые (в случаях (3) и (10)); 5) гипербола (в случаях (2), (3), (9), (10)); 6) парабола (в случаях (5), (6), (8) – (10)). При выполнении условий (2) – (6), (8) особая кривая седловая или узловая; при выполнении условий (7), (9), (10) особая кривая узловая.

1. Кожеро М.В., Спичекова Н.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 2. С. 95.

2. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М., 1960.

3. Спичекова Н.В. // Еругинские чтения-IX: Тез. междунар. мат. конф. Витебск, 2003. С. 86.

Поступила в редакцию 18.09.2003.

Наталья Викторовна Спичекова – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений М.В. Кожеро.

УДК 517.926

В.В. МИРОНЕНКО

ЧЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Necessary and sufficient conditions at which differential systems are reduced to each other by even transformation are established. Such systems are named equivalent. Conditions of equivalence of the set system to stationary system are specified. The received results are used for studying questions of existence and stability of periodic solutions of periodic differential systems.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \ t\in R, \ x\in D\subset R^n. \tag{1}$$

С помощью четного по t дифференцируемого преобразования вида

$$y = S(t,x), \ S: R\times D\to R\times G \tag{2}$$

получим новую дифференциальную систему

$$\frac{dy}{dt} = Y(t,y), \ t\in R, \ x\in G\subset R. \tag{3}$$

Множество всех четных по времени дифференцируемых преобразований дифференциальной системы (1) вида (2) образует группу.

Далее отдельно будем рассматривать случай, когда система (3) стационарна, т. е. имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = Y(y). \tag{4}$$

Для любой функции $P(t, x)$ положим по определению

$$P_ч(t,\ x) = \frac{P(t,\ x)+P(-t,\ x)}{2}, \quad P_н(t,\ x) = \frac{P(t,\ x)-P(-t,\ x)}{2}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть существует четное по t преобразование $z=S_1(t, x)$, сводящее систему* (1) *к некоторой стационарной системе. Тогда существует*