УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
К31

*Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета*

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат физико-математических наук,
доцент *С. В. Рогозин*;
кандидат физико-математических наук,
доцент *Л. А. Хвощинская*

Кашевский, В. В.
К31 Математический анализ : курс лекций / В. В. Кашевский. – Минск : БГУ, 2008. – 151 с.
ISBN 978-985-485-713-8.

В курсе лекций изложены основные результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной. Цель пособия – помочь студентам глубже усвоить теоретический материал по математическому анализу и приобрести навыки в решении задач.

Предназначено для студентов физико-математических специальностей БГУ.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-485-713-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная математика фактически опирается на алгебру (конечная математика) и анализ (математика бесконечных процессов). Видимо, Архимед — первый, кто начал применять методы математического анализа, хотя общепризнано, что основная заслуга в их разработке принадлежит Лейбницу и Ньютону. Математический анализ является основой для многих разделов математики, например таких, как дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, уравнения с частными производными (методы математической физики), вариационное исчисление.

Настоящее пособие будет полезно студентам технических специальностей при изучении курса математического анализа. Разумеется, книга не может заменить живого изложения, но должна освободить время для размышлений и самостоятельной работы.

Ознакомиться с тем, как развивались идеи и понятия математического анализа, можно в книгах [3, 10]. Желательно, чтобы читатель обращался и к другим учебным пособиям, в названии которых есть ключевые слова: «анализ», «исчисление». Заметим, что усвоение математического анализа, вообще говоря, не зависит от способа изложения. Кроме того, книги по математике надо читать медленно и с карандашом в руках. Необходимым условием для чтения этой книги является желание учиться.

В пособии содержится лекционный материал объемом около 70 часов. В конце каждой лекции приводятся номера задач по известному учебному пособию Б. П. Демидовича [4]. Решайте задачи и упражнения — это главное условие освоения математики!

Начало и конец доказательства обозначаются символами ◄►.

Исторические сведения об известных математиках можно найти в книгах [2, 3, 6, 10]. При лекционном изложении важную роль играет иллюстративный материал. Заметим, что многие рисунки можно легко воспроизвести по словесным описаниям.

Большинство лекций содержит ЧАВО (часто задаваемые вопросы и ответы на них). Вопрос выделен курсивом, а ответ набирается прямым шрифтом. Эти вопросы нередко возникали в ходе бесед со студентами.

Для отдыха используются некоторые высказывания и шутки, которые стали фольклором и разбросаны по разным источникам (газеты, книги, Интернет).

Хочу поблагодарить доцента О. А. Чупригина за ряд ценных стилистических и математических исправлений. Приношу искреннюю благодарность заведующего кафедрой высшей математики и математической физики Н. Г. Абрашиной-Жадаевой за поддержку и оптимизм, а также сотрудникам Управления редакционно-издательской работы БГУ за помощь при подготовке рукописи к печати.

В заключение хотелось бы дать несколько советов читателям этой книги.

Математика не является справочником из формул, определений и теорем. Математика — это множество КРАСИВЫХ ИДЕЙ.

При изучении математики обязательно надо решать ЗАДАЧИ. Для этого надо иметь чистый лист бумаги, пишущее устройство и хорошую идею.

Старайтесь создавать мысленные ОБРАЗЫ изучаемых абстрактных понятий.

Если встретится трудное место, то его можно пропустить, чтобы вернуться к нему позже.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Элементы логики и теории множеств. Натуральные числа

Высказыванием будем называть утверждение (повествовательное предложение, формулу), которое определенно является или истинным, или ложным. Например, $1 > 3$ — ложное высказывание.

Пусть утверждение (повествовательное предложение, формула) зависит от упорядоченного набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элементов некоторого множества. Если для каждого такого набора это утверждение становится высказыванием, то будем называть такое утверждение *n-местным предикатом*. Так, формула $x > 3$ является 1-местным предикатом, который в зависимости от значения параметра x (например, из множества целых чисел) может быть истинным или ложным.

К высказываниям и предикатам можно применять унарные (применимые к одному высказыванию или предикату) и бинарные (применимые к двум высказываниям или предикатам) операции. Унарная операция — *отрицание* будет обозначаться символом $\neg$ («кочерга», встречаются и другие обозначения). Например, $\neg(1 > 3)$— истинное высказывание. Бинарными операциями (логическими связками) являются:

1) *конъюнкция*, или *логическое произведение* (аналог союза «и»), обозначается символом $\wedge$;

2) *дизъюнкция*, или *логическая сумма* (аналог союза «или»), обозначается символом $\vee$;

3) *импликация* (аналог фразы «если... то...») обозначается символом $\Rightarrow$ или $\to$;

4) *эквивалентность* (высказывания истинны или ложны одновременно) обозначается символом $\leftrightarrow$ или $\Leftrightarrow$. Например, $A \vee B$ означает, что хотя бы одно из утверждений A или B верно. Выпишем три основные таблицы истинности.

A	B	A∨B
И	И	**И**
И	Л	**И**
Л	И	**И**
Л	Л	**Л**

A	B	A∧B
И	И	**И**
И	Л	**Л**
Л	И	**Л**
Л	Л	**Л**

A	B	A⇒B
И	И	**И**
И	Л	**Л**
Л	И	**И**
Л	Л	**И**

К предикатам можно применить два квантора: $\exists$ (квантор существования), $\forall$ (квантор всеобщности). Вместо фразы «для всех» мы пишем символ $\forall$, а вместо фразы «существует такое» мы пишем символ $\exists$. Чаще всего с помощью кванторов предикат становится высказыванием. Например, высказывание $\exists x(x>3)$ — истинно, а $\forall x(x>3)$ — ложно.

Замечание 1. Полезно знать два правила переноса знака отрицания через кванторы:

$$\neg\forall xP(x)\leftrightarrow\exists x\neg P(x);\ \neg\exists xP(x)\leftrightarrow\forall x\neg P(x).$$

Итак, при каждом переносе знака отрицания через квантор надо поменять его (квантор) на дополнительный квантор $(\exists\leftrightarrow\forall)$. При этом появится отрицание последующей формулы. Эти правила позволяют формально просто построить отрицание любого утверждения без использования частиц «не», «нет» или, говорят, сформулировать позитивное утверждение. Например,

$$\neg\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\left(|x|<\delta\to\left|x^2\right|<\varepsilon\right)\leftrightarrow\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\left(\left(|x|<\delta\right)\wedge\left(\left|x^2\right|\geq\varepsilon\right)\right).$$

Мы здесь использовали формулу $\neg(A\to B)\leftrightarrow(A\wedge\neg B)$, которую легко проверить, составив таблицы истинности для правой и левой части этой формулы.

Упражнение 1. Является ли лучший музыкант среди художников и лучший художник среди музыкантов одним и тем же лицом.

Упражнение 2. Является ли старейший музыкант среди художников и старейший художник среди музыкантов одним и тем же лицом.

Множество — одно из базовых (неопределяемых) понятий математики. Множество состоит из элементов. Если x есть элемент множества X, то будем писать $x\in X$. Часто множество задают с помощью предиката и кванторов. Запись $M=\{x\mid P(x)\}$ означает, что множество M состоит только из тех и только тех элементов x, для которых утверждение $P(x)$ истинно.

Множества называются равными, если они состоят из одинаковых элементов. Когда X_1 является *подмножеством* множества X_2, то есть истинно высказывание $\forall x\in X_1\Rightarrow x\in X_2$, будем писать $X_1\subset X_2$, если $X_1\subset X_2$ и $X_2\subset X_1$, то $X_1=X_2$.

Объединением $X\cup Y$ множеств X и Y называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств.

Пересечением $X\cap Y$ множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно и X, и Y.

Разностью $X\setminus Y$ множеств X и Y будем называть множество, состоящее из элементов множества X, которые не принадлежат множеству Y.

Чаще всего мы будем иметь дело с числовыми множествами. Важнейшим числовым множеством является множество натуральных чисел. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ можно задать с помощью пяти аксиом Пеано.

I. Рассмотрим некоторый объект. Назовем этот объект натуральным числом 1.

II. Если некоторый объект n является натуральным числом, то найдется натуральное число n', которое называется *следующим* за n (n называют *предшествующим* числа n'). Вводят следующие обозначения: $1' = 2,\ 2' = 3,\ 3'=4\ldots$

III. Число 1 не является следующим ни за каким числом (высказывание «1 следует за некоторым числом n» является ложным).

IV. Если следующие за двумя натуральными числами совпадают, то совпадают и исходные числа $\left(n' = m' \Rightarrow n = m\right)$.

V. Пусть некоторое множество $\mathbb{N}$ состоит из натуральных чисел и содержит 1. Если множество $\mathbb{N}$ вместе с любым числом n содержит и число n', то это множество содержит все натуральные числа, (аксиома индукции).

Кроме того, вводятся три операции.

1. *Сложение*. Каждой паре чисел *n, m* ставится в соответствие число, которое называется суммой чисел и обозначается символом $n + m$. При этом для каждых n и m справедливы равенства: $n + 1 = n'$ и $n + m' = \left(n + m\right)'$.
2. *Умножение*. Каждой паре чисел *n, m* ставится в соответствие число, которое называется произведением чисел и обозначается символом $n \cdot m$ (часто пишут nm). При этом для каждых n и m справедливы равенства: $n \cdot 1 = n$ и $n \cdot m' = n \cdot m + n$.
3. *Сравнение* (*неравенства*). Следующее число называют большим $\left(n' > n\right)$, а предшествующее называют меньшим $\left(n < n'\right)$. При этом для любых трех чисел n, m и p справедливы три утверждения:

$$a)\ \left(n < m\right) \wedge \left(m < p\right) \Rightarrow \left(n < p\right);$$
$$b)\ \left(n < m\right) \Rightarrow \left(n + p < m + p\right);$$
$$c)\ \left(n < m\right) \Rightarrow \left(n \cdot p < m \cdot p\right).$$

Разностью чисел n и m (обозначают $n - m$) называется решение уравнения $m + x = n$.

Мы часто будем пользоваться *методом математической индукции*. Этот метод применяется для решения задач следующего вида: требуется доказать некоторое утверждение $A(n)$ для всех натуральных $n \geq m_0 \geq 1$. Например, $A(n) = \left\{ \forall n \geq 5 \mid 2^n > n^2 \right\}$.

Доказательство утверждения $A(n)$ методом математической индукции (ниже мы приведем пример) состоит из двух шагов:

1. (*Базис индукции*). Надо убедиться, что верно утверждение $A(m_0)$ (чаще всего $m_0 = 1$).
2. (*Индукционный шаг*). Доказать, что верно утверждение: $\forall k \geq m_0 \left(A(k) \Rightarrow A(k+1) \right)$.

Замечание 2. Довольно часто приходится рассматривать суммы вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Последнее выражение читается так: сумма всех a_i по i от единицы до n. Символ (буква i) называется *индексом суммирования*. Выбор обозначения для индекса суммирования не играет роли. Поэтому символы $\sum_{k=1}^{n} a_k$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i$ означают одну и ту же сумму. Индексы суммирования $(i, k, \ldots)$ называют «*немыми*», или «*фиктивными*», индексами.

Мы будем использовать следующие обозначения для сумм:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k \equiv \sum_{1 \leq k \leq n} x_k .$$

В левой части тождества выписывают несколько слагаемых, чтобы была ясна закономерность в построении суммы. Правая часть указанного тождества удобна в том случае, когда надо пояснить, как сделать сдвиг индекса в некоторой сумме. Например,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k = \sum_{1 \leq k+1 \leq n} x_{k+1} = \sum_{0 \leq k \leq n-1} x_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} .$$

Можно сумму $x_m + x_{m+1} + \ldots + x_{m+n}$ записать в виде $\sum_{k=m}^{m+n} x_k$, или $\sum_{m \leq k \leq m+n} x_k$, или $\sum_{P(k)} x_k$, где роль предиката $P(k)$ играет неравенство $m \leq k \leq m+n$, а параметр k принимает только те значения, при которых это неравенство истинно. Заметим еще, что пустая сумма $\sum_{P(k)} x_k$, где предикат $P(k)$ при всех k является ложным высказыванием, равна нулю по определению. Например, $\sum_{k=1}^{0} k^2 = \sum_{1\le k\le 0} k^2 = 0$. Отметим еще, что индекс суммирования (немой индекс) не надо путать со *свободным* индексом. Так, например, в сумме $\sum_{k=1}^{3} x_{kj} = x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}$ индекс j является свободным, а индекс k — немым. Немой индекс можно заменить любой другой буквой, а свободный менять нельзя $\left(\sum_{k=1}^{3} x_{kj} \equiv \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \right)$.

Иной раз приходится иметь дело с суммами, у которых суммирование происходит не по одному, а по нескольким индексам. При этом употребляют такие обозначения (на примере двух индексов):

$$\sum_{1\le i\le n} \sum_{1\le j\le n} a_{ij} \equiv \sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ij}, \quad \sum_{0\le i\le n} \sum_{0\le j\le i} a_{ij} \equiv \sum_{0\le j\le i\le n} a_{ij}.$$

Из свойств конечных сумм вытекают следующие равенства:

1. $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i$. 2. $\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$.

3. $\sum_{i=m}^{n} c = c(n - m + 1)$. 4. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_i$, $m < k < n$.

5. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$. 6. $\left(\sum_{R(i)} a_i \right) \left(\sum_{S(j)} b_j \right) = \sum_{R(i)} \left(\sum_{S(j)} a_i b_j \right)$.

Пример 1 (сумма геометрической прогрессии). Надеемся, что читателю знакома (проверьте с помощью математической индукции) сумма

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \equiv \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Пример 2 (метод математической индукции). Докажем утверждение

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2.$$

Обозначим его символически $A(n)$. Тогда при $n = 1$ (базис индукции) будем иметь: $A(1) \sim \sum_{k=1}^{1} (2k - 1) = 1 = 1^2$. Осталось показать (индукционный шаг), что $A(k) \Rightarrow A(k+1)$, иначе говоря, из равенства $\sum_{i=1}^{k} (2i - 1) = k^2$ должно следовать равенство $\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = (k+1)^2$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Для произведений из нескольких множителей используется обозначение $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=\prod_{k=1}^{n}x_k$. В частности, получим обозначение для *факториала*:

$$1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=\prod_{k=1}^{n}k\equiv n!.$$

Полезно знать формулу $\frac{n!}{k!}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1),k<n$. Отметим, что произведение положительных множителей можно с помощью логарифма свести к сумме $\left(\lg\prod_{P(n)}x_n=\sum_{P(n)}\lg x_n\right)$. Поэтому естественно определить пустое произведение $\prod_{P(n)}x_n$, где предикат $P(n)$ при всех n является ложным высказыванием, равным единице $(\lg1=0)$. Кстати,

$$\prod_{1\le k\le0}k\equiv0!=1.$$

Встречаются еще два обозначения (для произведения четных и нечетных чисел):

$$(2n)!!=2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n;\quad(2n+1)!!=1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n+1).$$

Кроме того, нам понадобятся элементы комбинаторики (сочетания и размещения).

Размещения. Пусть требуется разместить 10 элементов некоторого множества на три пронумерованных места. На первое место можно поместить любой из десяти элементов. Тогда на второе место попадет любой из оставшихся девяти, а для последнего места останется восемь различных вариантов. Значит, количество размещений 10 элементов по 3 будет равно 10 · 9 · 8 = 720. Обозначим число размещений из n элементов по m символом A_n^m. Нетрудно установить в этом случае (на первое место есть выбор из n элементов, на второе место можно поместить любой из оставшихся n – 1 элементов и т.д.) справедливость формулы

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Частный случай — размещения из n элементов по n называют перестановкой n элементов. Обозначение:

$$P_n\equiv A_n^n\equiv n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1.$$

Например, перестановка из четырех элементов равна: $P_4 = 4! = 24$.

Сочетания (подмножества). Будем теперь выбирать из 10 элементов некоторого множества по 3 элемента (независимо от их порядка). Любая такая выборка (подмножество из трех элементов) называется сочетанием из 10 элементов по 3 и обозначается символом C_{10}^3. Легко видеть, что после всех перестановок любой тройки сочетаний из 10 элементов мы получим все размещения A_{10}^3. Значит, справедлива формула $A_{10}^3 = C_{10}^3 \cdot 3!$. Поэтому $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

Для общего случая сочетаний из n элементов по m получим формулу

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Вывод. Сочетание — выборка, в которой порядок элементов не имеет значения, а размещение — выборка, в которой важен порядок элементов. Например, $\{1,2\}$ и $\{2,1\}$ — разные размещения, но одинаковые сочетания.

В переводной литературе часто встречается обозначение $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \equiv C_n^k$.

Замечание 3. Обозначение $n!$ впервые было использовано малоизвестным математиком Кристианом Крампом в его пособии по алгебре в 1808 г. Эйлер использовал обозначение $[n]$, а Гаусс писал $\pi(n)$. Отметим, что понятие факториала распространяется и на случай нецелого x. В этом случае пишут $x! \equiv \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, или интеграл Эйлера. Мы с ней еще встретимся в курсе анализа.

Отметим, что знак суммы $\sum$ (заглавная греческая буква «сигма») впервые был использован Лагранжем в 1772 г. Есть еще обозначения Эйнштейна без знака Σ для некоторых сумм, но на них мы здесь не останавливаемся.

Упражнение 3. Упростите выражение $\sum\limits_{i=k}^{n} (a_{i+1} - a_i)$.

Упражнение 4. Покажите, что имеют место равенства

$$C_n^0 = C_n^n = 1;\ C_n^1 = n;\ C_n^r = C_n^{n-r};\ C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1}.$$

Пример 3 (бином Ньютона). Докажем методом математической индукции формулу

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r \equiv \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\left(n-r\right)!} a^{n-r} b^r,\, n \in \mathbb{N}.$$

Это формула *бинома Ньютона* (см. еще задачу 5 из задачника [4]).

