УДК 519.2

ФУ ЛИ (КНР)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

On the base of previous work, we studied the conditions of asymptotic normality of finite dimensional distributions about the error of estimation of pulse transfer function in the continuous function space.

Пусть задана физически осуществимая однородная линейная система с импульсной переходной функцией $H(\tau)$, $\tau\in R=(-\infty,\infty)$. Это значит, что действительнозначная функция H удовлетворяет условию $H(\tau)=0$, $\tau<0$, а реакция системы на допустимый входной сигнал $x(t)$, $t\in R$, имеет вид

$$y(t)=\int_0^\infty H(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^t H(t-s)x(s)ds.$$

Одной из задач теории линейных систем является задача оценивания, или идентификации, функции H, если явный вид ее неизвестен, по наблюдению за реакцией системы на некоторый сигнал.

В работе [1] исследуется асимптотическое поведение оценки импульсной переходной функции. Нами изучаются условия асимптотической нормальности конечномерных распределений погрешности оценки импульсной переходной функции в пространстве непрерывных функций на основе работы [1].

1. Предварительные сведения. Пусть $f_\Delta=(f_\Delta(x),\ x\in R)$, $\Delta\in(0,\infty)$, – семейство действительнозначных неотрицательных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f_\Delta(x)=f_\Delta(-x)$, $x\in R$;

б) $f_\Delta\in L_1(R)$;

в) $f_\Delta\in L_\infty(R)$ и $M=\sup\limits_\Delta\|f_\Delta\|_\infty<\infty$, где $L_\infty(R)$ – пространство ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in R}|f(x)|; \tag{1}$$

г) для всех $x\in R$, $\lim\limits_{\Delta\to\infty}f_\Delta(x)=\dfrac{c}{2\pi}$, $c\in(0,\infty)$, и, более того, для любого $a\in(0,\infty)$, $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\sup\limits_{-a\le x\le a}\left|f_\Delta(x)-\dfrac{c}{2\pi}\right|=0$;

д) $B_\Delta\in L_1(R)$, где $B_\Delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f_\Delta(x)dx,\ t\in R.$

Пусть $X_\Delta=(X_\Delta(t),\ t\in R)$ – измеримый стационарный центрированный гауссовский процесс со спектральной плотностью f_Δ и соответственно корреляционной функцией B_Δ. Процессы X_Δ, $\Delta>0$, будут служить процессами, возмущающими линейную систему.

Рассмотрим случайный процесс $Y_\Delta(t)=\int_0^\infty H(s)X(t-s)ds$, $t\in R$, являющийся откликом системы на входной процесс X_Δ.

Пусть $\tau \geq 0$. В качестве оценки для $H(\tau)$ рассмотрим случайную величину

$$\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) = (cT)^{-1} \int_0^T X_\Delta(t) Y_\Delta(t+\tau) dt.$$

Среднее значение оценки $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$ имеет вид

$$E\left\{\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)\right\} = c^{-1} \int_0^\infty B_\Delta(\tau - s) H(s) ds.$$

Пусть погрешность

$$W_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\left[\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)\right] = Z_{T,\Delta}(\tau) + V_{T,\Delta}(\tau),$$

где

$$Z_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\left[\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - E\left\{\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)\right\}\right],$$

$$V_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\left[E\left\{\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)\right\} - H(\tau)\right].$$

Пусть $Z=(Z(\tau), \tau \geq 0)$ – центрированный гауссовский процесс с корреляционной функцией $C(\tau_1, \tau_2)$, где

$$C(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i(\tau_2 - \tau_1)u} \left| H^*(u) \right|^2 + e^{i(\tau_1 + \tau_2)u} \left(H^*(u) \right)^2 \right] du, \qquad (2)$$

функция H^* – преобразование Фурье функции H.

