финальной в A областью значений $\psi(\Gamma)$. Направленность $\{t_\gamma = \mathrm{pr}_T\, \gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ является поднаправленностью направленности $\{t_\alpha\}_{\alpha\in A}$, поскольку $t_\gamma = t_{\psi(\gamma)}$ при $\forall\gamma\in\Gamma$ [7, с.94]. Поэтому для $\forall\gamma\in\Gamma$ однозначно определено разложение $t_\gamma = \omega_{\psi(\gamma)} + \tau_\gamma$, где $\omega_{\psi(\gamma)}\in\Omega$, $\tau_\gamma = \tau_{\psi(\gamma)}\in\tau_0 + K$. По тем же соображениям направленность $\{\omega_{\psi(\gamma)}\}_{\gamma\in\Gamma}$ является поднаправленностью направленности $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и, в силу (1), $\lim\limits_{\gamma\in\Gamma} f(\omega_{\psi(\gamma)}, x) = \lim\limits_{\alpha\in A} f(\omega_\alpha, x) = p$.

По построению ультрафильтр $\mathcal{U}$, в силу [1, предложение 3], ассоциирован с направленностью $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Следовательно,

$$\lim_{\gamma\in\Gamma} g(\tau_\gamma, y) = \lim_{\gamma\in\Gamma} g(t_\gamma, y) = \lim_{\mathcal{U}} g(t, y) = g(\tau_0, y). \tag{2}$$

Направленность $\{\tau_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ лежит в компакте $\tau_0 + K$ и, следовательно, имеет в нем предельные точки. Пусть τ – одна из них. Тогда, в силу (2) и непрерывности g, $g(\tau, y) = g(\tau_0, y)$. Отсюда $\tau - \tau_0 \in \Omega$. Но $\tau - \tau_0 = \sum_{i=1}^{r} \xi^i \omega_i$, где $-\frac{1}{2} < \xi^i \le \frac{1}{2}$, $i = \overline{1,r}$. Поскольку $\omega_1, \ldots, \omega_r$ – образующие дискретной подгруппы Ω, то все $\xi^i = 0$, т. е. $\tau = \tau_0$. Таким образом, направленность $\{\tau_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ сходится к точке τ_0 [4, с.126].

Учитывая теперь вышесказанное, а также непрерывность отображения f, получим, что

$$\lim_{\mathcal{U}} f(t, x) = \lim_{\gamma\in\Gamma} f(\omega_{\psi(\gamma)} + \tau_\gamma, x) = \lim_{\gamma\in\Gamma} f(\tau_\gamma, f(\omega_{\psi(\gamma)}, x)) =$$

$$= f\left(\lim_{\gamma\in\Gamma} \tau_\gamma, \lim_{\gamma\in\Gamma} f(\omega_{\psi(\gamma)}, x)\right) = f(\tau_0, p) \in X$$

и, таким образом, в силу [1, предложение 2], $\mathfrak{m}_y(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{m}_x(\mathcal{F})$. Теорема доказана.

1 Амелькин В.В., Малевич А.Э. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1999. № 2. С. 42
2 Щербаков Б.А. // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 7.
3 Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М. 1969.
4 Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М. 1968.
5 Щербаков Б.А., Чебан Д.Н. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5.
6 Келли Дж.Л. Общая топология. М. 1981.
7 Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М. 1979.

Поступила в редакцию 06.04.98.

УДК 33:517.925

Б.С.КАЛИТИН

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА ТИПА «ЭФФЕКТИВНАЯ КОНКУРЕНЦИЯ» С ПОДСИСТЕМОЙ ОБЪЕМОВ ПРОДАЖ

Mathematical model of «effective competition» market with sales volume subsystem is build and equilibrium stability is analyzed.

Введенная в [1] математическая модель рынка типа «эффективная конкуренция» не включает в себя информацию о динамике объемов продаж. Целью данной статьи является построение модели такого рынка с учетом изменения количества реализуемого товара в зависимости от вектора цен на рынке и объемов потребляемых товаров во времени. В приведенной общей модели экономики исследуется устойчивость равновесных цен и равновесных объемов продаж.