◀ Базис индукции легко проверить:

$$\left(a+b\right)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a+b.$$

Осталось обосновать шаг индукции. Так как

$$C_k^r + C_k^{r-1} = C_k^r;\; C_k^k = C_{k+1}^{k+1};\; C_k^0 = C_{k+1}^0,$$

то справедлива цепочка равенств

$$\left(a+b\right)^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} \Rightarrow \left(a+b\right)^{k+1} = \left(\sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^r\right)\left(a+b\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a+b\right)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^{k-r} b^{r+1} \Rightarrow \left(a+b\right)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} b^0 +$$

$$+\left(C_k^1 + C_k^0\right) a^k b^1 + \left(C_k^2 + C_k^1\right) a^{k-1} b^2 + \ldots + \left(C_k^k + C_k^{k-1}\right) a^1 b^k + C_k^k a^0 b^{k+1} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} C_{k+1}^r a^{k+1-r} b^r.$$

Итак, формула бинома Ньютона доказана.▶

Упражнение 5. Найдите устно с помощью бинома Ньютона 11^4.

Упражнение 6. Постройте треугольник Паскаля для $n=5$ и распишите $\left(a+b\right)^5$.

Функции. Последовательности

Функции, наряду с множествами, являются основными понятиями математики.

Определение 1. Будем говорить, что задана *функция* (отображение, оператор, преобразование) f множества X в множество Y, если каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Множество X называется *областью определения* функции f (обозначение: $X = D(f)$). Элемент x называется независимой переменной (аргументом), а y — зависимой переменной (значением функции). Множество всех значений данной функции обозначают символом $f(X)$ (обозначение: $f(X) = E(f)$). Обозначения для функции:

$$y = f(x), f : X \to Y.$$

Кроме аналитического способа задания функции, используется и графический способ, когда необходимо представить себе геометрически поведение функции. Если нужны конкретные значения функции, то применяется табличное задание функции [16].

Пример 4. Важным примером функции является последовательность элементов некоторого множества *X*. Функция $f:\mathbb{N}\to X$ называется *последовательностью элементов множества X*. Назовем $f(n)=x_n$ — *n-м членом последовательности*. Для последовательности часто используют обозначения: 1) $x_1,x_2,...,x_n,...$; 2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; 3) $\left(x_n\right)$.

Определение 2. Функция называется *накрытием (сюръекцией)*, если $f(X)=Y$.

Определение 3. Функция называется *вложением (инъекцией)*, если $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

Определение 4. Функция $f:X\to Y$ называется *взаимно однозначной* (*биекцией*), если она одновременно является сюръекцией и инъекцией.

Замечание 4. Взаимно однозначные функции удобны во многих отношениях. Например, для таких функций существует *обратная* функция $f^{-1}:Y\to X$, такая, что $\forall x\in X\left(f^{-1}(f(x))=x\right)$ и $\forall y\in Y\left(f(f^{-1}(y))=y\right)$.

Определение 5. Пусть даны две функции $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ $\left(f(x)=y,\ g(y)=z\right)$. Определим новую функцию $g\circ f:X\to Z$, которую будем называть *композицией* функций *f* и *g*, где по определению полагаем $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

Замечание 5. Обратите внимание, что чаще всего $f\circ g\neq g\circ f$. Рассмотрите пример $f(x)=2^x$; $g(x)=x^2$.

Действительные числа

Действительные числа можно вводить как сечения Дедекинда во множестве рациональных чисел [9, 14], но проще обойтись десятичными дробями [7].

Определение 6. *Действительным* (*вещественным*) *числом* будем называть любую бесконечную десятичную дробь $n,\ n_1n_2\ldots n_k\ldots$, где n — некоторое целое число, а после запятой любая последовательность цифр без знаков препинания. При этом мы будем отождествлять дроби $n,\ n_1\ldots n_k(9)\equiv n,\ n_1\ldots n_k+1(0),\ n_k\neq 9$ и $n,\ (9)\equiv n+1,\ (0)$ (в скобках записывают периодически повторяющуюся группу цифр). Здесь n_k — десятичные цифры $\left(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right)$, а n — целое число. Далее будем считать, что в действительном числе не будет только одних девяток после запятой, начиная с некоторого номера. Пусть $x=n,\ n_1\ldots n_k\ldots$, тогда модуль (абсолютная величина) этого числа определяется так: $|x| = |n|,\ n_1 \ldots n_k \ldots$ Множество всех действительных чисел будем обозначать символом $\mathbb{R}$. Множество рациональных чисел (бесконечных периодических дробей) мы обозначим символом $\mathbb{Q}$. Числа, которые принадлежат множеству $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, называются *иррациональными* — это бесконечные непериодические дроби. Натуральное число n можно отождествить с действительным числом $n,\ (0)$.

Теперь надо научиться сравнивать действительные числа, определить операции над действительными числами (сложение, вычитание, умножение, деление) и обосновать их групповые свойства. Вначале будем рассматривать неотрицательные $(n \geq 0)$ действительные числа $n,\ n_1 \ldots n_k \ldots$.

Определение 7. Пусть даны два неотрицательных действительных числа: $x = n_0,\ n_1 n_2 \ldots; y = m_0,\ m_1 m_2 \ldots (n_0 \geq 0;\ m_0 \geq 0)$. Будем писать $x < y\,(y > x)$ (говорить x меньше y, или y больше x), если найдется такое неотрицательное целое число l, что $n_k = m_k\ (k = 0,1,\ldots l)$, но $n_{l+1} < m_{l+1}$ или $n_0 < m_0$. Если $\forall k\ (n_k = m_k)$, то пишем $x = y$ и говорим, что числа x и y равны. Неравенство $x \leq y$ означает, что либо $x = y$, либо $x < y$. Аналогичное неравенство $x \geq y$ означает, что или $x = y$, или $x > y$.

Определение 8. Пусть дана последовательность $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(n) = x_n$. Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если найдется число M, что $\forall n\ (x_n \leq M)$. Последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если найдется число M, что $\forall n (M \leq x_n)$. Последовательность, которая ограничена сверху и снизу, называется *ограниченной*.

Определение 9. Последовательность (x_n) называется *невозрастающей* (*убывающей*), если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $x_{n+1} \leq x_n\ (x_{n+1} < x_n)$. Последовательность (x_n) называется *неубывающей* (*возрастающей*), если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $x_{n+1} \geq x_n\ (x_{n+1} > x_n)$. Все перечисленные в этом определении последовательности называют *монотонными*.

Определение 10. Последовательность $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ целых чисел называется *стационарной,* если существует $k_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $\forall k \in \mathbb{N} (k \geq k_0)$ справедливо равенство $n_k = n_{k_0}$ (то есть, начиная с некоторого номера, элементы этой последовательности не меняются). В таком случае будем говорить, что последовательность (n_k) *стабилизируется* к числу n_{k_0}.

Определение 11. Последовательность $x_k = n_0^{(k)},\ n_1^{(k)} n_2^{(k)} \ldots;\ k \in \mathbb{N}$ действительных чисел будем называть *стабилизирующейся* к числу $x = n_0,\ n_1 n_2 \ldots$, если последовательность ее цифр, стоящих на i-м месте $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ $n_i^{(1)}, n_i^{(2)}, \ldots, n_i^{(m)}, \ldots$ стабилизируется к числу n_i.

Далее в этой лекции «действительное число» и «число» — синонимы.

Лемма 1. Всякая неубывающая и ограниченная сверху последовательность действительных чисел стабилизируется к некоторому числу.

◀ Достаточно понять два факта:

1. Ограниченная неубывающая последовательность натуральных чисел стабилизируется.
2. Ограниченная неубывающая последовательность дробей с одинаковым знаменателем стабилизируется.▶

Теперь можно определить арифметические операции над действительными числами.

Определение 12. Зададим два неотрицательных действительных числа: $x = n_0,\ n_1 n_2 \ldots; y = m_0,\ m_1 m_2 \ldots (n_0 \geq 0;\ m_0 \geq 0)$. Пусть $x^{(k)} = n_0,\ n_1 \ldots n_k$ и $y^{(k)} = m_0,\ m_1 \ldots m_k$ любые *k-е приближения* данных чисел. Рассмотрим последовательность чисел $\left(x^{(k)} + y^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$. По лемме 1 эта последовательность стабилизируется к некоторому числу. Обозначим это число символом $x + y$ и будем называть *суммой* чисел x и y.

Определение 13. *Разностью* чисел x и y $(x > y > 0)$ (обозначение: $x - y$) будем называть число, к которому стабилизируется последовательность $x^{(k)} - \left(y^{(k)} + 10^{-k}\right)$.

Определение 14. *Произведением* чисел x и y назовем число, к которому стабилизируется последовательность $\left(x^{(k)} y^{(k)}\right)^{(k)}$. Обозначим это число символом xy.

Определение 15. Пусть $y > 0$. *Частным* чисел x и y будем называть число, к которому стабилизируется последовательность $\left(\dfrac{x^{(k)}}{y^{(k)} + 10^{-k}}\right)^{(k)}$, и обозначать это частное символами $x : y \equiv \dfrac{x}{y} \equiv x/y$.

Замечание 6. В определениях 8 и 10 фигурируют последовательности $\left(y^{(k)} + 10^{-k}\right)$. Часто рациональное число $y^{(k)} + 10^{-k}$ называют *верхним k-значным приближением* действительного числа y или *k-м приближением* *с избытком.* Число $y^{(k)}$ называют *нижним k-значным приближением* действительного числа *y* или *k-м приближением с недостатком.* Например, для числа π верхним 2-значным приближением будет число 3,15. Нетрудно убедиться, что верхние приближения невозрастающие $\left(y^{(k)}+10^{-k} \geq y^{(k+1)}+10^{-k-1}\right)$, а нижние приближения неубывающие $\left(y^{(k)} \leq y^{(k+1)}\right)$. Итак, обе последовательности $x^{(k)}-\left(y^{(k)}+10^{-k}\right)$ и $\left(\dfrac{x^{(k)}}{y^{(k)}+10^{-k}}\right)^{(k)}$ неубывающие и можно воспользоваться леммой 1. Поэтому определения 8 и 10 являются корректными.

Замечание 7. В определениях 7–10 фигурируют положительные числа. Эти определения легко модернизировать для отрицательных действительных чисел либо чисел, которые имеют разные знаки. Для этого понадобится модуль действительного числа. Например, при $x<0, y<0$ полагаем $x+y=-\left(|x|+|y|\right)$. Когда $x<0, y>0;\ |x|<|y|$, то $x+y=|y|-|x|$. Если $x<0, y>0;\ |y|<|x|$, то $x+y=-\big||x|-|y|\big|$. При определении умножения учитывают правило выбора знаков. Если сомножители разных знаков, то произведение будет отрицательным $\left(xy=-|x||y|\right)$. Когда сомножители одинаковых знаков, то произведение будет положительным $\left(xy=|x||y|\right)$. Аналогичное правило (как и для произведения) будет и при определении частного. Разность же сводится к сложению.

Определение 16. *Группой* называется некоторое множество Γ, на котором задана *бинарная операция* $(\circ)$, которая каждой упорядоченной паре элементов (α,β) множества Γ ставит в соответствие определенный элемент этого множества: $\gamma=\alpha\circ\beta$. При этом должны выполняться условия:

a) для любой тройки элементов $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\Gamma$ справедливо равенство (*закон ассоциативности*)

$$\alpha\circ(\beta\circ\gamma)=(\alpha\circ\beta)\circ\gamma;$$

b) во множестве Γ есть единственный *нейтральный* (*единичный*) *элемент* ε, такой, что для всех $\alpha\in\Gamma$ справедливо равенство

$$\varepsilon\circ\alpha=\alpha\circ\varepsilon=\alpha;$$

c) для каждого элемента $\alpha\in\Gamma$ есть единственный *симметричный* (*обратный*) *элемент* α^{-1}, такой, что

$$\alpha\circ\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\circ\alpha=\varepsilon.$$

Замечание 8. Чаще всего группой является числовое множество, а операцией $(\circ)$ будет сложение $(+)$ или умножение$(\cdot)$.

Группу называют *коммутативной* (*абелевой*), если для любой пары элементов $(\alpha,\ \beta)$ множества Г справедливо равенство

$$\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha.$$

Можно показать, что относительно операции сложения множество действительных чисел является коммутативной группой (нуль будет нейтральным элементом). Относительно операции умножения множество $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ будет коммутативной группой (единица будет нейтральным элементом).

Для множества действительных чисел справедливы еще три свойства, которые связывают сложение, умножение и неравенства:

$$1.\ (a+b)c=ac+bc.\ 2.\ a>b\Rightarrow a+c>b+c.$$

$$3.\ \text{Если } c>0, \text{ то } a>b\Rightarrow ac>bc.$$

Полезным упражнением для читателя будет проверка указанных свойств.

Замечание 9. Говорят, что последовательность действительных чисел (x_n) *имеет предел*, *равный a* (*последовательность сходится*), если для любого действительного числа $\varepsilon>0$ найдется натуральное число *N*, такое, что для всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Пусть последовательность положительных действительных чисел (x_n) неубывающая и ограничена сверху. По лемме 1 такая последовательность стабилизируется к некоторому числу *a*. Это число и будет пределом последовательности (x_n). Дело в том, что для любого действительного числа $\varepsilon>0$ найдется натуральное число *m*, такое, что справедливо неравенство $1/\varepsilon<10^m$. Начиная с некоторого номера *N*, последовательность цифр, стоящих на *m*-м месте, будет постоянной и равной последовательности цифр числа *a,* стоящих на *m*-м месте. Значит, для всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<10^{-m}<\varepsilon$.

Замечание 10. Для нас далее будут важны следующие множества: $\mathbb{N}$— натуральные числа, $\mathbb{Z}$— целые числа, $\mathbb{Q}$— рациональные числа, $\mathbb{R}$— действительные числа. Промежутками будем называть следующие множества:

$$[a,b]=\{x\,|\,a\le x\le b\};\ \ (a,b)=\{x\,|\,a<x<b\};\ \ (a,b]=\{x\,|\,a<x\le b\};$$

$$[a,b)=\{x\,|\,a\le x<b\};\ \ (-\infty,b]=\{x\,|\,x\le b\};\ \ [a,\infty)=\{x\,|\,a\le x\}.$$

Первый промежуток $[a,b]$ называют еще отрезком (сегментом), а второй (a,b) — интервалом. Есть и множество, не содержащее элементов. Это множество называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Функции с симметричным графиком. Четные, нечетные и периодические функции

Рассмотрим функцию $f: X \to \mathbb{R}$. Пусть множество $X \subset \mathbb{R}$ симметрично, то есть верно утверждение $\forall x \in X\left((-x) \in X\right)$.

Определение 1. Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *нечетной*, если

$$\forall x \in X\left(f(-x) = -f(x)\right).$$

Определение 2. Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется *четной*, если

$$\forall x \in X\left(f(-x) = f(x)\right).$$

Пример 1. Примером четной функции служит многочлен, содержащий только четные степени $\left(P_4(x) = 2x^4 + 4x^2 - 1\right)$, а многочлен, содержащий только нечетные степени $\left(P_7(x) = x^7 - 6x^5 - x\right)$, является нечетной функцией. Многочлен $\left(Q_4(x) = 2x^4 + 4x^3 - 6\right)$ не является ни четной, ни нечетной функцией.

Рассмотрим теперь функцию $f: X \to \mathbb{R}$. Допустим, что множество $X \subset \mathbb{R}$ для некоторого числа $T > 0$ обладает свойством: $\forall x \in X\left((x \pm T) \in X\right)$.

Определение 3. Функция называется *периодической*, если

$$\forall x \in X\left(f(x \pm T) = f(x)\right).$$

При этом число T называется *периодом* этой функции.

Пример 2. Стандартные примеры периодических функций — тригонометрические функции. Так, функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечное множество периодов: $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Заметим, что в данном случае есть *наименьший* период, равный π. Найдите функцию, у которой нет наименьшего периода. Кстати, такая функция встретится в нашем курсе лекций.

Задачи:

1. 2, 3, 10, 10.1, 23, 25, 34.
2. Записать бесконечные десятичные периодические дроби: 0,1(31); 0,(142857) в виде обыкновенных дробей.

3. Доказать, что $\sqrt{3}$; $\lg 3$ не являются рациональными числами.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt{3}+2$ или $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.
5. Найдите 2-значное приближение для произведения $\sqrt{2}\sqrt{3}$.

ЧАВО

1. *Поясните разницу между необходимыми и достаточными условиями?*

Рассмотрим утверждение: $A \Rightarrow B$ (если A, то B; пусть A, тогда B... и т. п.). В этой теореме A является достаточным условием для B, а B — необходимым условием для A. Думаю, что этого объяснения будет достаточно.

2. *Как определяется множество?*

Множество, функция, прямая и т. п. — базовые (основные) понятия математики. Каждое из таких понятий может быть определено аксиоматически, то есть задается не само понятие, а то, как с ним можно оперировать [6].

3. *Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?*

Может. Например, $\left(2-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)=3$.

4. *Как связаны понятия: последовательность стабилизируется и последовательность сходится?*

В замечании 9 мы показали, если последовательность стабилизируется, то эта последовательность сходится. Обратное не верно.

5. *Что такое сечение Дедекинда?*

Смотри [14].

6. *Почему разность не определяется с помощью последовательности $\left(x^{(k)}-y^{(k)}\right)$?*

В таком случае эта последовательность не обязана быть монотонной.

7. *Если не секрет, у какой периодической функции нет наименьшего периода?*

Например, у функции Дирихле (лекция 23).

ЛЕКЦИЯ 1

Комплексные числа

Рассмотрим множество всех упорядоченных пар действительных чисел (α,β), где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Если на этом множестве определить рассмотренные ниже арифметические операции, то такую пару действительных чисел называют *комплексным числом* и обозначают символом $z=(\alpha,\beta)$, а множество всех комплексных чисел — символом $\mathbb{C}$.

