ТЕОРЕМА О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ МЕДЛЕННО РАСТУЩИХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ
THE THEOREM OF THE DIFFERENTIABLE OF THE WAVELET TRANSFORM ON THE SPACE OF SLOWLY GROWING GENERALIZED FUNCTIONS

Банюкевич Елена Викторовна
Гродно, Беларусь

Ключевые слова: вейвлет, вейвлет-преобразование, обобщенная функция, пространство Шварца.

Резюме. Объектом исследования являются медленно растущие обобщенные функции, определенные на числовой оси. Целью данной работы является изучение свойств вейвлет-преобразования на пространстве медленно растущих обобщенных функций. Доказывается теорема о дифференцируемости вейвлет-преобразования на пространстве медленно растущих обобщенных функций.

Keywords: the wavelet, the wavelet transform, the generalized function, the Schwartz space.

Summary. The object of the research is slowly growing generalized functions defined on a real axis. The purpose of this work is to study to properties of the wavelet transform on space of slowly growing generalized functions. The theorem of the differentiable of the wavelet transform on the space of slowly growing generalized functions is being proved by the author.

Рассмотрим вейвлет-преобразование медленно растущих обобщенных функций.

Обозначим S пространство Шварца − пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих комплексно-значных функций f на числовой прямой Р

$$S = \left\{ f \in C^{\infty} :| x^{m} f^{(k)}(x) | < +\infty \right\},$$

для всех $k, m \in \mathrm{N}_0$, N_0 − множество целых неотрицательных чисел. Пусть S' сопряженное пространство, то есть является пространством всех медленно растущих обобщенных функций.

Предположим, что вейвлет $\psi \in S$. Рассмотрим вейвлет-преобразование обобщенной функции $f \in S'$

$$Wf(a,b) = \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle, \; b \in \mathrm{P}, \; a > 0,$$

значение f обобщенной функции медленного роста на функции ψ быстро убывающей.

Докажем, что вейвлет-преобразование медленно растущих обобщенных функций бесконечно дифференцируемо одновременно по переменным a и b.

Теорема 1. Функция $Wf(a,b)$ бесконечно дифференцируема и для любого $l, j \in \mathbb{N}_0$, выполняется равенство

$$\frac{\partial^{l+j}}{\partial a^l \partial b^j} Wf(a,b) = \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega), (-i\omega)^j e^{-i\omega b} \frac{\partial^l}{\partial a^l}\hat{\psi}(a\omega) \right\rangle, \qquad (1)$$

где $\hat{f}$, $\hat{\psi}$ − преобразование Фурье функций f, ψ соответственно.

Доказательство. Пользуясь равенством Парсеваля, $Wf(a,b)$ может быть представлено в следующем виде

$$Wf(a,b) = \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega), e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right\rangle.$$

Докажем дифференцируемость $Wf(a,b)$ по $a > 0$. Для $h > 0$ имеем

$$\frac{1}{h}\left(Wf(a+h,b) - Wf(a,b)\right) - \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega), \frac{\partial}{\partial a} e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega), e^{-i\omega b}\hat{\psi}((a+h)\omega)\right\rangle - \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega), e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right\rangle\right) - \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega), \frac{\partial}{\partial a} e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left\langle \hat{f}(\omega), \frac{1}{h} e^{-i\omega b}\hat{\psi}((a+h)\omega)\right\rangle - \left\langle \hat{f}(\omega), \frac{1}{h} e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right\rangle - \left\langle \hat{f}(\omega), \frac{\partial}{\partial a} e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega), \frac{1}{h} e^{-i\omega b}\hat{\psi}((a+h)\omega) - \frac{1}{h} e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega) - \frac{\partial}{\partial a} e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega), e^{-i\omega b}\left(\frac{1}{h}\left(\hat{\psi}((a+h)\omega) - \hat{\psi}(a\omega)\right) - \frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}(a\omega)\right)\right\rangle.$$

Для доказательства необходимо показать, что

$$e^{-i\omega b}\left(\frac{1}{h}\left(\hat{\psi}((a+h)\omega) - \hat{\psi}(a\omega)\right) - \frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}(a\omega)\right) \to 0 \text{ в } S \text{ при } h \to 0.$$

Имеем

$$\left|\omega^k \frac{\partial^m}{\partial \omega^m} e^{-i\omega b}\left(\frac{1}{h}\left(\hat{\psi}((a+h)\omega) - \hat{\psi}(a\omega)\right) - \frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}(a\omega)\right)\right|.$$

Применяется формула Лейбница

$$(\mathrm{y}_1 \cdot \mathrm{y}_2)^{(\mathrm{k})} = \sum_{s=0}^{k} C_s^k y_1^{(\mathrm{k-s})} y_2^{(\mathrm{s})},$$

где $C_s^k = \dfrac{k!}{s!(\mathrm{k-s})!} = \dbinom{k}{s}$ − биномиальный коэффициент, $\mathrm{y}_1 = e^{-i\omega b}$ и $y_2 = \dfrac{1}{h}\left(\hat{\psi}((a+h)\omega) - \hat{\psi}(a\omega)\right) - \dfrac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}(a\omega)$.