Расширим модель рынка взаимозаменяющих товаров [1], введя в нее дифференциальные уравнения, описывающие изменение объемов продаж товаров-конкурентов $q_j=q_j(t)$, $j=\overline{1,n}$. Напомним, что объемы продаж товаров есть результат их потребления, а оно, в свою очередь, зависит от следующих факторов [2]:

1) цена; 2) предшествующий объем продаж; 3) тип товара (взаимозаменяющие и взаимодополняющие товары, товары повседневного спроса и товары длительного пользования; нормальные товары и товары Гриффена и т.п.); 4) полезность; 5) изменение вкусов; 6) эффект дохода; 7) эффект замещения; 8) изменение ожиданий и др. С учетом этого для создания модели можно, как и в [1], определить силы, воздействующие на скорости $\dot{q}_j$. Не имея цели построить всеобъемлющую модель, выделим лишь две силы, кажущиеся наиболее существенными. К ним отнесем те из них, которые порождены соответственно отклонением цен p_j и отклонением объемов продаж q_j от своих равновесных значений $p_j = p_j^0$, $q_j = q_j^0$, $j=\overline{1,n}$. Учет других факторов из перечисленных в 1) – 8) можно осуществить на основании высказанного в [1] принципа независимости действия сил. Предлагаемая ниже модель экономики в большей степени относится к рынку взаимозаменяющих товаров повседневного спроса. Приступим к описанию отмеченных сил.

Под **силами отклонения цен** будем понимать эффект влияния отклонения цен от своих равновесных значений на объемы продаж. Для взаимозаменяющих товаров рост цены одного из них приводит к росту спроса на другой [2]. Поэтому если выразить значение силы отклонения j-ой цены через функцию $\Pi_j(p,p^0)$, $j=\overline{1,n}$ $(p=(p_1,p_2,\dots,p_n))$, то такая функция должна подчиняться следующим условиям:

$$\Pi_j(p^0,p^0)=0, \quad \frac{\partial \Pi_j(p^0,p^0)}{\partial p_i} > 0 \text{ для } i \neq j \text{ и } \frac{\partial \Pi_j(p^0,p^0)}{\partial p_j} < 0 .$$

Первое из соотношений отвечает равновесию в системе. В простейшем случае этим условиям удовлетворяют функции $\Pi_j(p,p^0)= -\sum_{i=1}^{n} g_{ji}((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0))$, $j=\overline{1,n}$, где постоянные $g_{ji}>0$ и $g_{ji}=g_{ij}$. Здесь последние равенства отражают равнозначность взаимного влияния конкурентов друг на друга. А поэтому матрица коэффициентов сил отклонения цен $G=(g_{ji})$ симметрична.

Под **силами отклонения объемов продаж** некоторого товара будем понимать эффект влияния отклонения величин объемов продаж товаров-конкурентов от равновесных значений на само значение объемов продаж данного товара. Отметим, что в экономике наблюдается явление обратной зависимости объемов продаж товара от его реализации в последующем. Это может происходить, во-первых, по причине удовлетворения товаром впрок, а во-вторых – по принципу убывания предельной полезности и связано с влиянием факторов 3) – 5), 7), 8). Для удобства все эти причины объединим в одну и назовем ее **эффектом насыщения**. Выразим значение такого эффекта для произвольного j-го товара в виде функции $M_j(q,q^0)$. С учетом отмеченной экономической закономерности она должна удовлетворять следующим условиям:

$$M_j(q^0,q^0)=0, \quad \frac{\partial M_j(q^0,q^0)}{\partial q_i}<0 \ \forall i, \quad j=\overline{1,n},$$

где первое равенство соответствует равновесию в системе. В случае, когда функция M_j линейна, можно положить $M_j(q^0,q^0)=-\sum_{i=1}^{n} m_{ji}(q_i-q_i^0)$, $m_{ji}>0$, $j=\overline{1,n}$.

Исходя из экономических соображений, выскажем ряд гипотез относительно матрицы $M=(m_{ji})$.

1. Эффект насыщения должен быть однородным для всех партнеров по рынку в силу его специфики (тип «эффективная конкуренция»). Это обстоятельство создает необходимость выполнения равенств

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ji}=m \quad \forall i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где величина $m>0$ – постоянная для всех индивидуумов и не зависит от них, она, скорее всего, является характеристикой данного рынка. Очевидно, чем больше m, тем большее взаимное влияние конкурентов друг на друга. Можно предположить, что m убывает с ростом числа участников n, что согласуется со свойствами рынка типа «эффективная конкуренция».