Точка плоскости может быть задана упорядоченной парой действительных чисел (в стандартном базисе). Значит, геометрической интерпретацией комплексного числа может служить точка плоскости или соответствующий радиус-вектор. Поэтому упорядоченную пару (α,β) можно называть *геометрической формой* комплексного числа z. Число α называется *действительной частью*, а β — *мнимой частью* комплексного числа $z=(\alpha,\beta)$. Обозначение: $\operatorname{Re} z=\alpha, \operatorname{Im} z=\beta$. Ось абсцисс будем называть *действительной* осью, а ось ординат *мнимой* осью. *Равенство* комплексных чисел равносильно совпадению соответствующих точек плоскости. Далее мы рассмотрим и другие формы комплексных чисел (алгебраическую, тригонометрическую, показательную). В разных ситуациях будет удобно пользоваться какой-то из перечисленных выше форм комплексных чисел.

Введем обозначение: $i=(0,1)$. Будем называть это число *мнимой единицей*. Действительные числа α отождествляются с парой $(\alpha,0)$. Поэтому можно считать, что действительные числа частный случай комплексных чисел $(\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$.

Операции сложения, вычитания комплексных чисел, а также умножения на действительное число определяются как соответствующие операции над векторами. Следовательно,

$$(\alpha_1,\beta_1)\pm(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1\pm\alpha_2,\beta_1\pm\beta_2),\gamma(\alpha,\beta)=(\gamma\alpha,\gamma\beta).$$

Но тогда нетрудно заметить, что можно писать

$$z=(\alpha,\beta)=(\alpha,0)+\beta(0,1)=\alpha+i\beta.$$

Итак, мы получили *алгебраическую* форму $\alpha+i\beta$ комплексного числа z, которой чаще всего и пользуются.

По определению полагаем

$$i^2=(0,1)(0,1)=-1.$$

Сохранив обычные законы для умножения (коммутативность, дистрибутивность, ассоциативность), определим *умножение* комплексных чисел по правилу

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2).$$

Деление комплексных чисел определяется как операция, обратная к умножению.

Число $\overline{z} = \alpha - i\beta$ называется *сопряженным* к числу $z = \alpha + i\beta$, а действительное число $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ называется модулем числа $z = \alpha + i\beta$. Отметим, что физики часто используют следующие обозначения: $i \equiv j$, $\overline{z} \equiv z^*$.

Легко устанавливается формула

$$z\overline{z} = |z|^2 .$$

Тогда нетрудно заметить, что частное комплексных чисел сводится к умножению действительного числа и двух комплексных по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{z_2\overline{z_2}} z_1 \overline{z_2}.$$

Правда, умножать и делить комплексные числа удобнее с помощью *тригонометрической формы* комплексных чисел. Будем называть *аргументом* числа $z = \alpha + i\beta$ угол, который образует соответствующий радиус-вектор с положительным направлением действительной оси (положительным считается направление против часовой стрелки, а по часовой стрелке — отрицательным). Введем обозначения: $\arg z = \varphi \in (-\pi, \pi]$, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. *Главным* значением аргумента называют символ $\arg z$. Тогда следующая формула

$$z = |z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right)$$

задает тригонометрическую форму комплексного числа.

Лемма 1. Справедлива формула Муавра $(n = 1, 2, \ldots)$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

◀ Используем метод математической индукции. Если $n = 1$, то формула Муавра очевидна. Пусть эта формула справедлива и при $n = k$. То есть

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi).$$

Умножим обе части этого равенства на $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} = \left(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)\right)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= \left(\cos(k\varphi)\cos\varphi) - \sin(k\varphi)\sin\varphi\right) + i\left(\cos(k\varphi)\sin\varphi + \sin(k\varphi)\cos\varphi\right) =$$
$$= \cos\left((k+1)\varphi\right) + i\sin\left((k+1)\varphi\right)$$

и формула Муавра доказана. ►

С учетом формул тригонометрии и формулы Муавра легко показать, что для произведения, частного и степени комплексных чисел справедливы формулы:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right);$$
$$z^n = \rho^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

Операция извлечения корня степени n из числа z определяется как операция, обратная к возведению в степень, то есть число w называется комплексным корнем степени n из числа z, если справедливо равенство $w^n = z$. Отметим, что таких корней будет ровно n, и вычисляются они по формуле

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Здесь $\sqrt[n]{|z|}$ — арифметическое значение корня.

Из геометрического представления комплексных чисел следуют неравенства

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

которые вытекают непосредственно из определений.

Теорема Безу. Если число a является корнем многочлена $P(x)$ $\left(P(a) = 0\right)$ с комплексными коэффициентами, то этот многочлен делится на разность $x - a$.

◄Рассмотрим многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Известна формула суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Если в эту формулу подставить $q=\dfrac{x}{a}$, то получим соотношение

$$x^n-a^n=\left(x-a\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}x+\ldots+x^{n-1}\right).$$

Значит, бином x^n-a^n при любом n делится на $x-a$. Из этого факта следует, что разность

$$P(x)-P(a)=\left(x^n-a^n\right)+a_{n-1}\left(x^{n-1}-a^{n-1}\right)+\ldots+a_1\left(x-a\right)$$

делится на $x-a$. Отсюда следует, что многочлен $P(x)$ делится на бином $x-a$, если $P(a)=0$.▶

Основная теорема алгебры. Любой многочлен $P(z)=c_0+...+c_nz^n$ с комплексными коэффициентами степени $n>0$ имеет ровно n комплексных корней (с учетом их кратности (см. ЧАВО)). При этом можно получить разложение

$$P(z)=c_n(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n).$$

Доказательство будет в курсе комплексного анализа.

Упражнение 1. Верно ли равенство

$$\arg\left(x+iy\right)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}?$$

***Задачи*:**

1. Пусть $(a+b+c)^n=\sum C_{k,l}a^kb^lc^{n-l-k}$. Найти $C_{k,l}$.
2. Доказать неравенство $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.
3. Расположите следующие числа в порядке возрастания: $\sqrt{ab},\dfrac{a+b}{2},\dfrac{2}{1/a+1/b}$. Здесь $a,b>0$.

ЧАВО

1. *Что больше: единица* (1) *или мнимая единица* (i)*?*

Для мнимых комплексных чисел (*мнимыми* называют числа вида $\left(\alpha,\beta\right)=z;\ \beta\neq0$, а *чисто мнимыми* — $\left(0,\beta\right)=z$) не определено понятие больше (меньше). Поэтому этот вопрос не имеет смысла.

2. *Основная теорема алгебры утверждает, что многочлен степени n имеет ровно n корней, но уравнение* $x^2-2x+1=0$ *имеет только один корень* $x=1$.

Каждый корень в основной теореме алгебры учитывается столько раз, какова его кратность. Кратность корня $x=1$ равна двум, потому что многочлен x^2-2x+1 делится на $(x-1)^2$. Если бы многочлен делился на выражение $(x-1)^3$, а на $(x-1)^4$ не делился, то кратность корня $x=1$ равнялась бы трем и т. д.

3. *Верно ли равенство:* $\sqrt{-1}=i$ *?*

Это равенство не верно! Потому что $\sqrt{-1}$ имеет два комплексных значения: $\left(\sqrt{-1}\right)_0=i; \left(\sqrt{-1}\right)_1=-i$.

ЛЕКЦИЯ 2

Важные неравенства

Надеемся, что большинству читателей известно определение абсолютной величины (модуля) действительного числа (обозначение $|x|$). Для остальных напомним основную формулу

$$|x|=\begin{cases} x, x\ge 0, \\ -x, x<0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля — расстояние между числом x на действительной прямой и началом отсчета 0.

Справедливы неравенства

$$|a+b|\le|a|+|b|,\ |a-b|\ge||a|-|b||.$$

◀ Первое неравенство вытекает из цепочки утверждений:

$$ab\le|ab|\Leftrightarrow(a+b)^2\le(|a|+|b|)^2\Leftrightarrow|a+b|\le|a|+|b|.$$

Второе неравенство следует из первого, если заметить, что

$$|(a-b)+b|<|a-b|+|b|.\ ▶$$

Замечание 1. По индукции легко получить неравенство

$$\left|a_1+\ldots+a_n\right|\le\left|a_1\right|+\ldots+\left|a_n\right|.$$

Замечание 2. Полезно (для дальнейшего) запомнить, что неравенство $|x|<a$ равносильно двойному неравенству $-a<x<a$, а неравенство $|x|>a$ равносильно двум неравенствам $x>a$ и $x<-a$.

Рассмотрим неравенство, которое называют *неравенством Бернулли*. Оно имеет вид

$$(1+x)^n\ge 1+nx\ (n\in\mathbb{N},\ x>-1). \tag{1}$$

◀ Доказательство этого неравенства проводится по индукции. Продемонстрируем последний шаг индукции:

$$(1+x)^n\ge(1+nx)\Rightarrow(1+x)^{n+1}\ge(1+nx)(1+x)\ge 1+(n+1)x\ ▶$$

Второе важное неравенство называется *неравенством Коши* (среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического):

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, x_i > 0. \qquad (2)$$

Его доказательство несколько сложнее предыдущего. Вначале установим лемму.

Лемма 1. Если сумма двух положительных чисел постоянна, то их произведение тем больше, чем меньше расстояние между ними. Произведение достигает максимума, когда эти числа совпадают.

◀ Введем обозначение для суммы двух чисел: $S = x + \tilde{x}, x > 0, \tilde{x} > 0$. Пусть $P = x\tilde{x}$. Тогда $P = x(S - x)$. Так как абсцисса вершины параболы $y = x(S - x)$ равна $S/2$, то отсюда и следует требуемое (x и $\tilde{x}$ расположены симметрично относительно $S/2$, поэтому, чем ближе они друг к другу, тем больше ордината параболы). ▶

Лемма 2. Пусть $x_i > 0, i = 1,\ldots,n$ и их сумма $S = x_1 + \ldots + x_n$ постоянна. Тогда произведение $P = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ будет максимальным, когда все $x_i = S/n$.

◀ Либо все $x_i = S/n$, либо найдутся два числа, таких, что справедливы неравенства: $x_1 < S/n, x_2 > S/n$. Между этими числами находится их среднее арифметическое и число S/n. Начнем сближать числа x_1, x_2, сохраняя постоянной их сумму. По лемме 1 произведение будет расти. Наступит момент, когда одно из чисел (то, к которому S/n ближе) совпадет с числом S/n. Теперь у нас одно из чисел равно S/n, общая сумма не изменилась, а произведение увеличилось. Можно продолжать этот процесс для остальных чисел, которые не равны S/n. За конечное число шагов получим максимальное произведение, в котором все множители равны S/n. ▶

Теорема 1. Для n положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ справедливо неравенство (2).

◀ Пусть $S = x_1 + \ldots + x_n$. Тогда по лемме 2 справедливо неравенство

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \le \frac{S^n}{n^n}.$$

То есть

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{S}{n} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

▶

Теорема 2 (*Коши — Буняковского*). Для $n \in \mathbb{N}$ и чисел $a_1,\ldots,a_n$; $b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

◀ Доказательство следует из неравенства

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - \lambda b_k\right)^2 = A - 2\lambda B + \lambda^2 C = M(\lambda),$$

где $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2; C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2; B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. При наших условиях дискриминант $d = B^2 - AC$ многочлена $M(\lambda)$ должен быть числом отрицательным или нулем, что и дает нужное неравенство. ▶

Замечание 3. Другое доказательство можно получить, если убедиться в справедливости тождества

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

Числовые последовательности

Определение 1. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *числовой последовательностью* (последовательностью). Пусть $f(n) = x_n$ — *n-й член последовательности*. Для последовательности используют обозначения: 1) $x_1, x_2, ..., x_n, ...$; 2) $\{x_n\}$; 3) (x_n).

Пример 1. Рассмотрим несколько примеров последовательностей.

1. Последовательность $x_n = a$, все члены которой совпадают друг с другом (постоянная последовательность).
2. Знакочередующаяся последовательность $x_n = (-1)^n$.
3. Последовательность можно задавать рекуррентно, когда каждый член последовательности, кроме нескольких первых, выражается с помощью предыдущих. Зададим, например, *последовательность Фибоначчи*: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Последовательность (α_n) будем называть *бесконечно малой*, если $\forall \varepsilon > 0$ только конечное множество членов последовательности удовлетворяют неравенству $|\alpha_n| \ge \varepsilon$. С помощью кванторов это определение записывается так: $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall n > r (|\alpha_n| < \varepsilon)$.

Определение 3. Последовательность (β_n) будем называть *бесконечно большой*, если $\forall \varepsilon > 0$ только конечное множество членов последовательности удовлетворяют неравенству $|\beta_n|\le\varepsilon$. Равносильным будет утверждение: $\forall\varepsilon>0\exists r>0\forall n>r(|\beta_n|>\varepsilon)$.

Замечание 4. Пусть M — некоторое положительное число. Так как ε это любое положительное число, то и Mε будет любым положительным числом. Поэтому замена в неравенствах ε на Mε (например, в определении бесконечно малой: $\forall\varepsilon>0\exists r>0\forall n>r(|\alpha_n|<M\varepsilon)$) приводит к равносильным определениям. Это замечание часто будет использоваться в дальнейшем.

Определение 4. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если найдется число $M>0$, что $\forall n(|x_n|\le M)$.

Лемма 3. Бесконечно малая последовательность (x_n) ограничена.

◀ Пусть $\varepsilon=1$. Тогда найдется натуральное число n_0, что для всех $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n|\le 1$. Полагая $M=1+\sum_{k=1}^{n_0}|x_k|$, получим при любом $n\in\mathbb{N}$ неравенство $|x_n|\le M$. Итак, лемма доказана. ▶

Лемма 4. Пусть (α_n) — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n\ne 0$. Тогда $\beta_n=1/\alpha_n$ является бесконечно большой последовательностью. Если (β_n), $\beta_n\ne 0$ — бесконечно большая последовательность, то $\alpha_n=1/\beta_n$ будет бесконечно малой последовательностью.

◀ Так как $|\alpha_n|\le\varepsilon\Leftrightarrow|\beta_n|\ge 1/\varepsilon=\varepsilon_1$, то отсюда и получаем требуемое.▶

Замечание 5. Под суммой и произведением последовательностей (x_n) и (y_n) мы понимаем соответственно последовательности (x_n+y_n) и (x_ny_n). Будем иногда писать бесконечно малая, подразумевая — бесконечно малая последовательность.

Лемма 5. Конечная сумма бесконечно малых является бесконечно малой.

◀ Доказательство следует из определения и замечания 4.▶

Лемма 6. Произведение бесконечно малой (α_n) на ограниченную последовательность (x_n) является бесконечно малой.

◀ Требуемое утверждение получим из неравенства $|\alpha_nx_n|<M\varepsilon$ и замечания 2.▶

Следствие 1. Произведение конечного множества бесконечно малых является бесконечно малой. Этот факт следует из леммы 3 и леммы 6.

Пример 2. Последовательность $x_n=q^n, |q|<1$, является бесконечно малой.

◄ Заметим, что для доказательства нам нужно было найти число *r,* которое фигурирует в определении 2. Можно считать, что $q > 0$. Тогда $q = 1/(1+h), h > 0$. Используя неравенство Бернулли (1), получим

$$q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Теперь, когда $n > r = \dfrac{1}{\varepsilon h}$, получим требуемое неравенство $q^n < \varepsilon$. ►

Пример 3. Последовательность $y_n = 1/n^k$, $k = 1, 2, \ldots$ является бесконечно малой.

◄ Доказательство простое. Прежде всего отметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, так как $n > r = \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Далее останется применить следствие 1. ►

Упражнение 1. Напишите определение неограниченной последовательности (в позитивном смысле).

Упражнение 2. Напишите определение последовательности, которая не является бесконечно малой (в позитивном смысле).

***Задачи*:**

1) $\sqrt{i} = ?$;
2) записать в тригонометрической форме $z = \sqrt{3} - i$;
3) изобразить $1 < |z + i| < 2$;
4) решить уравнение $z^2 + \overline{z} = 0$;
5) решить уравнение $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0$.

ЧАВО

1. *Какая разница между неограниченной последовательностью и бесконечно большой последовательностью?*

Последовательность $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots$ является неограниченной, но не бесконечно большой. Все бесконечно большие последовательности являются неограниченными.

2. *Бесконечно большая величина — это то, что больше любого числа?*

Бесконечно большая величина является функцией. Ее **значения** действительно могут быть сколь угодно большими (по модулю).

3. *Какой геометрический смысл неравенства Коши — Буняковского?*

Абсолютная величина скалярного произведения двух векторов в *n*-мерном пространстве не превосходит произведения длин этих векторов.

4. *Есть ли еще какие-то средние значения нескольких чисел, кроме среднего арифметического и среднего геометрического?*

Есть и другие средние значения. Например, среднее гармоническое:

$$\overline{x} = \left(\frac{1/x_1 + \ldots + 1/x_n}{n} \right)^{-1}.$$

ЛЕКЦИЯ 3

Сходящиеся последовательности

Определение 1. Последовательность (x_n) называется *сходящейся* (*сходится*), если найдется число a, такое, что последовательность $(x_n - a) = (\alpha_n)$ является бесконечно малой. При этом будем писать $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (читается: предел последовательности «икс эн» при «эн», стремящемся к бесконечности, равен «а») или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ (читается: последовательность «икс эн» стремится к «а» при «эн», стремящемся к бесконечности) и говорить, что последовательность (x_n) *имеет предел*, равный a. Если найти такого числа a нельзя, то говорят, что последовательность *расходится*. Вместо фразы «имеет предел» часто говорят «существует предел».

Замечание 1. Впервые символ lim для обозначения предела ввел швейцарский математик Симон Люилье в сочинении «Элементарное изложение высшего анализа» (1786 г.).

Замечание 2. Рассмотрим последовательность сумм

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3, \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots$$

из элементов (x_n). Если такая последовательность сумм сходится, то говорят, что *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится*, в противном случае говорят, что *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *расходится*.

Определение 2. Любой интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью* точки a. Пусть $\varepsilon > 0$. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ будем называть ε*-окрестностью* точки a и обозначать $U_\varepsilon(a)$.

Замечание 3. Можно определение 1 записать с помощью кванторов

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\exists a \forall \varepsilon > 0 \exists r \forall n > r (| x_n - a | < \varepsilon)).$$

Здесь r является действительным числом, а n — натуральным.

Замечание 4. Бесконечно малая последовательность сходится и ее предел равен нулю.