Получается следующее выражение

$$\left|\omega^k \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-ib)^{m-r} e^{-i\omega b}\frac{\partial^r}{\partial \omega^r}\left(\frac{1}{h}\left(\hat{\psi}((a+h)\omega) - \hat{\psi}(a\omega)\right) - \frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}(a\omega)\right)\right|.$$

Вводится обозначение

$$\hat{\psi}_r(a\omega) = \frac{\partial^r}{\partial \omega^r}\hat{\psi}(a\omega).$$

Тогда последнее выражение примет вид

$$\left|\omega^k\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-ib)^{m-r}e^{-i\omega b}\left(\frac{1}{h}\left(\hat{\psi}_r\left((a+h)\omega\right)-\hat{\psi}_r\left(a\omega\right)\right)-\frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}_r\left(a\omega\right)\right)\right|$$

Теперь заметим, что

$$\hat{\psi}_r\left((a+h)\omega\right)-\hat{\psi}_r\left(a\omega\right)=\int_a^{a+h}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}_r\left(t\omega\right)dt,$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}_r\left(a\omega\right)=\frac{1}{h}\int_a^{a+h}\frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}_r\left(a\omega\right)dt,$$

подставим в предыдущее и получим

$$\left|\omega^k\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-ib)^{m-r}e^{-i\omega b}\,\frac{1}{h}\left(\int_a^{a+h}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}_r\left(t\omega\right)dt-\int_a^{a+h}\frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}_r\left(a\omega\right)dt\right)\right|=$$

$$=\left|\omega^k\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-ib)^{m-r}e^{-i\omega b}\,\frac{1}{h}\int_a^{a+h}\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}_r\left(t\omega\right)-\frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}_r\left(a\omega\right)\right)dt\right|.$$

С учетом

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}_r\left(t\omega\right)-\frac{\partial}{\partial a}\hat{\psi}_r\left(a\omega\right)=\int_t^{a}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{\psi}_r\left(y\omega\right)dy$$

получается следующее

$$\left|\omega^k\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-ib)^{m-r}e^{-i\omega b}\,\frac{1}{h}\int_a^{a+h}\int_t^{a}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{\psi}_r\left(y\omega\right)dy\,dt\right|\le$$

$$\le\left|\omega^k\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-ib)^{m-r}e^{-i\omega b}\right|\frac{1}{h}\sup_{a\le y\le a+h}\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{\psi}_r\left(y\omega\right)\right|\int_a^{a+h}\int_t^{a}dy\,dt\,.$$

Рассмотрим последний двойной интеграл

$$\int_a^{a+h}\int_t^{a}dy\,dt=\int_a^{a+h}(a-t)\,dt=\int_a^{a+h}a\,dt-\int_a^{a+h}t\,dt=a(a+h-a)-\left(\frac{\left(a+h\right)^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=ah-\frac{h^2-2ah}{2}=\frac{h^2}{2}\,.$$

Подставим полученное, имеем

$$\left|\omega^k\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-ib)^{m-r}e^{-i\omega b}\right|\frac{1}{h}\sup_{a\le y\le a+h}\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{\psi}_r\left(y\omega\right)\right|\frac{h^2}{2}\le$$

$$\le\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}|\,b\,|^{m-r}\,\frac{h}{2}\sup_{\substack{a\le y\le a+h\\ \omega\in\mathbb{R}}}\left|\omega^k\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^r}{\partial\omega^r}\hat{\psi}\left(y\omega\right)\right|=$$

$$=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}|\,b\,|^{m-r}\,\frac{h}{2}\sup_{\substack{a\le y\le a+h\\ \omega\in\mathbb{R}}}\left|\omega^k\,\frac{y^{k+2}}{y^{k+2}}\frac{\partial^{r+2}}{\partial y^{r+2}}\frac{\partial^{r+2}}{\partial\omega^{r+2}}\frac{y^r}{r\,!}\frac{\omega^2}{2}\hat{\psi}\left(y\omega\right)\right|.$$

Вводится замена $z=y\omega$ и последнее выражение принимает вид

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}|\,b\,|^{m-r}\,\frac{h}{2}\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|z^{k+2}\,\frac{\partial^{r+2}}{\partial z^{r+2}}\hat{\psi}\left(z\right)\right|\sup_{a\le y\le a+h}|\,\mathrm{y}\,|^{r-k-2}.$$

Обозначим

$$\gamma_{k+2,r+2}\left(\hat{\psi}(z)\right)=\sup_{z\in\mathbb{R}}\left|z^{k+2}\,\frac{\partial^{r+2}}{\partial z^{r+2}}\hat{\psi}\left(z\right)\right|$$

и имеем

$$\frac{h}{2}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}|b|^{m-r}\gamma_{k+2,r+2}\left(\hat{\psi}(z)\right)\sup_{a\le y\le a+h}|y|^{r-k-2}.$$

Очевидно, что полученное выражение стремится к нулю при $h\to 0$. Следовательно

$$\lim_{h\to 0}\frac{Wf(a+h,b)-Wf(a,b)}{h}=\frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}(\omega),\frac{\partial}{\partial a}e^{-i\omega b}\hat{\psi}(a\omega)\right\rangle.$$

Аналогично доказывается дифференцируемость по b. В результате получаем равенство (1).