Пусть $a>0$; $C[0, a]$ – банахово пространство непрерывных действительнозначных функций, заданных на интервале $[0, a]$ с равномерной нормой. В дальнейшем запись $Z_{T,\Delta} \overset{C[0,\,a]}{\Rightarrow} Z$ обозначает слабую сходимость процесса $Z_{T,\Delta}$ при $\Delta \to \infty$, $T \to \infty$ к процессу Z в пространстве непрерывных функций, т. е. для любого $C[0, a]$ – непрерывного действительнозначного функционала G – распределение случайной величины $G(Z_{T,\Delta})$ слабо сходится к распределению случайной величины $G(Z)$. При этом считаем, что

$$W_{T,\Delta} = \left(W_{T,\Delta}(\tau),\ \tau \in [0, a]\right),$$

$$Z_{T,\Delta} = \left(Z_{T,\Delta}(\tau),\ \tau \in [0, a]\right),$$

$$Z = \left(Z(\tau),\ \tau \in [0, a]\right),$$

и эти процессы являются сепарабельными. Такое предположение не является ограничительным в силу стохастической непрерывности указанных процессов.

2. Слабая сходимость процессов $Z_{T,\Delta}$ и $W_{T,\Delta}$ в пространстве непрерывных функций. Пусть $S \subseteq R$ и $\rho(t, s)$, $t, s \in S$, – некоторая псевдометрика удовлетворяет всем условиям метрики, за исключением того, что множество нулей $\{(t, s) \in S \times S : \rho(t, s)=0\}$ возможно шире диагонали $\{(t, s) \in S \times S : t=s\}$. Как обычно, $N_\rho(S, \varepsilon)$ – наименьшее число открытых ρ-шаров радиуса $\varepsilon>0$, центры которых лежат в S, покрывающих множество S, $H_\rho(S, \varepsilon)=\ln N_\rho(S, \varepsilon)$ – энтропия множества S относительно псевдометрики ρ. Условимся, что выражение $\int_{0^+} H_\rho(S, \varepsilon) d\varepsilon < \infty$ означает следующее: существует такое число $b>0$, что $\int_0^b H_\rho(S, \varepsilon) d\varepsilon < \infty$.

Рассмотрим функцию

$$\sigma(\tau) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\tau u}{2} \left| H^*(u) \right|^2 du \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $H^* \in L_2(R)$, то эта функция определена и задает псевдометрики

$$\sigma(\tau_1, \tau_2) = \sigma(|\tau_1 - \tau_2|); \qquad \sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{\sigma(\tau_1, \tau_2)}, \quad \tau_1, \tau_2 \geq 0.$$

Заметим, что если $H^*(u) \neq 0$ на множестве положительной лебеговой меры, то σ и $\sqrt{\sigma}$ являются метриками. Положим

$$H_\sigma(\varepsilon) = H_\sigma([0,\ 1],\ \varepsilon);\ H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) = H_{\sqrt{\sigma}}([0,\ 1],\ \varepsilon).$$

Поскольку псевдометрики зависят лишь от $|\tau_1 - \tau_2|$, то для любого $a>0$

$$\int_{0^+} H_\sigma(\varepsilon) d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_{0^+} H_\sigma([0,\ a],\ \varepsilon) d\varepsilon < \infty;$$

$$\int_{0^+} H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty \Leftrightarrow \int_{0^+} H_{\sqrt{\sigma}}([0,\ a],\ \varepsilon) d\varepsilon < \infty.$$

Кроме того, поскольку для всех $\tau_1,\ \tau_2 \geq 0$

$$\sigma(\tau_1,\ \tau_2) \leq \left[\max_{\tau_1,\ \tau_2 \geq 0} \sigma(\tau_1,\ \tau_2) \right]^{1/2} \sqrt{\sigma}(\tau_1,\ \tau_2) \leq \left\| H^* \right\|_2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sigma}(\tau_1,\ \tau_2),$$

то $\int_{0^+} H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty$, влечет $\int_{0^+} H_\sigma(\varepsilon) d\varepsilon < \infty$, что влечет $\int_{0^+} H_\sigma^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) d\varepsilon < \infty$. (3)

Пусть $\rho_\alpha(\tau_1,\ \tau_2) = \rho_{T,\Delta}(\tau_1,\ \tau_2) = \left[E\left\{ \left| Z_{T,\Delta}(\tau_2) - Z_{T,\Delta}(\tau_1) \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$,

где $\alpha = (T,\ \Delta)$. Тогда ρ_α – семейство псевдометрик при $T>0$, $\Delta>0$.