Определение 3. Окрестность точки a называется *ловушкой* последовательности, если все члены последовательности, начиная с некоторого номера, попадают в эту окрестность. Окрестность точки a называется *кормушкой* последовательности, если бесконечное множество членов последовательности принадлежат этой окрестности. Точка a называется *предельной точкой* последовательности, если любая ε-окрестность точки a является кормушкой последовательности.

Упражнение 1. Подумайте, как дать определение предела последовательности, пользуясь словом «ловушка».

Замечание 5. Последовательность является расходящейся, если для каждого числа найдется его окрестность, которая не является ловушкой для этой последовательности.

Пример 1. Покажем, что последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится.

◀ При любом a окрестность $U_{1/2}(a) = \left(-1/2 + a, 1/2 + a\right)$ не является ловушкой для этой последовательности, потому что в нее не попадают члены последовательности либо с четными, либо с нечетными номерами.▶

Замечание 7. Если последовательность бесконечно большая, то будем писать $x_n \to \infty$. При этом когда все члены последовательности положительные, начиная с некоторого номера, то пишут $x_n \to +\infty$. Аналогично, если отрицательные, начиная с некоторого номера, то пишут $x_n \to -\infty$.

Лемма 1. Справедливы два утверждения:

a) $\begin{cases} x_n \to a, \\ \overline{a} > a. \end{cases} \Rightarrow \left(\exists r_{\overline{a}} \forall n > r_{\overline{a}} \left(x_n < \overline{a}\right)\right);$

b) $\begin{cases} x_n \to a, \\ \underline{a} < a. \end{cases} \Rightarrow \left(\exists r_{\underline{a}} \forall n > r_{\underline{a}} \left(x_n > \underline{a}\right)\right).$

◀ Первое утверждение получим из определения, если возьмем $\varepsilon = \overline{a} - a$, а второе при $\varepsilon = a - \underline{a}$.▶

Замечание 8. Суть леммы в том, что когда некоторое число больше (меньше) предела, то все члены последовательности, начиная с некоторого номера, соответственно меньше (больше) этого числа.

Следствие 1. $\begin{cases} x_n \to a, \\ a \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \left(\exists r_0 \forall n > r_0 \left(|x_n| > |a|/2\right)\right).$

Следствие 2. Если постоянная последовательность $a, a, \ldots$ является бесконечно малой, то $a = 0$.

◀ Если предположить, что $a \neq 0$, то при $\varepsilon = |a|/2$ получим противоречие с определением бесконечно малой последовательности.▶

Следствие 3. Если некоторая последовательность (x_n) такова, что $\exists a \exists n_0 \forall n > n_0 \left(x_n = a\right)$, то такую последовательность называют *стационарной*. Эта стационарная последовательность сходится и ее предел равен a.

Лемма 2. Последовательность может иметь не более одного предела.

◀ $\begin{cases} x_n - a = \alpha_n, \\ x_n - a' = \alpha'_n \end{cases} \Rightarrow \alpha_n - \alpha'_n = a - a' \Rightarrow a - a' = 0.$ По следствию 2.▶

Лемма 3. Сходящаяся последовательность (x_n) ограничена.

◀ Следует из ограниченности бесконечно малой последовательности $(x_n - a) = (\alpha_n)$ (лекция 2, лемма 3). ▶

Лемма 4. Над сходящимися последовательностями можно производить арифметические операции, то есть верны утверждения:

$$\begin{cases} x_n \to a, \\ y_n \to b. \end{cases} \Rightarrow \left(x_n \pm y_n\right) \to \left(a \pm b\right);$$

$$\begin{cases} x_n \to a, \\ y_n \to b. \end{cases} \Rightarrow \left(x_n y_n\right) \to \left(ab\right);$$

$$\begin{cases} x_n \to a, \\ y_n \to b, y_n \neq 0, b \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \left(x_n / y_n\right) \to \left(a/b\right).$$

◀ Докажем последнее утверждение.

$$x_n / y_n - a/b = \left(\alpha_n + a\right) / \left(\beta_n + b\right) - a/b = \left(b\alpha_n - a\beta_n\right) / b y_n = A_n.$$

В силу следствия 1 получим, что $1/\left|y_n\right| < 2/|b|$ начиная с некоторого номера. Итак, выражение A_n является произведением ограниченной последовательности $\left(1/y_n\right)$ на бесконечно малую последовательность $\dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b}$. Тогда $\left(x_n / y_n\right) \to \left(a/b\right)$.▶

Упражнение 2. Может ли сумма сходящейся и расходящейся последовательности сходиться?

Упражнение 3. Может ли произведение сходящейся и расходящейся последовательности сходиться?

Упражнение 4. Докажите утверждение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = a.$$

Верно ли обратное утверждение?

Упражнение 5. Пусть любая окрестность точки a является кормушкой последовательности. Следует ли отсюда хотя бы одно из утверждений:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; 2) (x_n) — ограниченная последовательность.

Упражнение 6. Найдите ошибку в следующем рассуждении. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right) = 0.$$

Кроме того, отыщите правильный ответ.

***Задачи*:** а) 21, 42, 43, 44, 45, 96, 126, 127, 128, 129, 130; б) докажите, что каждый пятый член последовательности Фибоначчи (см. пример 1 лекции 2) делится на 5.

ЧАВО

1. *Как с помощью ε, δ дать определение расходящейся последовательности x_n?*

Надо каждый квантор заменить дополнительным $(\forall \leftrightarrow \exists)$ и взять отрицание утверждения. Получим следующее определение расходящейся последовательности: $\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall r > 0 \exists n > r(|x_n - a| \geq \varepsilon)$.

2. *Какая разница между понятиями «предел» и «предельная» точка?*

Множество предельных точек последовательности может быть даже бесконечным (лекция 6). Если предел последовательности существует, то он является единственной предельной точкой.

ЛЕКЦИЯ 4

Предельный переход в неравенствах

Здесь мы рассмотрим две теоремы о том, что нестрогие неравенства сохраняются при переходе к пределу. Отметим, что строгие неравенства являются частным случаем нестрогих неравенств.

Теорема 1. Пусть $x_n \to a, y_n \to b$ и $\forall n \in \mathbb{N}(x_n \leq y_n)$, тогда $a \leq b$.

◀ Применим «противный» метод. Пусть $a > b$. Тогда при $\varepsilon = (a-b)/2 > 0$ будем иметь для $n > n_0$ два неравенства: $x_n > a - \varepsilon = (a+b)/2, y_n < b + \varepsilon = (a+b)/2$. Этот факт следует из лекции 3 (лемма 1), но тогда $x_n > y_n$ для $n > n_0$. Получили противоречие с условиями теоремы. ▶

Упражнение 1. Приведите пример двух последовательностей (x_n) и (y_n), чтобы $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n < y_n)$, но $\lim x_n = \lim y_n$.

Теорема 2 (*о двух дружинниках*). Пусть $x_n \to a, y_n \to a$ и $x_n \le u_n \le y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $u_n \to a$.

◀ Для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $a - \varepsilon < x_n \le u_n \le y_n < a + \varepsilon$. Тогда $|u_n - a| < \varepsilon$ при достаточно больших значениях n. ▶

Замечание 1. В теоремах 1 и 2 достаточно проверять неравенства из условий теорем только для $n > n_0 \ge 1$. В теореме 2 x_n, y_n — «дружинники», a — «участок», а u_n — «преступник».

Пример 1. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,\ a > 1,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

◀Очевидно, что достаточно рассмотреть $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $a = c + 1,\ c > 0$. Тогда из формулы бинома Ньютона получим

$$a^n = (1+c)^n = 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2}c^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2.$$

Откуда следует неравенство $0 \le \dfrac{n}{a^n} \le \dfrac{M}{n-1}$, где $M = \dfrac{2}{(a-1)^2}$.

Тогда по теореме 2 получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0.$ Теперь надо только заметить, что $\dfrac{n^k}{a^n} = \left(\dfrac{n}{b^n}\right)^k,\ 1 < b = a^{1/k},\ k > 0.$ Откуда и вытекает формула (1).▶

Определение 1. Каждое из следующих обозначений:

$$\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; 0\cdot\infty; \infty-\infty; 1^\infty; 0^0; \infty^0$$

(где ∞ — условное обозначение бесконечно большой, а 0 — условное обозначение бесконечно малой) будем называть *неопределенностью*. При этом под символом $\frac{\infty}{\infty}$ понимаем отношение двух бесконечно больших, символ 1^∞ означает, что основание степени стремится к единице, а показатель к бесконечности, и т. п.

Монотонные последовательности. Вложенные отрезки. Грани

Напомним следующее определение.

Определение 2. Последовательность (x_n) называется *невозрастающей* (*убывающей*), если выполняются неравенства $x_{n+1} \le x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Последовательность (x_n) называется *неубывающей* (*возрастающей*), если выполняются неравенства $x_{n+1} \ge x_n$ $(x_{n+1} > x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Все перечисленные последовательности называют еще *монотонными*.

Теорема 3. Пусть последовательность (x_k) неубывающая и ограничена сверху, тогда эта последовательность сходится. Пусть последовательность (x_k) невозрастающая и ограничена снизу, тогда эта последовательность сходится.

◀ Достаточно доказать только первое утверждение. Потому что когда последовательность (x_k) невозрастающая и ограничена снизу, то последовательность $(-x_k)$ — неубывающая и ограничена сверху.

Когда $\forall k\left(x_k > 0\right)$, то это утверждение уже доказано (лемма 1 и замечание 9 из введения в анализ). При наших предположениях последовательность с общим членом $y_k = x_k + |x_1| + 1$ является возрастающей и положительной. Значит, последовательность (y_k) сходится. Тогда последовательность (x_k) также сходится, так как $x_k - y_k = const$.▶

Замечание 2. Предыдущая теорема верна, когда последовательность неубывающая (невозрастающая), начиная с некоторого номера.

Теорема 4 (*о вложенных отрезках*). Пусть имеется последовательность **вложенных** отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots.$$

Тогда найдется точка, принадлежащая всем отрезкам.

◀Так как последовательность a_n неубывающая и ограничена сверху $a_n < b_1$, то $\exists \lim a_n = a$. Последовательность b_n является невозрастающей и ограниченной снизу $b_n > a_1$, поэтому $\exists \lim b_n = b$. При этом $a \le b$ (теорема 1). Тогда любая точка $c \in [a, b]$ удовлетворяет условиям леммы.▶

Следствие 1. Если справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, то последовательность отрезков из леммы будем называть *стягивающейся*. В этом случае общая точка всех отрезков $c = a = b$ будет единственной.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — числовое множество, а $x \in X$ его элемент.

Определение 3. Число m называется *верхней гранью* (*нижней гранью*) множества X, если для всех x из множества X выполняется неравенство $x \le m$ $(x \ge m)$. При этом множество X называется ограниченным сверху (снизу). С помощью кванторов это утверждение для ограниченного сверху множества можно записать следующим образом: $\exists m \in \mathbb{R}\, \forall x \in X (x \le m)$.

Определение 4. Множество называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и ограничено снизу.

Определение 5. Наименьшая из верхних граней называется *точной верхней гранью*. Наибольшая из нижних граней называется *точной нижней гранью*. При этом точную верхнюю грань множества X обозначим символом $\sup X$ (читается как «супремум»), а точную нижнюю грань — символом $\inf X$ (читается как «инфимум»).

Замечание 3. Если $\sup X \in X$, то точную верхнюю грань обычно называют *максимальным* значением (элементом) множества X. Когда $\inf X \in X$, то аналогично точную нижнюю грань называют *минимальным* значением (элементом) множества X. Пример интервала $X = (a, b)$ показывает, что точные грани могут и не принадлежать множеству.

Замечание 4. Если множество не является ограниченным сверху, то полагают $\sup X = \infty$. Аналогично $\inf X = -\infty$, если множество не является ограниченным снизу.

Замечание 5 (критерий точной грани). Справедливы два утверждения:

1. Число $\overline{x}$ является точной верхней гранью множества X тогда и только тогда, когда $(\forall x \in X (x \le \overline{x})) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X (x > \overline{x} - \varepsilon))$.
2. Число $\underline{x}$ является точной нижней гранью множества X тогда и только тогда, когда $(\forall x \in X (x \ge \underline{x})) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X (x < \underline{x} + \varepsilon))$.

Теорема 5. Любое ограниченное числовое множество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани.

◄ Пусть множество X ограничено сверху числом m. Рассмотрим отрезок $[a, m] \equiv [a_1, b_1]$, который содержит хотя бы одну точку из множества X. Делим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Обозначим $[a_2, b_2]$ правую половину отрезка, если она содержит точку из множества X. В противном случае $[a_2, b_2]$ — левый отрезок. Делим опять отрезок $[a_2, b_2]$ пополам и обозначаем $[a_3, b_3]$ правый отрезок, если он содержит точку из множества X (иначе $[a_3, b_3]$ — левый отрезок). Продолжая процесс деления новых отрезков далее, получим последовательность стягивающихся отрезков:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots.$$

По следствию 1 из теоремы 4 есть точка c, принадлежащая всем отрезкам. Заметим, что по построению правее любого отрезка $[a_n, b_n]$ нет точек из множества X. Следовательно, точка c является верхней гранью множества X (иначе нашлась бы точка из множества X, которая находилась бы правее некоторого отрезка $[a_n, b_n]$). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется отрезок $[a_n, b_n]$, который лежит правее точки $c - \varepsilon$. Значит, найдется точка $x_n \in X$, что справедливо неравенство $c - \varepsilon < x_n \le c$. По замечанию 5 точка c является точной верхней гранью множества X. Если множество X ограничено снизу, то надо рассмотреть множество $Y = \{-x\}$. Это множество Y будет ограничено сверху и $\sup Y = -\inf X$. ►

Упражнение 2. Пусть $X \pm Y = \{x \pm y \,|\, \forall x \in X, \forall y \in Y\}$. Верны ли равенства:

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y; \ \sup(X - Y) = \sup X - \sup Y\,?$$

Теорема 6. Справедливы два утверждения.

1. Пусть последовательность (x_n) является неубывающей и ограниченной сверху. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n \{x_n\} = a.$$

2. Пусть последовательность (x_n) является невозрастающей и ограниченной снизу. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n \{x_n\} = b.$$

◄ Докажем первое утверждение. Пусть $a = \sup\{x_n\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists x_{n_\varepsilon} (x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon)$. Из условия, что последовательность неубывающая, уже для всех $n > n_\varepsilon$ имеем неравенство $x_n > a - \varepsilon$. Кроме того, $a = \sup\{x_n\} \Rightarrow x_n \le a < a + \varepsilon$. Итак, $\forall n > n_\varepsilon (|x_n - a| < \varepsilon)$. Первое утверждение доказано. Второе утверждение получим из первого заменой $x_n = -y_n$. При этом легко видеть, что $\inf\{x_n\} = -\sup\{y_n\}$. ►

Пример 2. Рассмотрим итерационную формулу, позволяющую вычислять корень квадратный из положительного числа. Эту формулу называют еще формулой Герона. Возьмем некоторое число $x_1 > 0$ (начальное приближение) и пусть

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right). \tag{2}$$

Так как

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}x_n + \frac{a}{2x_n} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}} \right)^2 \geq 0,$$

то последовательность (x_n) ограничена снизу $\left(x_n \geq \sqrt{a},\ n = 2,3,\ldots \right)$. Кроме того, эта последовательность убывает (при $n > 1$), ибо

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\frac{a - x_n^2}{x_n} \leq 0.$$

Итак, последовательность (x_n) сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = p$. Теперь можно перейти к пределу в равенстве (2). Получим квадратное уравнение

$$p = \frac{p}{2} + \frac{a}{2p}.$$

Решая это уравнение, находим

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

***Задачи*:** 46, 49, 51, 52, 56, 67.

ЧАВО

1. *Пусть* $x_n \to a, y_n \to b$ *и* $x_n < y_n; \forall n \in \mathbb{N}$, *верно ли тогда, что* $a < b$*?*

В этом случае можно только утверждать, что $a \leq b$. Рассмотрите две последовательности $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}$.

2. *Является ли неопределенностью* $\frac{0}{\infty}$ *и* $\frac{\infty}{0}$*?*

Нет. В первом случае у нас будет бесконечно малая величина, а во втором бесконечно большая величина.

3. *В некоторых учебниках встречается термин «строго возрастающая последовательность». Что это значит?*

В подобных учебниках должна быть пара терминов: возрастающая последовательность, строго возрастающая последовательность. Ей соответствует пара наших понятий: неубывающая последовательность, возрастающая последовательность. При этом не надо путать термины: неубывающая последовательность и не убывающая последовательность.

4. *Приведите примеры последовательности вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков.*

Последовательность отрезков $\left\{\left[0,\frac{1}{n}\right]\right\}$ является последовательностью стягивающихся отрезков. Эта последовательность стягивается к точке 0. Последовательность отрезков $\left\{\left[-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right]\right\}$ является последовательностью вложенных отрезков. Любая точка между 0 и 1 принадлежит всем отрезкам.

5. *Какая разница между точной верхней гранью и максимальным значением?*

Если у числового множества есть максимальное значение (максимум), то точная верхняя грань и максимальное значение совпадают. Интервал $(0,1)$ не имеет максимального значения, но точная верхняя грань у этого множества есть и она равна 1.

6. *Я беру последовательность стягивающихся интервалов* $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\supset(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\ldots\supset(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\supset\ldots$ *Оказывается, что у этих интервалов тоже есть общая точка* 0. *Почему же нет леммы о вложенных интервалах.*

Лемма о вложенных интервалах будет верна не всегда. Рассмотрите последовательность $(0,\frac{1}{2})\supset(0,\frac{1}{3})\ldots\supset(0,\frac{1}{n})\supset\ldots$

7. *В некоторых учебниках есть термин — точная верхняя граница. Что это такое?*

Можно записать тождество: точная верхняя грань ≡ точная верхняя граница.