2. Взаимное влияние конкурентов должно быть равнодействующим и поэтому $m_{ji}=m_{ij}$ $\forall i,j=\overline{1,n}$, т.е. матрица $M=(m_{ji})$ симметрична.

3. Матрица M должна быть определенно положительной. В защиту этой гипотезы отметим следующее. Вероятно, среди всех слагаемых эффекта насыщения j-го товара «собственное» слагаемое (слагаемое с коэффициентом m_{jj}) имеет относительно больший вес по сравнению с остальными. На самом деле, для рынка товаров повседневного спроса логично предположить, что каждый из продавцов имеет своих постоянных клиентов среди покупателей, влияние которых на объемы продаж имеет решающее значение. Поэтому диагональные элементы матрицы M доминируют над остальными. Кроме того, определенная положительность наряду с симметричностью гарантируют отрицательность собственных значений матрицы $(-M)$, т.е. вклад эффекта насыщения в динамику объемов продаж является стабилизирующим. Такое явление вполне согласуется с экономическими законами.

Математическая модель. Используя принципы построения динамической модели, изложенной в [1], приходим к системе дифференциальных уравнений $\dot{q}_j=\Pi_j(p,p^0)+M_j(q,q^0)$, $j=\overline{1,n}$. В линейном случае соответственно имеем

$$\dot{q}_j=-\sum_{i=1}^{n} g_{ji}((p_j-p_i^0)-(p_i-p_i^0))-\sum_{i=1}^{n} m_{ji}(q_i-q_i^0),\ j=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Согласно гипотезе 1) система (2) обладает первым интегралом

$$\sum_{j=1}^{n} q_j=\sum_{j=1}^{n} q_j^0+Q^* e^{-mt}, \tag{3}$$

что легко проверить, просуммировав (2) и воспользовавшись равенством (1).

На основании (3) можно сделать следующий вывод.

Теорема 1. *Равновесный объем продаж всех товаров на рынке* $Q^0 = \sum_{j=1}^{n} a_j^*$ *является экспоненциально устойчивой величиной. При этом коэффициент* m *есть «скорость сходимости» возмущенного значения* $Q(t)=\sum_{j=1}^{n} q_j(t)$ *к равновесному* Q^0.

Отметим, что на основании теоремы 1 устойчивость объема продаж рынка Q^0 не зависит от параметров g_{ji}. Другими словами, общее потребление товаров не зависит от состояния цен на рынке, если цены находятся в оговоренных пределах $p_j^*<p_j<p_j^{**}$, $j=\overline{1,n}$ [1]. Это согласуется с рынком товаров повседневного спроса.

Перейдем к исследованию устойчивости равновесных цен и равновесных объемов продаж объединенной модели. Запишем общую модель рынка, объединив (2) с моделью [1]:

$$\dot{p}_j = -\frac{v_j(p_j - p_j^0)}{p_j - p_j^*} - \frac{d_j(p_j - p_j^0)}{p_j^{**} - p_j} - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} c_{ji}((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0)) +$$

$$+r_j(q_j p_j - q_j^0 p_j^0)), \quad \dot{q}_j = -\sum_{i=1}^{n} g_{ji}((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0)) - \sum_{i=1}^{n} m_{ji}(q_i - q_i^0), \ j=\overline{1,n};$$

$$p_j^* < p_j < p_j^{**}, \ j=\overline{1,n}.$$

Отсюда, вводя замену переменных $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $x_j=p_j-p_j^0$, $y_j=q_j-q_j^0$, $j=\overline{1,n}$, переходим к системе

$$\begin{gathered}\dot{x}_j = -\frac{v_j x_j}{x_j + p_j^0 - p_j^*} - \frac{d_j x_j}{p_j^{**} - p_j^0 - x_j} - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} c_{ji}(x_j - x_i) + r_j q_j^0 x_j + r_j p_j^0 y_j + r_j x_j y_j, \\ \dot{y}_j = -\sum_{i=1}^{n} g_{ji}(x_j - x_i) - \sum_{j=1}^{n} m_j y_j, j = \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{4}$$