Лемма 1. Пусть $H \in L_2(R)$. Тогда для всех $\tau_1,\ \tau_2 \geq 0$, $T>0$, $\Delta>0$ имеет место неравенство

$$\rho_{T,\Delta}(\tau_1, \tau_2) \leq \frac{4M\sqrt{\pi}}{c} \left\| H^* \right\|_2^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}}(\tau_1, \tau_2) = \frac{4M\sqrt{\pi}}{c} \left\| H^* \right\|_2^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}}(|\tau_2 - \tau_1|). \quad (4)$$

Кроме того, псевдометрика $\rho_{T,\Delta}$ непрерывна относительно псевдометрики σ.

Доказательство. Из работы [1], неравенства Коши – Буняковского и неравенства для нормы свертки двух функций (см., например, [2, с. 72]) при $l=2$, $p=2$, $q=1$ следует, что

$$E\left\{ \left| Z_{T,\Delta}(\tau_2) - Z_{T,\Delta}(\tau_1) \right|^2 \right\} \leq \frac{8\pi M^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin \frac{(\tau_2 - \tau_1)u}{2} \right| \left| H^*(u) \right|^2 du +$$

$$+ \frac{8\pi M^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin \frac{(\tau_2 - \tau_1)u_1}{2} \right| \left| H^*(u_1) \right| \left| H^*(u_2) \right| \Phi_T(u_2 - u_1) du_1 du_2 \leq$$

$$\leq \frac{8\pi M^2}{c^2} \left\| H^* \right\|_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin^2 \frac{(\tau_2 - \tau_1)u}{2} \right| \left| H^*(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{8\pi M^2}{c^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin^2 \frac{(\tau_2 - \tau_1)u}{2} \right| \left| H^*(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \Phi_T * \left| H^* \right| \right\|_2 \leq$$

$$\leq \frac{16\pi M^2}{c^2} \left\| H^* \right\|_2 \sigma(\tau_1, \tau_2).$$

Отсюда вытекает $\left[E\left\{\left|Z_{T,\Delta}(\tau_2)-Z_{T,\Delta}(\tau_1)\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{4\sqrt{\pi}M}{c}\left\|H^*\right\|_2^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{1}{2}}(\tau_1,\tau_2).$

Теорема 1. Пусть 1) $H\in L_2(R)$, 2) $H^*\in L_1(R)\cap L_\infty(R)$, 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R. Тогда, если дополнительно

$$\int\limits_{0^+} H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon)d\varepsilon < \infty, \tag{5}$$

то для любого $a>0$: I) $Z\in C[0,\ a]$ п. н.; II) $Z_{T,\ \Delta}\in C[0,\ a]$ п. н., $T>0$, $\Delta>0$; III) $Z_{T,\Delta} \overset{C[0,a]}{\underset{T,\Delta\to\infty}{\Rightarrow}} Z.$

Доказательство. Согласно теореме Дадли (см., например, [3]) о непрерывности гауссовских процессов утверждение I) теоремы 1 имеет место, если для любого $a>0$

$$\int\limits_{0^+} H_{d_Z}^{\frac{1}{2}}([0,a],\varepsilon)d\varepsilon < \infty, \tag{6}$$

где $d_Z(\tau_1,\ \tau_2)=[E\{|Z(\tau_2)-Z(\tau_1)|^2\}]^{\frac{1}{2}}$. В силу соотношения (2) для любых τ_1, $\tau_2\ge 0$

$$d_Z^2(\tau_1,\ \tau_2) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[4\left|\sin\frac{(\tau_2-\tau_1)u}{2}\right|\left|H^*(u)\right|^2 + 4\left|\sin\frac{(\tau_2-\tau_1)u}{2}\right|\left|H^*(u)\right|^2\right]du \le$$

$$\le \frac{4}{\pi}\left\|H^*\right\|_2\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\sin^2\frac{(\tau_2-\tau_1)u}{2}\right|\left|H^*(u)\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{4}{\pi}\left\|H^*\right\|_2\sigma(\tau_1,\tau_2).$$

Следовательно, (6) имеет место, если $\int\limits_{0^+} H_{\sqrt{\sigma}}^{\frac{1}{2}}(\varepsilon)d\varepsilon < \infty$. Согласно (3) последнее соотношение вытекает из условия (5). Из теоремы Лебега о мажорированной сходимости вытекает, что псевдометрика $\sqrt{\sigma}$ непрерывна относительно метрики $d(\tau_1,\ \tau_2)=|\tau_1,\ -\tau_2|$.