ЛЕКЦИЯ 5

Важные пределы

Мы считаем, что каждый образованный человек должен знать следующие пределы последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, |q|<1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0, \alpha>0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0, |a|>1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

◄ Доказательство первых трех пределов можно найти в лекциях 2 и 4. Чтобы обосновать последний предел, достаточно рассмотреть случай $a>0$. Так как

$$x_n = \frac{a}{n}x_{n-1}, \qquad (*)$$

то, начиная с номера $n > a$, последовательность убывает и ограничена снизу нулем. Останется перейти к пределу в равенстве (*). ►

Замечание 1. При нахождении предела последовательности $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$ мы предварительно воспользовались теоремой о сходимости монотонной последовательности. А почему бы ни применить более простой «метод»? Допустим, что искомый предел равен x $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\right)$. Переходим в соотношении $x_n = \dfrac{a}{n} x_{n-1}$ к пределу. Получим равенство $x = x \cdot 0$, то есть $x = 0$. Без доказательства существования предела этот «метод» может привести к неправильному результату. Мы знаем (лекция 3), что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела. Если в равенстве $x_n = (-1)x_{n-1}$ перейти к пределу, то получим соотношение $x = -x$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = 0$?!

Рассмотрим еще три важных предела

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1; \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1; \ \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0.$$

◄ Чтобы доказать первый предел, воспользуемся неравенством Коши из лекции 2. Пусть $x_1 = \sqrt{n}$, $x_2 = \sqrt{n}$, $x_3 = 1, ..., x_n = 1$. Тогда

$$\frac{n + 2\sqrt{n} - 2}{n} \geq \sqrt[n]{n} \geq 1 \Rightarrow 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n} \geq 1.$$

Теперь из теоремы о двух дружинниках получим требуемое. Для доказательства второго предела можно воспользоваться неравенством $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{a} \geq 1$ при $n > a > 1$. Третий предел обоснуем по определению. Пусть $\varepsilon > 0$, $\bar{a} = 2^{\varepsilon} > 1$. Тогда по лемме 1 лекции 3 получим, что, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\sqrt[n]{n} < \bar{a}$. Но тогда $0 < \dfrac{\log_2 n}{n} < \varepsilon$. Осталось вспомнить определение предела.►

Число *e*

Рассмотрим две последовательности: $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Оказывается, обе последовательности монотонны.

Покажем, что последовательность (a_n) возрастает. Из неравенства Коши (лекция 2), когда $x_1 = 1 + 1/n, x_2 = 1 + 1/n, ..., x_n = 1 + 1/n, x_{n+1} = 1$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n+2}{n+1}\geq\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Докажем, что последовательность (b_n) убывает. В неравенстве Коши полагаем $x_1=1-1/n, x_2=1-1/n,...,x_n=1-1/n, x_{n+1}=1$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{n+1}\geq\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\leq\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$

Значит, последовательность (b_n) убывает.

Теперь легко получить для всех n два неравенства: $a_n<b_n\leq b_1$ и $b_n>a_n\geq a_1$. Тогда из лекции 4 (теорема 3) вытекает существование двух пределов: $\lim a_n$, $\lim b_n$. Более того, из равенства $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$ следует, что эти пределы равны.

Определение 1. Обозначим символом e общий предел этих последовательностей:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{1}$$

Замечание 2. Поскольку

$$\forall n\in\mathbb{N}\left(a_n<e<b_n\right),$$

то число e может быть вычислено с любой точностью $\left(e\approx 2,71828...\right)$. Чтобы получить m знаков после запятой числа e, надо брать $n=10^{m+1}$, так как

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right|<\frac{3}{n}.$$

Число e является одним из самых известных чисел математики.

Упражнение 1. Доказать, что

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\right). \tag{2}$$

Поэтому говорят, что число e является суммой следующего ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\equiv\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots;\ \left(0!=1\right).$$

Кстати, из формулы (2) получается более удобный способ приближенного вычисления числа e.

Определение 2. Функцию $f(x) = e^x \equiv \exp x$ называют *экспонентой*. Часто встречаются функции: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус.

Упражнение 2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

***Задачи*:** 47, 59, 77, 78, 81, 90, 148.

ЧАВО

1. *Можно ли задать число* π *с помощью ряда?*

Можно. Например, $\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 - \ldots$ Отметим только, что для вычисления числа π удобнее пользоваться другими методами. Запомните хорошее практическое приближение $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

Отдохнем ☺

Экзамен по математическому анализу. Студент все отвечает. Преподаватель, не глядя на студента, протягивает руку:

— Ну что ж, давайте книжку.

Студент, весь побледнев, достает из-под рубашки том Фихтенгольца (кто не знает — очень толстый учебник в трех томах).

Преподаватель (изумленно):

— Вообще-то я имел в виду зачетную книжку... А так, придете на пересдачу.

ЛЕКЦИЯ 6

Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности

Рассмотрим некоторую возрастающую последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$.

Определение 1. Пусть (x_n) — заданная последовательность. Тогда последовательность (y_n), определенная следующим образом: $y_n = x_{k_n}$, называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n).

Определение 2. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$, то число a называется *частичным пределом* (предельной точкой) последовательности (x_n).

Частичных пределов у последовательности может быть достаточно много.

Упражнение 1. Приведите пример последовательности, у которой частичным пределом является любое заданное действительное число. Подсказка — рассмотрите последовательность из ВСЕХ рациональных чисел.

Для нас наибольший интерес будут представлять два частичных предела: наибольший и наименьший.

Определение 3. Пусть последовательность (x_n) ограничена. Тогда наибольший из частичных пределов последовательности (x_n) называется *верхним пределом* и обозначается символом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Наименьший из частичных пределов последовательности (x_n) называется *нижним пределом* и обозначается символом $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Если последовательность неограниченна сверху, то будем писать $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \infty$. Когда последовательность неограниченна снизу, то пишут $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Лемма 1. Верхний и нижний пределы (конечные и бесконечные) всегда существуют и справедливы равенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} x_k\right); \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} x_k\right). \qquad (1)$$

◄ Можно рассматривать только ограниченные последовательности. Так как $\sup\limits_{k\ge n}(-x_k) = -\inf\limits_{k\ge n} x_k$, то достаточно обосновать первое равенство в (1). Рассмотрим последовательность $\sup\limits_{k\ge n} x_k = s_n$. Эта последовательность невозрастающая (точная верхняя грань множества не меньше точной верхней грани подмножества). Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\ge n} x_k\right) = s$. Докажем, что есть подпоследовательность, которая имеет предел равный s, и нет подпоследовательности с большим пределом.

Из определения s_n вытекает, что $\exists k_n\left(x_{k_n} \in \left(s_n - \dfrac{1}{n}, s_n\right]\right)$, причем $k_{n+1} > k_n$. Тогда подпоследовательность $\left(x_{k_n}\right) \to s$ является искомой.

Покажем теперь, что нет последовательности с большим, чем s, пределом. Предположим, что существует такая подпоследовательность $\left(x_{p_n}\right) \to \overline{s} = s + \varepsilon > s$. Тогда найдется $s_m < s + \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, начиная с некоторого номера N, для всех $n > N$ справедливо неравенство $x_{p_n} < s + \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, $s + \varepsilon = \lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} \le s + \frac{\varepsilon}{2}$. Получили противоречие с предположением. Лемма доказана.►

Упражнение 2. Приведите пример последовательности, для которой $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$.

Замечание 1. Два свойства полностью характеризуют верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$ (в чем легко убедиться «противным» методом):

а) $\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall n > r\ (x_n < a + \varepsilon)$;

б) найдется подпоследовательность x_{k_n}, которая стремится к a.

Аналогичное утверждение справедливо и для нижнего предела. Надо только в пункте а) писать $\left(\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \forall n > r\ \left(x_n > a - \varepsilon\right)\right)$.

Замечание 2. Из замечания 1 следует, что необходимым и достаточным условием существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является совпадение верхнего и нижнего пределов этой последовательности.

Упражнение 3. Верно ли равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(x_n + y_n\right) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(x_n\right) + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(y_n\right)$.

Упражнение 4. Докажите, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ не существует. (<u>Указание</u>. Если бы этот предел существовал, то такой же предел имели бы последовательности: $\sin 2n$; $\sin(n+1)$; $\sin(n+2)$; …).

Упражнение 5. Докажите, что из любой последовательности $\left(x_k\right)$ можно выделить монотонную подпоследовательность.

Теорема Больцано — Вейерштрасса

Теорема 1 (*Больцано — Вейерштрасс*). Если последовательность (x_n) ограничена, то она имеет сходящуюся подпоследовательность.

◄Так как последовательность ограничена, то для всех n справедливо неравенство $a_1 \le x_n \le b_1$. Делим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. Обозначим через $[a_2, b_2]$ ту половину, которая содержит бесконечное множество членов нашей последовательности $\left(x_n\right)$. Делим опять отрезок $[a_2, b_2]$ пополам и обозначаем $[a_3,b_3]$ отрезок, содержащий бесконечное множество членов последовательности (x_n). Продолжая процесс деления новых отрезков далее, получим последовательность стягивающихся отрезков:

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots.$$

По следствию из теоремы 4 лекции 4 найдется точка c, принадлежащая всем отрезкам. В силу построения отрезков (каждый из них содержит бесконечное множество членов нашей последовательности (x_n)), можно выбрать подпоследовательность $x_{k_n}\in[a_n,b_n], k_{n+1}>k_n$. Так как $\left|x_{k_n}-c\right|\le\left|b_n-a_n\right|\to 0$, то искомая подпоследовательность построена.►

Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности

Оказывается, установить сходимость последовательности можно, не зная чему равен предел.

Определение 4. Будем называть последовательность (x_n) *фундаментальной*, если

$$\forall\varepsilon>0\exists r\forall n>r\forall m>r\left(\left|x_n-x_m\right|<\varepsilon\right).$$

Теорема 2 (*Больцано — Коши*). Последовательность (x_n) сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

◄Пусть последовательность (x_n) сходится к a. Тогда $\forall\varepsilon>0\exists r>0\forall n>r\forall p\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases}\left|x_n-a\right|<\varepsilon/2,\\ \left|x_{n+p}-a\right|<\varepsilon/2.\end{cases}\Rightarrow\left|x_n-x_{n+p}\right|<\varepsilon.$$

Теперь нетрудно заметить, что последовательность (x_n) фундаментальна, ибо в определении 4 можно считать, что $n+p\equiv m>n$.

Предположим теперь, что последовательность (x_n) фундаментальна. Во-первых, покажем, что она ограничена. Пусть $\varepsilon=1$. Тогда $\exists r_0\forall m,n>r_0\left(\left|x_n-x_m\right|<1\right)$, то есть

$$-1+x_N<x_n<1+x_N,\ N=\left[r_0+1\right].$$

Итак, $|x_n|<M, M=1+|x_N|+\max\{|x_1|,\ldots,|x_{N-1}|\}$. Во-вторых, из теоремы Больцано — Вейерштрасса следует, что найдется подпоследовательность $\left(x_{k_n}\right)\to a$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\exists r>0\forall n>r\begin{cases}\left|x_{k_n}-a\right|<\varepsilon/2,\\ \left|x_{k_n}-x_n\right|<\varepsilon/2.\end{cases}\Rightarrow\left|x_n-a\right|\le\left|x_n-x_{k_n}\right|+\left|x_{k_n}-a\right|<\varepsilon.$$

Итак, $(x_n)\Rightarrow a$.►

Замечание 3. Тот факт, что последовательность (x_n) не является фундаментальной (расходится), можно записать следующим образом:

$$\exists\varepsilon>0\forall r>0\exists m>r\exists n>r\left(\left|x_m-x_n\right|\ge\varepsilon\right).$$

Поясним это утверждение. Должны найтись члены последовательности со сколь угодно большими номерами, расстояния между которыми больше фиксированной положительной постоянной.

Замечание 4. Можно показать, что определение 4 можно сформулировать и так:

$$\forall\varepsilon>0\exists N\forall n>N\left(\left|x_N-x_n\right|<\varepsilon\right).$$

Докажите равносильность этого определения и определения 4.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Довольно просто теперь установить, что последовательность $(-1)^n$ расходится. Достаточно заметить, что справедливо неравенство $\left|x_{n+1}-x_n\right|>1$ для всех *n*.

Пример 2. Последовательность $g_n=1+1/2+1/3+...+1/n$ кажется ограниченной, но

$$\left|g_{2n}-g_n\right|=\left|1/2n+...+1/(n+1)\right|>\left|1/2n+...+1/2n\right|>1/2.$$

Поэтому последовательность g_n расходится и является неограниченной (ведь она возрастает).

***Задачи*:** 72, 198, 207, 637.1, 637.2.

ЧАВО

1. *Подпоследовательность — это то, что останется от последовательности, когда из нее удалить несколько элементов (членов последовательности)?*

Это не совсем так. Лучше представить себе бесконечный ряд кресел с номерами $1,2,3,4,...$ (слева направо). В каждом кресле сидит какое-то число. Это и есть образ последовательности. Удалим из нескольких кресел числа так, что останется бесконечное множество чисел, сидящих в креслах. Теперь переместим в пустое кресло с наименьшим номером ближайшее (справа) число. Аналогичным образом заполним остальные пустые кресла. Все кресла будут заполнены! Теперь у нас есть новая последовательность (подпоследовательность исходной последовательности).

2. *Верно ли я буду искать верхний предел последовательности* (x_n)? *Строю следующую последовательность:* $y_1 = x_1$; $y_2 = \max(x_1, x_2)$; $y_3 = \max(x_1, x_2, x_3)$... *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ *и будет верхним пределом последовательности* (x_n).

Неверно. На самом деле надо строить последовательность: $\overline{y}_1 = \sup(x_1, x_2, x_3, ...)$; $\overline{y}_2 = \sup(x_2, x_3, x_4, ...)$; $\overline{y}_3 = \sup(x_3, x_4, x_5, ...)$... Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{y}_n$ и будет верхним пределом последовательности (x_n).

3. *Выходит, что множество сходящихся последовательностей совпадает с множеством фундаментальных последовательностей?*

Это верно. Заметьте, что в определении фундаментальной последовательности не фигурирует предел последовательности. Поэтому фундаментальность последовательности часто используется при доказательстве теорем.

ПЯТЬ ЗАПОВЕДЕЙ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

- Имейте запас из нескольких известных сходящихся и расходящихся последовательностей.
- Посмотрите, не будет ли последовательность (x_n) монотонной.
- Есть подозрения, что последовательность (x_n) расходится. Ищите две подпоследовательности с разными пределами.
- Для рекуррентных последовательностей сначала докажите сходимость, а потом ищите предел.
- Лемма о двух дружинниках помогает в разных ситуациях.

ЛЕКЦИЯ 7

Окрестности. Базы. Предел функции по базе

Пусть $f: X \to \mathbb{R}$. Мы хотели бы формализовать фразу: «если x приближается (стремится) к a, то $f(x)$ приближается (стремится) к α». Нас пока не интересует, с какой стороны x приближается к a. Поэтому можно считать $|x-a|$ характеристикой «близости» x и a. При этом хотелось бы, чтобы погрешность $|f(x)-\alpha|$ могла быть сделана сколь угодно малой, если выбрана нужная погрешность $|x-a|$. Для предела в точке a не имеет значения, чему равно $f(a)$. Поэтому будем считать, что значение

$f(a)$ не определено. Не путайте предел функции в точке a и значение функции в этой точке!

Определение 1. Если можно найти погрешность $|x-a|$, которая обеспечит нам любую заданную погрешность $|f(x)-\alpha|$, то будем говорить, что функция $f(x)$ стремится к α при x, стремящемся к a. Принято обозначать погрешность для аргумента буквой δ, а погрешность для функции буквой ε. Тогда краткая формулировка определения имеет следующий вид:

$$\exists\alpha\forall\varepsilon>0\exists\delta>0(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon).$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$. Говорят еще: функция $f(x)$ сходится к α при x, стремящемся к a, или функция $f(x)$ имеет предел (равный α при x, стремящемся к a).

Замечание 1. В определении 1 важную роль играют два интервала с центром в точках a и α. Эти интервалы называются окрестностями (точнее проколотой δ-окрестностью точки a и ε-окрестностью точки α). Если проанализировать определение, то можно заметить, что эти окрестности не обязательно брать симметричными. Важно только, чтобы в пересечении двух окрестностей содержалась окрестность. Множество окрестностей точки a называют базой (окрестностей).

Определение 2. Пусть X — некоторое множество, а $\mathbf{B}=\{B\}$ совокупность подмножеств множества $X\left(B\subset X\right)$, удовлетворяющая двум условиям: а) $\forall B\in\mathbf{B}(B\neq\varnothing)$; б) $\forall B_1,B_2\in\mathbf{B}\exists B_3\in\mathbf{B}(B_3\subset B_1\cap B_2)$. В этом случае множество $\mathbf{B}$ называется *базой* на множестве X. Элементы B базы $\mathbf{B}$ часто называют *окрестностями*.

Определение 3. Общее определение предела функции $f:X\to\mathbb{R}$ по базе $\mathbf{B}$:

$$\exists\alpha\forall\varepsilon>0\exists B\forall x\in B\left(\left|f(x)-\alpha\right|<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\lim_{\mathbf{B}} f(x)=\alpha.$$

Приведем примеры наиболее распространенных баз на множестве $\mathbb{R}$.

Пример 1. База $x\to a+$ (читается: «икс» стремится справа к a) состоит из окрестностей $U_\delta^+(a)=(a,a+\delta)$.

Пример 2. База $x\to a-$ (читается: «икс» стремится слева к a) состоит из окрестностей $U_\delta^-(a)=(a-\delta,a)$.

Пример 3. База $x\to a$ (читается: «икс» стремится к a) состоит из окрестностей $U_\delta^+(a)\cup U_\delta^-(a)$.

Пример 4. База $x\to+\infty$ (читается: «икс» стремится к плюс бесконечности) состоит из окрестностей $U_\delta^+(\infty)=(\delta,+\infty)$.

Пример 5. База $x \to -\infty$ (читается: «икс» стремится к минус бесконечности) состоит из окрестностей $U_\delta^-(\infty) = (-\infty, \delta)$.

Пример 6. База $x \to \infty$ (читается: «икс» стремится к бесконечности) состоит из окрестностей $U_\delta(\infty) = \{|x| > \delta\}$.