Введем в рассмотрение матрицы $C=(c_{ji})$, $G=(g_{ji})$, $M=(m_{ji})$, $S=\mathrm{diag}(S_1, S_2,..., S_n)$, $R=\mathrm{diag}(r_1 p_1^0, r_2 p_2^0,..., r_n p_n^0)$. Тогда, выделяя линейные слагаемые правых частей, (4) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = -Cx - Sx + Ry + F(x, y), x\in R^n, \\ \dot{y} = -Gx - My, y\in R^n, \end{cases} \tag{5}$$

где $F = (F_1, F_2,..., F_n)$,

$$F_j(x, y) = \frac{v_j x_j^2}{(p_j^0 - p_j^*)(x_j + p_j^0 - p_j^*)} - \frac{d_j x_j^2}{(p_j^0 - p_j^{**})(x_j + p_j^0 - p_j^{**})} + r_j x_j y_j;$$

$$S_j = \frac{v_j}{p_j^0 - p_j^*} + \frac{d_j}{p_j^{**} - p_j^0} - r_j q_j^0, j = 1,2,...,n.$$

Предварительно установим одно свойство матрицы G.

Лемма 1. *Матрица* G *– знакоположительная, причем* rang $G = n-1$.

Действительно, легко убедиться в справедливости следующего тождества для квадратичной формы: $xGx= \sum_{1\le i<j\le n} g_{ji}(x_j - x_i)^2$, а значит, $G> 0$. Если положить $x_j - x_i = a_{ji} x$, то ясно, что rang$\{a_{ji}, 1\le i<j\le n\}$ = rang$\{a_{1i}, i=2,...,n\}$. Поэтому rang $G=n-1$.

Теорема 2. *Если матрицы* $(-A+M)$ *и* $(-AM+GR)$ *определенно положительны, т.е.*

$$-A+M>0,\ -AM+GR>0, \qquad (6)$$

то равновесные цены $p_j=p_j^0$, $j=\overline{1,n}$, *и равновесные объемы продаж* $q_j=q_j^0$, $j=\overline{1,n}$, *асимптотически устойчивы.*

Доказательство. Возьмем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V(x,y)=(Ax+Ry)(Ax+Ry)+(Gx+My)(Gx+My)+x(-AM+GR)x+y(-AM+GR)y.$$

Второе неравенство (6) обеспечивает определенную положительность V. Используя свойство симметричности матриц A, R, G, M, производную по времени от функции V силу системы (5) можно представить в виде

$$\dot{V}(x,y)=2(Ax+Ry)(A-M)(Ax+Ry)+2(Gx+My)(A-M)(Gx+My)+o(\|(x,y)\|^2).$$

Покажем, что $\dot{V}$ определенно отрицательна в некоторой окрестности начала $x=0$, $y=0$. Действительно, с учетом первого неравенства (6) квадратичная форма в выражении для $\dot{V}$ (а вместе с ней и сама функция $\dot{V}$) будет определенно отрицательной, если система $Ax+Ry=0$, $Gx+My=0$ имеет лишь нулевое решение. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что матрица $H=\begin{pmatrix} A & R \\ -G & -M \end{pmatrix}$ невырождена. С этой целью домножим матрицу H справа на матрицу $\mathrm{diag}(I, R^{-1})$, где I – единичная матрица. В результате получим : $H\cdot \mathrm{diag}(I, R^{-1})=\begin{pmatrix} A & I \\ -G-MR^{-1} \end{pmatrix}$. Отсюда по известным правилам вычисления определителей имеем: $\det(H\cdot \mathrm{diag}(I, R^{-1}))=$ $=\det(-AMR^{-1}+G)$, или $\det H\cdot \det R^{-1}=\det(-AMR^{-1}+G)\equiv\det(-AM+GR)\cdot \det R^{-1}$, что в силу второго неравенства (6) и дает искомое условие $\det H\neq 0$. Таким образом, для функции V выполнены все требования теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [3]. Теорема 2 доказана.

Заметим, что если матрицы $(-A)$ и M определенно положительны, то неравенства (6) заведомо выполняются.

Случай отсутствия эффекта насыщения. Если отклонения от объемов продаж не влияют на количество продаваемого товара, то $M=0$. Система в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Ry+F(x,y), x\in R^n, \\ \dot{y}=-Gx, y\in R^n. \end{cases} \qquad (7)$$

Обозначим через H_0 матрицу линейного приближения системы (7).