Из работы [4] следует, что

$$\sup_{T,\ \Delta>0}\ \sup_{\tau_1,\ \tau_2\in[0,\ a]} E\left\{\exp\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\left|Z_{T,\Delta}(\tau_2)-Z_{T,\Delta}(\tau_1)\right|}{\rho_{T,\Delta}(\tau_1,\ \tau_2)}\right)\right\} < \infty. \tag{7}$$

Применяя неравенство (4), видим, что псевдометрика $\rho_\infty(\tau_1,\ \tau_2)= = \sup\limits_{T,\ \Delta>0}\rho_{T,\Delta}(\tau_1,\ \tau_2)$ также непрерывна относительно метрики d.

Из условия (5) и неравенства (4) следует, что

$$\lim_{u\downarrow 0}\ \sup_{T,\ \Delta>0}\int\limits_0^u H_{\rho_{T,\Delta}}([0,\ a],\ \varepsilon)d\varepsilon = 0. \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) показывают, что выполнено утверждение II) теоремы 1 и, кроме того, (см., например, [5])

$$\lim_{h\to 0}\ \sup_{T,\ \Delta>0} P\left\{\sup_{\substack{\tau_1,\ \tau_2\in[0,\ a]\\ |\tau_1-\tau_2|<h}}\left|Z_{T,\Delta}(\tau_2)-Z_{T,\Delta}(\tau_1)\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{9}$$

Далее, по теореме 1 работы [1] и из условий 1) – 3) теоремы 1 следует, что все конечномерные распределения процесса $Z_{T,\Delta}$ сходятся при T, $\Delta\to\infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса Z. С учетом соотношения (9) из теоремы Прохорова о слабой сходимости случайных процессов в пространстве непрерывных функций вытекает утверждение III).

Теорема 2. Пусть 1) $H\in L_2(R)$, 2) существует такое $p>2$, что $H^*\in L_{2p}(R)$, 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R, 4) $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что для любого $m\geq 3$, $T^{(m-2)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|f_\Delta\|_2^{a(m)}\|f_\Delta\|_p^{b(m)}\to 0$, где

$$a(m)=\begin{cases}1, \text{ если } m\geq 4,\\ 0, \text{ если } m=3,\end{cases}\qquad b(m)=\begin{cases}\operatorname{ent}(\frac{m}{2})-1, \text{ если } m\geq 4,\\ 1, \text{ если } m=3.\end{cases}$$

Тогда, если дополнительно выполняется условие (5), то утверждения I) – III) теоремы 1 имеют место.

Доказательство в целом повторяет доказательство теоремы 1. Отличие состоит в том, что в данном случае вместо теоремы 1 работы [1] нужно воспользоваться теоремой 2 [1] .

Определение 1. Пусть $\alpha\in[0, 1]$. Скажем, что функция H равномерно на $[0, \infty)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, если найдутся такие числа $\varepsilon>0$, $A>0$, что

$$\sup_{\substack{\tau,\, s\in[0,\,\infty)\\ |\tau-s|<\varepsilon}}|H(\tau)-H(s)|\leq A\varepsilon^\alpha. \tag{10}$$

Из соотношения (2) вытекает следующее соотношение (см., например, [1]):

$$V_{T,\Delta}(\tau)=\frac{\sqrt{T}}{c}\int_{-\infty}^{\infty}B_\Delta(s)[H(\tau-s)-H(\tau)]\,ds+\sqrt{T}\left(\frac{2\pi f_\Delta(0)}{c}-1\right)H(\tau).$$

Заметим, что если функция H равномерно непрерывна на $[0, \infty)$, то для любых $a>0$, $T>0$, $\Delta>0$, $V_{T,\Delta}\in C[0, a]$.

Пусть функции f_Δ, B_Δ, $\Delta>0$, и константа c определены в условиях (1) и $\alpha\in(0, 1]$. Рассмотрим условия: $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что:

$$\text{а) } \sqrt{T}\left(1-\frac{2\pi f_\Delta(0)}{c}\right),\ \text{б) для любого } \varepsilon>0,\ \sqrt{T}\left|\int_\varepsilon^\infty B_\Delta(t)dt\right|\to 0, \tag{11}$$

в) для любого $\varepsilon>0$, $T\int_\varepsilon^\infty B_\Delta^2(t)dt\to 0$, г) существует такое $\varepsilon>0$, что $\sqrt{T}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|B_\Delta(t)||t|^\alpha\,dt\,|\to 0$.