Замечание 2. Построим базу для предела последовательности. Пусть $X = \mathbb{N}$, тогда искомая база: $\mathbf{B}=\{B_n\}, B_n = \{n, n+1, ...\}$.

Пример 7. Как пользоваться базами из примеров 1–6. Пусть дана функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, тогда запись $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$ означает, что истинно высказывание:

$$\exists\alpha\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0(a < x < a + \delta \Rightarrow | f(x) - \alpha | < \varepsilon).$$

Кстати, в учебниках и задачниках встречается равносильное обозначение $x \to a \pm 0$ баз $x \to a \pm$.

Определение 4. Будем писать $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = \infty$, если истинно высказывание: $\forall\varepsilon > 0\exists B \in \mathbf{B}\forall x \in B(| f(x) | > \varepsilon)$.

Определение 5. Пусть $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = +\infty$, когда верно утверждение $\forall\varepsilon > 0\exists B \in \mathbf{B}\forall x \in B(f(x) > \varepsilon)$. Аналогично пишут $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = -\infty$, если $\forall\varepsilon > 0\exists B \in \mathbf{B}\forall x \in B(f(x) < -\varepsilon)$.

Замечание 3. Отметим следующее утверждение, которое сразу следует из соответствующих определений:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha, \\ \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \alpha. \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha.$$

Докажем теорему, которая сводит проблему существования предела функции к задаче нахождения некоторых пределов последовательностей. Эту теорему называют критерием Гейне.

Теорема 1 (*Гейне*). Соотношение $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$ справедливо тогда и только тогда, когда для любой последовательности (x_n), сходящейся к числу a, такой, что $x_n > a$, соответствующая последовательность $(f(x_n))$ сходится к числу α.

◀ *Необходимость*. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$. Тогда можно записать, что $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0(a < x < a + \delta \Rightarrow | f(x) - \alpha | < \varepsilon)$.

Для последовательности $(x_n) \to a, x_n > a$ по данному числу δ найдется $r > 0$, что для всех $n > r$ выполняется неравенство $a < x_n < a + \delta$, но тогда и $| f(x_n) - \alpha | < \varepsilon$. Первая часть теоремы доказана.

Достаточность. Предположим, что число α не является пределом функции $f(x)$ при $x \to a+$. Тогда найдется число ε_0 и последовательность (x_n), что справедливо утверждение:

$$0 < x_n - a < 1/n \Rightarrow | f(x) - \alpha | \geq \varepsilon_0.$$

Значит, $x_n \to a$, а $f(x_n)$ не стремится к α. Противоречие.►

Замечание 4. Мы привели доказательство для базы $x \to a+$. Очевидно, что соответствующий критерий Гейне справедлив и для следующих баз: $x \to a-$, $x \to a$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Например, в случае $x \to a$ надо проводить проверку для любой последовательности (x_n), сходящейся к числу *a*, такой, что $x_n \neq a$.

Определение 6. Две базы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ называются эквивалентными, если любой элемент базы $\mathbf{B}_1$ содержится в некотором элементе базы $\mathbf{B}_2$ и наоборот.

Замечание 5. Пусть базы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ эквивалентны. Тогда пределы $\lim\limits_{\mathbf{B}_1} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathbf{B}_2} f(x)$ существуют или не существуют одновременно.

Упражнение 1. Может ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ иметь предел только в одной точке?

***Задачи*:** 83, 88, 91, 98, 102, 103, 118, 123, 133.

ЧАВО

1. *Если в определении предела* $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$ *я напишу:* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ $(a < x < a + \delta \Rightarrow | f(x) - \alpha | < 100\varepsilon)$*, то будет ли это (число* 100*) ошибкой?*

Это будет равносильное определение! Вот если вы напишете, например, $\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 ...$ или $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 ...$, то это уже будет грубой ошибкой. Кстати, это будет новое определение, но другого понятия. Подумайте, какого именно?

2. *Почему в определении предела* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ *для переменной x берут проколотую окрестность* $\left(0 < |x - a| < \delta\right)$*?*

Это сделано для того, чтобы отличать значение функции в точке a и значение предела в этой точке. Так функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, а ее значение в нуле $f(0) = 0$.

3. *Можно ли в определении* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ *рассматривать только* $\varepsilon\le 1$.

Можно, так как окрестность, которая найдена для $\varepsilon=1$, годится и для любого $\varepsilon>1$.

4. *Как отличать понятия — последовательность сходится, последовательность имеет предел.*

Обычно говорят, что последовательность сходится, если она имеет конечный предел. Когда предел последовательности равен $\pm\infty,\infty$ (бесконечно большая последовательность), то не говорят, что последовательность сходится.

5. *Может ли база состоять из конечного набора множеств?*

Такие базы не представляют особого интереса. Например, база из трех отрезков: $[1,3]$, $[2,4]$, $[2,3]$ на множестве $[1,4]$. Предел по такой базе имеют только те функции, которые являются постоянными на отрезке $[2,3]$.

ЛЕКЦИЯ 8

Свойства предела функции

Некоторые определения и теоремы справедливы для любых баз.

Определение 1. Если $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* по данной базе. Когда $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x)=0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* по базе **B**.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *локально ограниченной* по базе $\mathbf{B}$, если найдется число M и элемент базы $B\in\mathbf{B}$, что $\forall x\in B(|f(x)|\le M)$.

Вообще говоря, слово «локально» будет означать, что данное свойство выполняется на некотором элементе базы (окрестности).

Рассмотрим несколько свойств у предела по тем базам, которые перечислены в лекции 7. Заметим, что они (свойства) справедливы и для любых баз.

Свойство 1. Если $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x)=\alpha$, то функция $f(x)$ локально ограничена по базе $\mathbf{B}$. ◄ Следует из определения предела. ►

Свойство 2. Функция не может иметь более одного предела по данной базе.

Свойство 3. Произведение локально ограниченной на бесконечно малую (по одной и той же базе) является бесконечно малой.

Свойство 4. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_i(x) = \alpha_i,\ i = 1,2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{\mathbf{B}}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \alpha_1 \pm \alpha_2$;

б) $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_1(x) f_2(x) = \alpha_1\alpha_2$;

в) $\lim\limits_{\mathbf{B}} f_1(x)/f_2(x) = \alpha_1/\alpha_2, f_2(x) \neq 0, \alpha_2 \neq 0$.

Свойство 5. Допустим, что локально выполняется неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$ и $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f_i(x)) = \alpha_i, i = 1,2$, тогда $\alpha_1 \le \alpha_2$ (то есть переход к пределу в нестрогом неравенстве сохраняет это неравенство).

Свойство 6 (*лемма о двух милиционерах*). Если $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = \lim\limits_{\mathbf{B}} h(x) = \alpha$ и справедливо неравенство $f(x) \le g(x) \le h(x)$, то $\lim\limits_{\mathbf{B}} g(x) = \alpha$.

◄Доказательство свойств 2–6 следует из критерия Гейне (лекция 7). ►

Свойство 7 (*критерий Коши*). Для того чтобы существовал $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = \alpha$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \mathbf{B} \forall x', x'' \in B(| f(x') - f(x'') |< \varepsilon).$$

◄Ограничимся случаем $x \to a+$. Для других баз доказательство аналогично.

Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$. Тогда по заданному числу $\varepsilon > 0$ найдется элемент базы $B = \{a < x < a + \delta\}$, что для всех $x \in B$ выполняется неравенство $| f(x) - \alpha |< \varepsilon / 2$. Значит, для всех $x', x'' \in B$ получаем

$$\left| f\left(x'\right) - f\left(x''\right) \right| \le \left| f\left(x'\right) - \alpha \right| + \left| \alpha - f\left(x''\right) \right| < \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Достаточность. Воспользуемся критерием Гейне. Пусть последовательность $x_n \to a, x_n > a$ и $B = (a, a + \delta)$.

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in B (| f(x'') - f(x') |< \varepsilon).$$

Теперь по заданному числу δ найдем r, что для всех $n > r$ выполняются неравенства: $| x_n - a |< \delta, x_n > a$. Тогда при всех $n, m > r$ выполняется неравенство $| f(x_n) - f(x_m) |< \varepsilon$. Значит, последовательность $\left(f(x_n)\right)$ является фундаментальной (лекция 6) и существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha$. Для любой другой последовательности (y_n), аналогично, должен существовать предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=\beta$, причем $\alpha=\beta$. Если бы это было не так, то последовательность $(z_n)=x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots \to \alpha$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ не существовал бы. Итак, по критерию Гейне получим, что $\exists \lim\limits_{x\to a+} f(x)=\alpha$. ►

Замечание 1. Критерий Коши часто используется в различных доказательствах.

***Задачи*:** 127-130, 231, 233, 234, 289, 312, 313.

ЧАВО

1. *У вас есть две теоремы. Одна теорема о дружинниках, а другая о милиционерах.*

Теорема о дружинниках относится к последовательностям, ибо дружинники передвигаются пешком (дискретно). Теорема о милиционерах относится к функциям, так как милиционеры могут воспользоваться автомобилем.

ЛЕКЦИЯ 9

Замечательный тригонометрический предел

Замечание 1. Ясно, что $\lim\limits_{x\to a} x=a$, ибо можно взять $\delta=\varepsilon$.

Замечание 2. Так как справедливо неравенство

$$\left|\left|f(x)\right|-\left|\alpha\right|\right|\le\left|f(x)-\alpha\right|,$$

то из существования $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ следует, что $\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)\right|=\left|\alpha\right|$.

Докажем одно вспомогательное неравенство.

Лемма 1. Для $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$x\cos x<\sin x<x<\operatorname{tg} x. \tag{1}$$

◄ Пусть дан сектор OAB единичного круга с дугой длины x, $0<x<\pi/2$. Рассмотрим два треугольника: один из треугольников

OAB вписан в сектор, а второй *OAT*, прямоугольный, содержит сектор, имея общий угол и общую сторону (рис. 1).

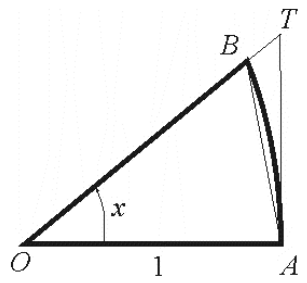

Рис. 1

Если сравнить площади этих трех фигур, то получим $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Отсюда и следует требуемое неравенство $\left(x < \operatorname{tg} x \Rightarrow x\cos x < \sin x\right)$. ►

Лемма 2.

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0, \lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

◄ Так как функции $|x|$ и $|\sin x|$ являются четными, то из леммы 1 получим, что в первой и четвертой четвертях справедливо неравенство

$$0 \le |\sin x| < |x|.$$

Кроме того,

$$0 \le |\cos x - 1| = 2\left|\sin^2\frac{x}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| < |x|.$$

Теперь осталось применить свойство 6 «лемма о двух милиционерах» (лекция 8). ►

Пример 1 (*первый замечательный предел*). Из лемм 1 и 2 вытекает, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \tag{2}$$

ибо $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Замечательный экспоненциальный предел

Лемма 3. Пусть $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$ и (k_n) — бесконечно большая последовательность из натуральных чисел. Тогда $\lim_{n\to\infty} f(k_n) = a$.

◀ Из условий теоремы, во-первых, следует утверждение:
$$\forall \varepsilon > 0 \exists r \in \mathbb{N} \forall n > r \left(\left| f(n) - a \right| < \varepsilon \right).$$
Во-вторых, по найденному r можно найти p, что $\forall n > p\left(k_n > r\right)$. Но тогда
$$\forall n > p\left(\left| f(k_n) - a \right| < \varepsilon \right),$$
а это и есть определение $\lim\limits_{n\to\infty} f(k_n) = a$. ▶

Пример 2 (второй замечательный предел). Докажем, что
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (3)$$
Отметим сначала (см. лекцию 5), что
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = e.$$
Рассмотрим некоторую последовательность (k_n) целых чисел, стремящуюся к бесконечности. Тогда по лемме 1
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = e; \ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = e.$$
Возьмем теперь последовательность (x_n) действительных чисел, стремящуюся к бесконечности. Пусть $k_n = [x_n]$. Тогда
$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$
Осталось применить критерий Гейне (лекция 7) и теорему «о двух дружинниках» для последовательностей (лекция 4).

Следствие 1. Пусть $x_n \to -\infty, y_n = -1 - x_n$. Тогда $y_n \to +\infty$ и
$$\lim_{x_n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{y_n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+y_n}\right)^{-1-y_n} = \lim_{y_n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n+1} = e.$$
Откуда по критерию Гейне получим
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+x^{-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+x^{-1}\right)^x = e.$$

Следствие 2. Пусть $x_n \to 0; y_n = \dfrac{1}{x_n} \to \infty$. Тогда
$$\lim_{x_n\to 0}\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{y_n\to\infty}\left(1+y_n^{-1}\right)^{y_n} = e.$$
Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$.

Пример 3. Покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=0, a>1, m\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Можно рассмотреть только случай $m\in\mathbb{N}$. Так как $\frac{x^m}{a^x} - = \left(\frac{x}{b^x}\right)^m, b>1$, то достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{b^x}=0$. Пусть последовательность $(x_n)\to\infty$. Обозначим $k_n=[x_n]$. Тогда, вспоминая предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{a^{n+1}}=0$ из лекции 5, получим

$$0\le\frac{x_n}{b^{x_n}}\le\frac{k_n+1}{b^{k_n}}=\frac{k_n+1}{b^{k_n+1}}b\to 0.$$

Из критерия Гейне (лекция 7) и следует требуемый результат.

Пример 4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0, \alpha>0. \tag{5}$$

Достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lg x}{x^\alpha}=0$, ибо логарифмы с разными основаниями отличаются постоянным множителем. Пусть некоторая последовательность (x_n) действительных чисел стремится к бесконечности. Тогда $(t_n)=(\lg x_n)\to+\infty$. Из предыдущего примера получаем

$$\frac{\lg x_n}{x_n}=\frac{t_n}{10^{t_n}}\to 0.$$

По критерию Гейне $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lg x}{x}=0$. Наконец, пусть $x_n{}^\alpha=y_n\to+\infty$.

$$\frac{\lg y_n}{y_n}=\alpha\frac{\lg x_n}{x_n{}^\alpha}\to 0.$$

Осталось опять сослаться на критерий Гейне.

***Задачи*:** 159, 175, 176, 401, 406, 407.

ЧАВО

1. *Некоторые пределы для вас замечательные, какие-то пределы для вас важные.*

Надо было бы все эти пределы называть важными, но почти общепринято называть указанные выше пределы замечательными.

ЛЕКЦИЯ 10

Непрерывные функции (локальные свойства)

Пусть задана функция $f : X \to \mathbb{R}$, где X — промежуток.

Определение 1. Функция f называется *непрерывной в точке* $a \in X$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. В противном случае функция называется *разрывной в этой точке*. В крайних точках промежутка (отрезок, полуинтервал) надо брать соответствующий односторонний предел.

Замечание 1 (непрерывность на языке $\varepsilon - \delta$). Непрерывность функции f в точке a означает, что для всех $x \in X$ должно быть истинно высказывание:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(\left| x - a \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon \right).$$

Определение 2. Функция f называется *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Замечание 2. Выясним геометрический смысл непрерывности**.** Пусть $P_{\delta,\varepsilon} = \left\{ (x, y) \middle| \left| x - a \right| < \delta, \left| y - f(a) \right| < \varepsilon \right\}$ — прямоугольник с центром в точке $(a, f(a))$. Непрерывность функции f в точке a означает, что найдется прямоугольник $P_{\delta,\varepsilon}$ любой заданной высоты ε, такой, что над и под этим прямоугольником нет точек графика $y = f(x)$.

Замечание 3. Символически непрерывность в точке a можно записать так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$.

Определение 3. Точка $a \in X$ называется точкой разрыва функции f, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ либо $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует.

Точки разрыва можно разбить на классы (классифицировать). Самой распространенной является следующая классификация:

Определение 4. a — точка *устранимого* разрыва функции f, если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, но $A \neq f(a)$. a — точка разрыва *первого рода* функции f, если

$$\begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to a+} f(x) = A, \\ \exists \lim\limits_{x \to a-} f(x) = B, \end{cases}$$

но $A \neq B$. Остальные точки, в которых функция не является непрерывной, называют точками разрыва *второго рода* (не существует хотя бы один из односторонних пределов или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$).

Введем одну полезную функцию, которую называют «сигнум» (по-латыни signum — знак).

Определение 5.

$$\operatorname{sgn} x \equiv \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пример 1. Функции $f_1(x) = |\operatorname{sgn} x|$; $f_2(x) = \operatorname{sgn} x$; $f_3(x) = \sin\frac{1}{x}$, $(f_3(0) = 0)$; имеют в точке $x = 0$, соответственно, устранимый разрыв, разрыв первого рода и разрыв второго рода. Кстати, отметим следующее тождество: $|x| \equiv x \cdot \operatorname{sgn} x$.

Воспользуемся свойствами пределов (лекция 8).

Свойство 1. Арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям. При делении $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ надо добавить (в точке непрерывности x_0) одно естественное ограничение $\left(g(x_0) \neq 0\right)$.

Свойство 2. Пусть X, Y, Z промежутки. Рассмотрим две функции $f: X \to Y, g: Y \to Z$. Допустим, что функция $f: X \to Y$ непрерывна в точке $a \in X$, а функция $g: Y \to Z$ непрерывна в точке $b = f(a) \in Y$. Тогда функция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

◄ Доказательство получим из следующей цепочки утверждений:

$$\forall (x_n) \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a) \Leftrightarrow \left(y_n = f(x_n)\right) \to \left(b = f(a)\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(y_n) \to g(b) \Rightarrow g\left(f(x_n)\right) \to g\left(f(a)\right).$$

При этом используется критерий Гейне (лекция 6).►

Замечание 4. Последнее свойство часто используется при нахождении пределов. Например, пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1; \quad \lim_{x\to a} \left(1 + f(x)\right)^{1/f(x)} = e.$$

Лемма 1. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, тогда справедливы два утверждения:

1) $f(x_0) > p \Rightarrow f(x) > p$ для всех x из некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$;

2) $f(x_0) < q \Rightarrow f(x) < q$ для всех x из некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$.