Лемма 2. *Если матрица* $(-A)$ *определенно положительна, то матрица* H_0 *имеет одно нулевое и* $(2n-1)$ *собственное значение с отрицательной действительной частью.*

На самом деле, по лемме 1 последние n строк матрицы H_0 линейно зависимы, а значит, она имеет, по крайней мере, одно нулевое собственное значение. Кроме того, при $M=0$ функция $V=V_0$ и ее производная по времени $\dot{V}$ в силу системы линейного приближения (7) соответственно равны $V_0(x,y)=$ $=(Ax+Ry)(Ax+Ry)+xGx+xGRx+yGRy$, $\dot{V}(x,y)=2(Ax+Ry)A(Ax+Ry)+2xGAGx$. Ясно, что $V_0(x,y)$ и $\dot{V}(x,y)$ обращаются в нуль лишь на подпространстве $E_1=\{(x,y)\in R^{2n} : y=0,\ Gx=0\}$. Согласно лемме 1, такое подпространство одномерно, причем $V_0(x,y)>0$, $\dot{V}(x,y)\leq 0\ \forall(x,y)\in R^{2n}$, и следовательно, E_1 инвариантно. Поэтому все решения системы линейного приближения (7) неограниченно приближаются к E_1. Это на основании свойств общего решения линейных систем и означает, что у матрицы H_0 $(2n-1)$ собственное значение имеет отрицательные действительные части.

Согласно лемме 2, в системе (7) мы имеем дело с критическим случаем одного нулевого корня. Нетрудно убедиться в том, что подходящей заменой координат систему (7) можно привести к системе $\dot{w} = Bw + L(w,z), w \in R^{2n-1}$; $\dot{z} = 0, z \in R$, где матрица B имеет собственные значения лишь с отрицательными действительными частями, причем $z = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Отсюда вытекает

Теорема 3. *Если матрица $(-A)$ определенно положительна и отсутствует эффект насыщения (т.е. $M = 0$), то равновесные цены $p_j = p_j^0$, $j = \overline{1,n}$, и равновесные объемы продаж $q_j = q_j^0$, $j = \overline{1,n}$, устойчивы. При этом общий объем продаж рынка $Q(t)$ с течением времени асимптотически приближается к одному из равновесных значений* $Q^0 = \sum_{j=1}^{n} q_j^0 + \text{const}$.

[1] Калитин Б. С. // Вести. Белорус. ун-та. Сер.1. 1997. № 2. С. 68.
[2] Долан Э. Дж., Линдсей Д. Рынок: микроэкономическая модель. СПб., 1992.
[3] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.

Поступила в редакцию 12.03.98.

УДК 519.10

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, Ю. В. НИКУЛИН

О РАДИУСЕ СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ

In this paper we investigate such type of stability of the Pareto set in a vector linear trajectorial problem of descrete optimization where the small perturbations of vector criterian parameters can lead to appearance of new Pareto optimal trajectories, but one trajectory of the initial problem at least must stay Pareto optimal in the perturbated problem.

Обычно под устойчивостью векторной задачи дискретной оптимизации понимают (см., например, [1–5]) дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху (по Хаусдорфу) парето-оптимального отображения, т.е. существование таких “малых” возмущений параметров задачи, при которых невозможно появление новых оптимумов Парето, т.е. множество Парето исходной задачи может лишь сузиться. Ослабление этого требования приводит к понятию сильной устойчивости. Этот тип устойчивости трактуется как наличие такого возмущения параметров задачи, при котором хотя и возможно появление новых оптимумов Парето, однако должна сохраняться парето-оптимальность хотя бы одного из решений исходной задачи.

Авторами данной статьи найдены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса сильной устойчивости векторной линейной траекториой задачи дискретной оптимизации в случае чебышевской нормы в пространстве возмущающих параметров. Ранее аналогичные оценки для радиуса устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования были получены в [6].

Рассмотрим класс задач векторной дискретной оптимизации, описываемый следующей моделью. Пусть на множестве $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ задана векторная функция a: $E\to\mathbf{R}^n$, $n\geq1$. Тем самым можно считать, что функция $a(e)$