Лемма 2. Пусть $H\in L_2(R)$ и выполнено условие (10). Тогда, если дополнительно к условиям (1) $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что выполняются условия (11), то $\sup_{\tau\in[0,\,a]}|V_{T,\Delta}(\tau)|\to 0$.

Доказательство стандартно и поэтому опускается (см., например, [1]).

В соответствии с теоремами 1, 2 установим следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть для некоторого $\alpha\in(0, 1]$ выполнено условие (10) и, кроме того, выполнены условия: 1) $H\in L_2(R)$, 2) $H^*\in L_1(R)\cap L_\infty(R)$, 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R, 4) $\int_{0+}H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon)d\varepsilon<\infty$. Тогда, если $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$

так, что выполняются условия (11), то для любого $a>0$: I) $Z\in C[0, a]$ п. н.; II) $W_{T,\Delta}\in C[0, a]$ п. н., $T>0$, $\Delta>0$; III) $W_{T,\Delta} \overset{C[0,a]}{\Rightarrow} Z$, в частности, для любого $\varepsilon>0$

$$P\left\{\sqrt{T}\sup_{\tau\in[0,a]}\left|\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)-H(\tau)\right|>\varepsilon\right\}\to P\left\{\sup_{\tau\in[0,a]}\left|Z(\tau)\right|>\varepsilon\right\}.$$

Доказательство. Теорема 3 непосредственно следует из теоремы 1, леммы 2 и свойств сходимости случайных процессов (см., например, [6]).

Теорема 4. Пусть для некоторого $\alpha\in(0, 1]$ выполнено условие (10) и, кроме того, выполнены условия: 1) $H\in L_2(R)$, 2) существует такое $p>2$, что $H^*\in L_{2p}(R)$, 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R, 4) $\int\limits_{0+} H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon)d\varepsilon<\infty$. Тогда, если $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что выполняются условия (11) и для любого $m\geq 3$ $T^{(m-2)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\left\|f_\Delta\right\|_2^{a(m)}\left\|f_\Delta\right\|_p^{b(m)}\to 0$, где

$$a(m)=\begin{cases}1, \; если \geq 4,\\ 0, \; если \;\; m=3,\end{cases}\qquad b(m)=\begin{cases}\mathrm{ent}(\frac{m}{2})-1, \; если \;\; m\geq 4,\\ 1, \; если \;\; m=3,\end{cases}$$

то для любого $a>0$: I) $Z\in C[0, a]$ п. н.; II) $W_{T,\Delta}\in C[0, a]$ п. н., $T>0$, $\Delta>0$; III) $W_{T,\Delta} \overset{C[0,a]}{\Rightarrow} Z$, в частности, для любого $\varepsilon>0$

$$P\left\{\sqrt{T}\sup_{\tau\in[0,a]}\left|\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)-H(\tau)\right|>\varepsilon\right\}\to P\left\{\sup_{\tau\in[0,a]}\left|Z(\tau)\right|>\varepsilon\right\}.$$

Доказательство. Теорема 4 непосредственно следует из теоремы 2, леммы 2 и свойств сходимости случайных процессов (см., например, [6]).

1. Булдыгин В.В., Фу Ли // Доп. НАА Украины. 1995. № 8. С. 24.
2. Эдвардс Р. // Ряды Фурье в современном изложении: В 2 т. Мн., 1985. Т. 1.
3. Dadley R. // Sample functions of the Gaussian process. Annals of Probability. 1973. Vol. 1. № 1. P. 66.
4. Козаченко Ю.В., Стадник А.И. // О сходимости функционалов от гауссовских векторов в пространствах орлича: Теор. вер. и мат. статистика. 1991. Вып. 44. С. 80.
5. Byldygin V.V. // Semi-Invariant Condition of Weak Convergence of Random processes in the Space of Continuous Function. New Tends in Probability and Statistics. Vilnius; Utrecht, 1991. P. 78.
6. Билингсли П. // Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

Поступила в редакцию 16.12.2003.

Фу Ли – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Пекинского университета транспорта.

УДК 517.925

Б.С. КАЛИТИН

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОЛИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

The sufficient stability conditions of the zero solution are obtained, in a case when the system of the ordinary differential equations has the set of equilibrium states.

Пусть задана система дифференциальных уравнений