◀ Достаточно доказать первое утверждение. Оно следует из определения непрерывности при $\varepsilon = f(x_0) - p$.▶

Свойство 3 (сохранение знака непрерывной функции). Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то найдется окрестность $U_\delta(x_0)$, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ справедливо равенство $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$.

◀ Следует из леммы 1.▶

***Задачи*:** 413, 414, 416, 424, 425, 442, 457, 458, 470.

ЧАВО

1. *Чем отличаются локальные и глобальные свойства?*

Локальными называются свойства, которые справедливы в ***некоторой*** окрестности. Глобальными называются свойства, которые справедливы во всей области определения функции (то есть для ***всех*** окрестностей).

2. *Если взять сумму двух разрывных функций, то получится разрывная функция?*

Не обязательно. Например, $\left(x - f(x)\right) + \left(f(x)\right) = x$, где $f(x)$ — разрывная функция.

Отдохнем ☺

Когда требуется свести задачу к уже решенной (применить известный метод), то говорят: «Применим принцип чайника». Почему?

З а д а ч а. Дан пустой чайник. Необходимо вскипятить в нем воду. Решение нормального человека: налить воду в чайник, включить плиту, поставить чайник на плиту. Вода закипит.

Изменим условие задачи. Дан чайник с водой. Газ горит. Необходимо вскипятить воду.

Решение математика: вылить воду, потушить газ и свести задачу к уже решенной.

ЛЕКЦИЯ 11

Глобальные свойства непрерывных функций

Пусть задана непрерывная функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Множество непрерывных функций на промежутке P будем обозначать символом $C(P)$ (на отрезке — $C[a,b]$).

Есть несколько важных свойств непрерывных функций, которые справедливы на всей области определения непрерывной функции (глобальные свойства).

Теорема 1 (*Вейерштрасса-1*). Если функция *f* непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

◀ Применим «противный» метод. Пусть функция *f* неограниченна на этом отрезке. Тогда должна найтись последовательность (x_n), что справедливы неравенства $|f(x_n)| > n$. Так как $x_n \in [a,b]$, то по теореме Больцано — Вейерштрасса (лекция 6) найдется подпоследовательность $\left(x_{k_n}\right) \to x_0 \in [a,b]$. Но, с одной стороны, по непрерывности $f\left(x_{k_n}\right) \to f(x_0)$, а с другой — $\left|f\left(x_{k_n}\right)\right| > k_n$, $k_n \to \infty$. Полученное противоречие и доказывает ограниченность функции *f*.▶

Замечание 1. Из непрерывности функции *f* на <u>интервале</u> не следует, что функция ограничена на этом интервале. Упражнение: попробуйте указать то место, где доказательство теоремы 1 не проходит (для интервала).

Теорема 2 (*Вейерштрасса-2*). Если функция *f* непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдутся точки на этом отрезке, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

◀ Достаточно рассмотреть случай наибольшего значения. От противного. Пусть $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$ (существует по теореме 1) и для всех $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $f(x) < M$. Тогда, с одной стороны, функция $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ принимает сколь угодно большие значения. С другой стороны, функция $g(x)$ непрерывна и ограничена по теореме 1. Противоречие.▶

Теорема 3 (*теорема о промежуточном значении*). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда найдется точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = 0$.

◀ Можно считать, что $f(a) < 0, f(b) > 0$. Делим отрезок $[a,b] \equiv [a_1,b_1]$ пополам точкой $c = \dfrac{a+b}{2}$. Предполагаем, что $f(c) \neq 0$, иначе теорема доказана. Обозначим через $[a_2,b_2]$ тот из двух отрезков, для которого $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$. Далее делим пополам отрезок $[a_2,b_2]$ и проводим аналогичные рассуждения. Получим последовательность стягивающихся отрезков $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset ... \supset [a_n,b_n] \supset \ldots$, причем

$f(a_n)<0,\ f(b_n)>0,\ n\in\mathbb{N}$. По лемме о вложенных отрезках (лекция 4) найдется точка c, принадлежащая всем отрезкам. Но тогда

$$\left(a_n\to c\right)\wedge\left(b_n\to c\right)\Rightarrow\left(f(a_n)\to f(c)\right)\wedge\left(f(b_n)\to f(c)\right).$$

Так как $f(a_n)<0, f(b_n)>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)f(b_n)=f^2(c)\le 0$. Следовательно, $f(c)=0$. Доказательство завершено.►

Следствие 1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)\ne f(b)$. Тогда функция f принимает любое значение между $f(a)$ и $f(b)$.

◄ Пусть, например, справедливо неравенство $f(a)<\lambda<f(b)$. Тогда для функции $g(x)=f(x)-\lambda$ выполняются условия теоремы. Значит, найдется точка c, что справедливо равенство $g(c)=f(c)-\lambda=0$.►

Следствие 2. Если $f\in C[a,b]$, то $f([a,b])=[m,M]$, где m — наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а M — наибольшее значение этой функции на том же отрезке.

Монотонные функции. Точки разрыва монотонных функций

В следующем определении мы выделим четыре класса монотонных функций.

Определение 1. Функция $f:X\to\mathbb{R}$ называется *возрастающей* на множестве X, если

$$\forall x_1,x_2\in X\left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\right);$$

убывающей на X, если

$$\forall x_1,x_2\in X\left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\right);$$

неубывающей на X, если

$$\forall x_1,x_2\in X\left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)\right);$$

невозрастающей на X, если

$$\forall x_1,x_2\in X\left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\ge f\left(x_2\right)\right).$$

Любую из указанных функций называют *монотонной* на множестве X. Монотонные функции обладают рядом хороших свойств. Напомним обозначение: $\lim\limits_{x\to a\pm}f(x)=f(a\pm)$.

Лемма 1. Пусть функция f — неубывающая на отрезке $[a,b]$. Тогда $\forall x_0\in(a,b)$ справедливы равенства:

$$f(x_0-)=\sup_{x<x_0}f(x); f(x_0+)=\inf_{x>x_0}f(x). \qquad (1)$$

При этом
$$f(x_0-)\le f(x_0)\le f(x_0+). \tag{2}$$
Если функция f — невозрастающая на отрезке $[a,b]$, то $\forall x_0\in(a,b)$ справедливы равенства:
$$f(x_0-)=\inf_{x<x_0} f(x); f(x_0+)=\sup_{x>x_0} f(x), \tag{3}$$
и неравенство
$$f(x_0+)\le f(x_0)\le f(x_0-). \tag{4}$$

◀ Как обычно, достаточно доказать первую часть леммы. Пусть функция f — неубывающая на отрезке $[a,b]$. Неубывающая на отрезке $[a,b]$ функция ограничена $\big(f(a)\le f(x)\le f(b)\big)$. Обозначим $A=\sup\limits_{x<x_0} f(x)$. Тогда $\forall x<x_0(f(x)\le A)$. Кроме того, $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0(f(x_0-\delta)>A-\varepsilon)$ (лекция 4). Из монотонности функции f следует, что $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ выполняется неравенство $f(x)>A-\varepsilon$. Итак, для всех $x\in(x_0-\delta,x_0)$ имеем неравенство
$$A-\varepsilon<f(x)\le A<A+\varepsilon.$$
Это и означает (по определению), что $f(x_0-)=A=\sup\limits_{x<x_0} f(x)$. Первое из равенств (1) доказано. Второе доказывается аналогично. Так как $\forall x<x_0(f(x_0)\ge f(x))$, то $f(x_0)\ge A$. Откуда и следует неравенство (2).▶

Следствие 3. Монотонная функция может иметь разрывы только первого рода.

◀ Из неравенства (2) или неравенства (4) следует, что устранимых разрывов и разрывов второго рода у монотонной функции быть не может.▶

Следствие 4. [illegible] монотонной функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ [illegible], чтобы она принимала все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

◀ Достаточно рассмотреть случай неубывающей функции f. Необходимость вытекает из следствия 1. Достаточность докажем от противного. Пусть функция принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$, но некоторая точка x_0 является точкой разрыва. Тогда либо $f(x_0)\ne f(x_0+)$, либо $f(x_0)\ne f(x_0-)$. Достаточно рассмотреть первый случай. Возьмем $l\in(f(x_0),f(x_0+))$. Тогда (напомним, что $f(x_0+)$ не больше значений функции справа от x_0, а $f(x_0)$ не меньше всех значений функции слева) функция f не принимает значение l. Противоречие.▶

Теорема 4. Если функция f является непрерывной и возрастающей (убывающей), то она имеет непрерывную обратную функцию f^{-1}.

◄ Пусть функция f является возрастающей. Тогда она инъективна (введение в анализ). По следствию 4 функция f взаимно однозначная. Значит, есть обратная возрастающая функция f^{-1}. Непрерывность вытекает опять из следствия 4.►

Упражнение 1. Найдите все корни уравнения

$$x^5 + x - 1 = 0$$

с точностью до 0,1.

***Задачи*:** 224, 225, 471, 474, 506, 510, 515, 518, 542.

ЧАВО

1. *Теорема Вейерштрасса утверждает, что функция непрерывная на отрезке ограничена. Я просмотрел много функций непрерывных на интервале, и они все ограничены. Может быть, теорему можно обобщить?*

Обобщить теорему не удается. Рассмотрите функцию $y = \dfrac{1}{x}$ на интервале $(0,1)$.

2. *Первая теорема Вейерштрасса следует из второй. Может быть, вторую только и надо доказывать?*

Доказательство второй теоремы использует первую теорему. Кстати, обе теоремы не верны для интервалов и полуинтервалов.

3. *Можно ли определить непрерывную функцию, как функцию, которая принимает любое промежуточное значение?*

Функция $y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R}$ принимает все значения, но является разрывной. Есть простые примеры функций, у которых разрывы первого рода, но они принимают любое промежуточное значение. Кстати, **монотонную** непрерывную функцию так определить можно. Мы этот факт доказали.

4. *Какая разница между не убывающими и неубывающими функциями?*

Все функции, которые не являются убывающими, будут не убывающими. Например, возрастающие функции.

ЛЕКЦИЯ 12

Элементарные функции

Определение 1. *Простейшими элементарными функциями* называются следующие функции: $c; x^b; a^x; \log_a x; \sin x; \cos x; \arcsin x; \operatorname{arctg} x$.

Определение 2. Арифметические операции (+, –, ×, ÷) и операцию композиции $\big((f \circ g)(x)\big)$ будем называть *основными* операциями над функциями.

Определение 3. Функции, которые можно получить из простейших элементарных с помощью конечного множества основных операций, называются *элементарными функциями*.

Докажем, что элементарные функции непрерывны в области определения. Достаточно обосновать непрерывность простейших элементарных функций (лекция 10).

Непрерывность функции $\sin x$ следует из неравенства

$$|\sin x - \sin x_0| \le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x - x_0|; \delta = \varepsilon.$$

Непрерывность функции $\cos x$ получается аналогично.

Функции $\arcsin x, \arccos x$ непрерывны как обратные к монотонным возрастающим функциям.

Рассмотрим функцию a^x, $a > 0$, $a \ne 1$. Сначала докажем непрерывность этой функции в точке $x = 0$ справа. Рассмотрим любую последовательность $(x_n) \to 0+$; $x_n < 1$. Тогда найдется последовательность целых чисел $(k_n) \to +\infty$, такая, что выполняются неравенства

$$a^{\frac{1}{k_n+1}} \le a^{x_n} \le a^{\frac{1}{k_n}}.$$

Известно (лекция 5), что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$. По критерию Гейне (лекция 7) отсюда следует непрерывность функции a^x в точке $x = 0$ справа. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1$. Значит, непрерывность слева в нуле получим аналогично. Так как при $\Delta x \to 0$

$$\left|a^{x+\Delta x} - a^x\right| = a^x\left|a^{\Delta x} - 1\right| \to 0,$$

то функция a^x непрерывна в области определения.

Функция $\log_a x$ непрерывна как обратная к монотонной возрастающей функции a^x.

Так как $x^a = e^{a\ln x}$, то функция $y = x^a (x>0)$ непрерывна в области определения (композиция непрерывных функций). Непрерывность функций $y = x^n, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ следует из непрерывности функции $y = x, x \in \mathbb{R}$.

Основной результат этого раздела — все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Новые основные пределы функций

К основным пределам (лекция 9) добавим еще несколько.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (1)$$

◀ $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left((1+x)^{1/x}\right) \to \ln e = 1$ при $x \to 0$.▶

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1. \qquad (2)$$

◀Обозначим $f(x) = e^x - 1 \to 0, x \to 0$; $g(y) = \dfrac{y}{\ln(1+y)}, y \to 0$. Тогда

$$g(f(x)) = \frac{e^x - 1}{x} \to 1, x \to 0.$$

Что и требовалось.▶

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \qquad (3)$$

◀Этот предел сводится к своему частному случаю (2) заменой $x\ln a = t \to 0$.▶

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda - 1}{x} = \lambda. \qquad (4)$$

◀Пусть $f(x) = \lambda\ln(1+x)$; $g(y) = \dfrac{e^y - 1}{y}$. Тогда

$$g(f(x)) = \frac{(1+x)^\lambda - 1}{\lambda\ln(1+x)} \to 1, x \to 0,$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda - 1}{x} = \lim_{x\to 0} g(f(x))\frac{\lambda\ln(1+x)}{x} = \lambda.$$

Равенство (4) доказано.▶

***Задачи*:** 593–597, 603, 604, 614, 620.

ЧАВО

1. *Вы дали определение элементарных функций. Мы часто пользуемся функцией* $y = |x|$. *Она будет элементарной?*

Да, ибо $|x| = \sqrt{x^2}$. Вообще-то можно считать, что элементарные функции это те, свойства которых вам хорошо знакомы.

Отдохнем ☺

Как ловят слона в Африке?

Математик: едет в Африку, устраняет все, что не является слоном, и ловит слона как остаток.

Опытный математик: будет сначала пытаться доказать существование какого-либо слона, прежде чем приступит к его поиску.

Профессор математики: доказывает существование определенного слона и перекладывает затем охоту и поимку слона на группу своих студентов.

ЛЕКЦИЯ 13

Сравнение бесконечно малых. Асимптотические формулы

В современной математике и физике часто применяются следующие методы: метод возмущений, метод пограничного слоя, метод локальной линеаризации, метод малого параметра, метод осреднения, метод перевала и т. п. Все эти методы являются разновидностями асимптотических методов (методов получения асимптотических формул).

Вначале дадим несколько определений, в которых и появляются асимптотические формулы.

Определение 1. Пусть $\exists K > 0 \forall t \in E(|f(t)| \le K|g(t)|)$. Тогда будем писать $f(t) = O(g(t)),\ t \in E$ (читается: O большое).

Определение 2. Если в определении 1 $E = \dot{V}(a)$ — некоторая проколотая окрестность точки a, то будем писать: $f(t) = O(g(t)),\ t \to a$.

Определение 3. Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists \dot{V}(a) \forall t \in \dot{V}(a)(|f(t)| \le \varepsilon |g(t)|)$. Тогда будем писать: $f(t) = o(g(t)),\ t \to a$ (читается: o малое).

Определение 4. Будем говорить, что две функции *асимптотически сравнимы*, и писать $f(t) \asymp g(t)(t \in E)$ или $f(t) \asymp g(t)(t \to a)$, если одновременно выполняются две соответствующие асимптотические формулы: $f(t) = O(g(t)),\ g(t) = O(f(t))$.

Определение 5. Функцию $f(t)$ будем называть *асимптотически равной* функции $g(t)$ в точке a (*эквивалентной* в точке a), если справедливо равенство

$$f(t)-g(t)=o(g(t)),\ t\to a.$$

Обозначение: $f(t)\sim g(t),\ t\to a.$

Определение 6. Последовательность функций $(f_n(t)), t\in E, n=0,1,...$ называется *шкалой* (*асимптотической последовательностью*) при $t\to a$, если для всех $n\in\mathbb{Z}$

$$f_{n+1}(t)=o(f_n(t)),\ t\to a. \tag{1}$$

Определение 7. *Асимптотическим разложением* функции $f(t)$ по шкале $(f_n(t))$ будем называть символическую запись

$$f(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nf_n(t),\ t\to a, \tag{2}$$

если справедливо счетное множество равенств

$$f(t)-\sum_{n=0}^{N}a_nf_n(t)=o(f_N(x)),\ t\to a,\ N=0,1,... \tag{3}$$

При этом $\sum_{n=0}^{\infty}a_nf_n(t)$ называется *асимптотическим рядом* (*асимптотическим разложением*) функции $f(t)$ по шкале $(f_n(t))$.

Замечание 1. Отметим, что равенства (3) эквивалентны следующим:

$$f(t)-\sum_{n=0}^{N}a_nf_n(t)=O(f_{N+1}(t)),\ t\to\infty,\ N=0,1,... \tag{4}$$

Замечание 2. Для асимптотического ряда возможны следующие варианты: а) ряд сходится к функции $f(t)$; б) ряд сходится, но не к функции $f(t)$; в) ряд расходится. Все три варианта реализуются (см. еще замечание 2 лекции 3).

Пример 1. Наиболее важные примеры асимптотических последовательностей дают степенные функции. Вот три примера: $(t^n), t\to 0; (t^{-n}), t\to\infty; (t-a)^n, t\to a$. Такие последовательности будем называть степенной асимптотической шкалой в окрестности соответствующей точки.

Пример 2. Из основных пределов (лекция 9, лекция 12) получаются следующие основные асимптотические разложения (при $x\to 0$):

$$1)\ \sin x=x+o(x);\ 2)\ \cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2);\ 3)\ \ln(1+x)=x+o(x^2);$$

$$4)\ a^x=1+x\ln a+o(x);\ 5)\ (1+x)^{\lambda}=1+\lambda x+o(x).$$

Пример 3. С помощью основных разложений из примера 2 можно вычислять многие пределы. Так, например $\left(x = \frac{1}{n} \to 0\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[9]{n+1} - \sqrt[9]{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[9]{n}\left(\sqrt[9]{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[9]{n}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{1}{n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0.$$

Упражнение 1. Пусть $\alpha(x) \to 0$. Тогда:

1) $o(\alpha(x)) + o(\alpha(x)) = o(\alpha(x))$;

2) $o(\alpha(x)) + O(\alpha(x)) = O(\alpha(x))$;

3) $O(\alpha(x)) + O(\alpha(x)) = O(\alpha(x))$;

4) $o(o(\alpha(x))) = o(\alpha(x))$.

Указание. Напоминаем, эти равенства надо понимать как равенства между множествами функций.

Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение 8. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in X \left(|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\right).$$

Теорема 1 (*Кантор*). Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она является равномерно непрерывной на этом отрезке.

◀ Предположим, что функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ не является равномерно непрерывной на отрезке $X = [a,b]$. Тогда (советуем вспомнить правило переноса знака отрицания через кванторы из введения в анализ)

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n', x_n'' \in X \left(\left|x_n' - x_n''\right| < 1/n \wedge \left|f\left(x_n'\right) - f\left(x_n''\right)\right| \geq \varepsilon_0\right).$$

Последовательность (x_n) ограничена. Значит, по теореме Больцано — Вейерштрасса (лекция 6) найдется некоторая подпоследовательность $\left(x_{k_n}'\right) \to x_0 \in [a,b]$. При этом

$$\left|x_{k_n}' - x_{k_n}''\right| < 1/k_n \to 0,\ n \to \infty,$$

а тогда $\left(x_{k_n}''\right) \to x_0$. Из непрерывности функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ получим

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_{k_n}{}'\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_{k_n}{}''\right) = f(x_0).$$

Но этот факт противоречит неравенству $\left|f\left(x_{k_n}{}'\right) - f\left(x_{k_n}{}''\right)\right| \ge \varepsilon_0$.▶

Упражнение 2. Подумайте, почему доказательство будет неверно для интервала.

Пример 4. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на множестве $\mathbb{R}$. Рассмотрим следующие две последовательности точек: $x_n = n$, $x_n^{'} = n + \dfrac{1}{n}$. Тогда $\left|x_n - x_n^{'}\right| = \dfrac{1}{n}$, а $\left|f\left(x_n\right) - f\left(x_n^{'}\right)\right| > 1$. Поэтому и нет равномерной непрерывности.

***Задачи*:** 369, 371, 675, 699, 720, 731, 736, 741–742, 744.

ЧАВО

1. *Что такое асимптотическая формула?*

Суть асимптотической формулы в том, что сложную функцию в окрестности некоторой точки (или на некотором множестве) можно приближенно заменить более простой функцией. Определения 1–7 дают примеры асимптотических формул. Асимптотическое разложение — счетное множество асимптотических формул, таких, что каждая последующая уточняет предыдущую.

2. *Странное равенство:* $o(1) + o(1) = o(1)$?

Это равенство означает, что сумма двух бесконечно малых является бесконечно малой. Надо еще иметь в виду, что асимптотические равенства не являются симметричными. Так можно написать $o(1) = O(1)$, но нельзя писать $O(1) = o(1)$. Точнее было бы писать $o(1) \subset O(1)$, то есть бесконечно малые величины принадлежат классу ограниченных величин, но так не принято писать.

3. *Как понимать, что функция неравномерно непрерывна?*

Лучше (и правильнее!) будет говорить о функциях, которые не являются равномерно непрерывными, но непрерывны в каждой точке промежутка. У таких функций в каждой точке для некоторого $\varepsilon > 0$ найдутся разные $\delta > 0$, но среди них (δ) не будет наименьшего, а точнее их точная нижняя грань будет равна нулю.

4. *Что такое символы Ландау?*

Символы Ландау — это $O, o, \sim$.

ПЯТЬ ЗАПОВЕДЕЙ ДЛЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

- Предел функции и предел последовательности связаны критерием Гейне, но для доказательства существования предела функции надо просмотреть ВСЕ последовательности, которые сходятся к предельной точке, а для доказательства отсутствия предела функции достаточно найти ОДНУ расходящуюся последовательность.
- Надо знать важные пределы.
- Ищите неопределенности и избавляйтесь от них.
- Используйте композиции непрерывных функций.
- Применяйте важные асимптотические равенства.

ЛЕКЦИЯ 14

Производная. Односторонние производные. Связь непрерывности и дифференцируемости

Рассмотрим функцию $f : X \to \mathbb{R}$, X — промежуток. Обозначения:

$$y = f(x); x - x_0 = \Delta x = h; f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)(h) \equiv \Delta f.$$

Определение 1. Если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0), \tag{1}$$

то он называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0. В научной и учебной литературе для производной используются разные обозначения: $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = y'(x_0)$.

Определение 2. Если существует

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f_+'(x_0), \tag{2}$$

то он называется *правой производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0, а предел

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f_-'(x_0) \tag{3}$$

называется *левой производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Замечание 1. Производная в точке существует тогда и только тогда, когда существуют и совпадают обе односторонние производные. Это утверждение следует из свойств односторонних пределов (лекция 7).

Замечание 2. Если $f_+'(x_0) = \pm\infty, f_-'(x_0) = \pm\infty$, то говорят, что соответствующая производная равна $\pm\infty$.

Пример 1. Рассмотрим линейную функцию $f_a(x) = ax + b$, для которой, пользуясь только определением, можно вычислить производную в любой точке области определения. Так как $\Delta f_a = a\Delta x$, то $f_a'(x) \equiv a$. В частности, производная постоянной функции во всех точках равна нулю $\left(f_0'(x) \equiv 0\right)$. Функция $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$, так как $f_+'(0) = 1$, а $f_-'(0) = -1$ (см. замечание 1).

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, когда справедливо представление

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0 \tag{4}$$

для некоторой постоянной $A \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$. При этом $A = f'(x_0)$.

◀ Формулу (4) можно записать в равносильной форме

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0), x \to x_0$$

или в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\left(f(x) - f(x_0)\right) - A\left(x - x_0\right)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

Отсюда и следует требуемое.▶

Следствие 1. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке, так как из представления (4) следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Пример функции $f\left(x\right) = \left|x\right|$ показывает, что обратное утверждение неверно. Эта функция непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

Касательная. Односторонние касательные

Рассмотрим дифференцируемую в точке $x_0 \in X$ функцию $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение 4. Прямая линия, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

называется *секущей* к графику функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке x_0(в зависимости от выбора переменной x получим бесконечное множество секущих). Если x стремится к x_0, то получим прямую, заданную уравнением

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{5}$$

Такая прямая называется *касательной* к графику функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке x_0.

Определение 5. Прямые линии, которые задаются уравнениями

$$y = f_+'(x_0)(x - x_0) + f(x_0); y = f_-'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

называются, соответственно, *правой и левой касательными* к графику функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке x_0.

Замечание 3. Если $f'(x_0) = \pm\infty$, то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной* касательной в точке x_0.

Определение 6. Рассмотрим две линии, которые являются графиками дифференцируемых функций. Пусть эти линии пересекаются в точке $x = x_0$. *Углом* между такими линиями в точке пересечения называется угол между соответствующими касательными в точке пересечения.

Дифференциал

Определение 7. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, тогда линейная функция $h \mapsto Ah$ $(A = f'(x_0))$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0. Дифференциал обычно обозначают символом $df(x_0)$ или dy, если $y = f(x)$. При этом

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h. \tag{6}$$

Замечание 4. Теперь условие дифференцируемости (4) можно записать в следующем виде:

$$\Delta f(x_0)(h) = df(x_0)(h) + o(h), h \to 0. \tag{7}$$

Замечание 5. Поскольку для функции $y = x$ в любой точке дифференциал и сама функция совпадают, то принято обозначать ее дифференциал символом dx. Тогда формулу (6) часто записывают так:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \tag{8}$$

Замечание 6. Пусть $y = S(t)$ — путь, который проходит материальная точка за время t. Тогда

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \;—$$

средняя скорость за промежуток времени Δt, а производная $S'(t)$ — мгновенная скорость в момент времени t (интересное обсуждение этого вопроса можно найти в книге [13]).

***Задачи*:** 650, 651, 653, 655, 657, 658, 795.

Отдохнем ☺

Лотерея — это налог на людей, у которых плохо с математикой.

ЧАВО

1. *Какое понятие является первичным: скорость или производная?*

Я считаю, что мгновенную скорость надо определять как производную, а средняя скорость — чисто физическое понятие. Кстати, спросите работника ГАИ: «Какую скорость вы определяете?» Хотя лучше не спрашивать.

2. *Мне кажется, что касательная — это такая прямая, которая имеет с кривой одну общую точку.*

Если дать такое определение, то тогда многие кривые не имели бы касательных. Рассмотрите графики функций: $y = \sin x, y = x$.

3. *Я слышал, что дифференциал — это бесконечно малое приращение функции?*

Так иногда говорят, потому что дифференциал можно использовать в приближенных вычислениях, когда приращение аргумента мало.

4. *В механике часто используется обозначение $\dot{x}$. Как его понимать?*

Если функция $x = x(t)$ зависит от времени, то часто пишут

$$\dot{x}(t) \equiv x'(t),\ \ddot{x}(t) \equiv x''(t).$$

Такие обозначения применял Ньютон.

ЛЕКЦИЯ 15

Арифметические операции над производными. Свойства дифференциала

Запишем условие дифференцируемости в несколько иной форме, чем в лекции 14.

Замечание 1. Введем следующее обозначение:

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Тогда условие дифференцируемости функции f в точке x_0 равносильно непрерывности функции $\tilde{f}_{x_0}(x)$ в этой же точке. При этом

$$\tilde{f}_{x_0}(x_0) = f'(x_0). \tag{2}$$

Допуская некоторую вольность в обозначениях (она часто встречается в учебниках и задачниках), мы иногда будем писать $f'(x) \equiv (f(x))'$.

Теорема 1. Если функции f, g дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке дифференцируемы сумма, разность, произведение и частное этих функций. При этом справедливы формулы:

$$\left(f \pm g\right)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0); \tag{3}$$

$$\left(fg\right)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0); \tag{4}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}; \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}; \quad g(x) \neq 0. \tag{5}$$

◄ Достаточно доказать формулу (4) и первую из формул (5). С учетом замечания 5 можно написать

$$f(x) = f(x_0) + \tilde{f}_{x_0}(x)(x - x_0); \;\; g(x) = g(x_0) + \tilde{g}_{x_0}(x)(x - x_0).$$

Если перемножить левые и правые части этих равенств, то получим

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \tilde{F}_{x_0}(x)(x - x_0),$$

где функция $\tilde{F}_{x_0}(x) = \tilde{f}_{x_0}(x)g(x_0) + \tilde{g}_{x_0}(x)f(x_0) + \tilde{f}_{x_0}(x_0)\tilde{g}_{x_0}(x_0)\left(x - x_0\right)$ непрерывна в точке x_0. Легко проверяется равенство $\tilde{F}_{x_0}(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$. В силу замечания 1 формула (4) доказана. Далее

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)} = \tilde{G}_{x_0}(x)(x - x_0),$$

где функция $\tilde{G}_{x_0}(x) = \dfrac{-\tilde{g}_{x_0}(x)}{g(x_0)g(x)}$ очевидно непрерывна и справедливо равенство $\tilde{G}_{x_0}(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. Что и требовалось доказать.►

Следствие 1. Из теоремы 1 следуют аналогичные свойства для дифференциалов:

$$d(f \pm g) = df \pm dg; d(fg) = fdg + gdf;$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}; \;\; g(x) \neq 0.$$

Следствие 2. По индукции легко получить формулу

$$(f_1 f_2 \dots f_n)' = f'_1 f_2 \dots f_n + f_1 f'_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f'_n.$$

Здесь в каждом слагаемом правой части последовательно дифференцируется только один множитель.

Следствие 3. Из следствия 2 (см. еще пример 1 лекции 14) сразу получаем формулу $\left(x^n\right) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

Производная композиции функций. Производная обратной функции

Теорема 2 (производная композиции функций). Пусть выполняются условия: а) функция $x = f(t)$ дифференцируема в точке t_0 и $f'(t_0) = A$; б) функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = f(t_0)$ и $g'(x_0) = B$; в) определена функция $y = g(f(t))$ в окрестности точки t_0. Тогда функция $H(t) = (g \circ f)(t) = g(f(t))$ дифференцируема в точке t_0 и справедлива формула

$$H'(t_0) = (g \circ f)'(t_0) = AB. \tag{6}$$

◀ Из условий теоремы и замечания 1 следуют равенства

$$f(t) - f(t_0) = \tilde{f}_{t_0}(t)(t - t_0); g(x) - g(x_0) = \tilde{g}_{x_0}(x)(x - x_0).$$

Откуда получаем

$$g(f(t)) - g(f(t_0)) = \tilde{g}_{x_0}(f(t))\tilde{f}_{t_0}(t)(t - t_0) = \tilde{H}_{x_0}(t)(t - t_0),$$

где функция $\tilde{H}_{x_0}(t)$ непрерывна в точке t_0 и $\tilde{H}_{x_0}(t_0) = AB$. Теорема доказана.▶

Теорема 3 (производная обратной функции). Пусть выполняются следующие условия: а) функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0; б) в окрестности точки x_0 существует непрерывная обратная функция $x = g^{-1}(y)$; в) $g'(x_0) \neq 0$. Тогда функция g^{-1} дифференцируема в точке y_0 и справедлива формула

$$\left(g^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)} = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y_0)\right)}. \tag{7}$$

◀ Доказательство следует из цепочки равенств

$$\frac{g^{-1}(y) - g^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{1}{\tilde{g}_{x_0}(x)} = \frac{1}{\tilde{g}_{x_0}(g^{-1}(y))} = \tilde{G}_{y_0}(y).$$

Здесь функция $\tilde{G}_{y_0}(y)$ непрерывна в точке y_0 и $\tilde{G}_{y_0}(y_0) = \dfrac{1}{g'(x_0)}$ ▶.

***Задачи*:** 823, 829, 977, 1010, 1014, 1015, 1019, 1021,1023.

ЧАВО

1. *Производная суммы равна сумме производных, а производная произведения не равна произведению производных?*

Если смотреть на операцию композиции как на своеобразное «произведение» функций, то получим, что производная «произведения» совпадет с произведением производных.

2. *Если функция является периодической, то будет ли производная периодической?*

Будет. Это следует из определения производной.

3. *Пусть функция является четной. Будет ли производная этой функции четной?*

Производная четной функции будет нечетной. Если $f(-x)\equiv f(x)$, то

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{-h\to 0}-\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=-f'(-x).$$

Отдохнем ☺

Математик, физик и социолог сидят в поезде и пересекают границу соседнего государства. На первом же поле они увидели двух черных овечек.

Социолог говорит:

— Можно сделать заключение, что в этой стране все овцы черного цвета.

Физик с сомнением покачал головой и возразил:

— Этого нельзя сказать. Можно только утверждать — в этой стране как минимум две овцы черного цвета.

На это математик, улыбаясь, заметил:

— И этого тоже нельзя утверждать! Однозначно можно сказать, что в этой стране две овцы черного цвета с одной стороны!

ЛЕКЦИЯ 16

Производные элементарных функций

Вычислим несколько производных основных элементарных функций. Будем пользоваться их непрерывностью (лекция 12) и формулами тригонометрии.

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Итак,

$$\left(\sin x\right)' = \cos x.$$

Для косинуса можно воспользоваться формулой $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ и производной композиции функций (лекция 15). Тогда

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x.$$

Используя формулу для производной обратной функции (лекция 15), получим следующее соотношение:

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin x\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Так как справедлива формула

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для показательной функции получим (см. еще формулу (3) из лекции 12)

$$\left(a^x\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \ln a;\quad \left(e^x\right)' = e^x.$$

Из формулы для производной обратной функции следует

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Используя формулы из лекции 15, получим еще несколько производных:

$$\left(\mathrm{tg} x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \left(\mathrm{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\left(\mathrm{arctg} x\right)' = \cos^2\left(\mathrm{arctg} x\right) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg} x\right)} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\left(\mathrm{ch} x\right)' = \mathrm{sh} x; \left(\mathrm{sh} x\right)' = \mathrm{ch} x;$$

$$\left(x^a\right)' = \left(e^{a\ln x}\right)' = ax^{a-1}.$$

Замечание 1. Рассмотрим формулу (7) из лекции 14, то есть $\Delta f(x_0)(h) = df(x_0)(h) + o(h), h \to 0$. Допустим, что значение $f(x_0)$ вычисляется легко. Пусть еще приращение h достаточно мало. Тогда указанную формулу часто используют в приближенных вычислениях. А именно

$$\Delta f(x_0)(h) \approx df(x_0)(h) \Rightarrow f\left(x_0 + h\right) \approx f(x_0) + df\left(x_0\right)\left(h\right). \qquad (*)$$

Продемонстрируем применение формулы (*) на конкретном примере. Пусть надо вычислить $\sqrt{0,96}$. Здесь мы выберем следующие обозначения: $x_0 = 0$, $f(x) = \sqrt{1+x}$, $h = -0,04$. Тогда $df\left(x_0\right)\left(h\right) = \frac{1}{2}\left(1 + x_0\right)^{-1/2} h$.

Наконец, $\sqrt{0,96} = f\left(-0,04\right) \approx 1 - \frac{1}{2}0,04 = 0,98$.

Пример 1. Пусть $f(x)\left(f(x) > 0\right)$ и $g(x)$ две дифференцируемые функции. Тогда

$$\left(f^g\right)' = \left(e^{g\ln f}\right)' = e^{g\ln f}\left(g\ln f\right)' = f^g\left(g'\ln f + g\frac{f'}{f}\right) = g' f^g \ln f + f' g f^{g-1}.$$

Упражнение 1. Попробуйте вычислить приближенно $\sin 31^\circ$, если $f(x) = \sin x;\ x_0 = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236;\ h = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745$.

Упражнение 2. По воспоминаниям австралийского физика М. Олифанта, Резерфорд прекрасно владел техникой счета. Чтобы возвести в квадрат число Авогадро $6,0248\times10^{23}$, он умножал 6 на 6,05 и получал хорошее приближение $36,30\times10^{46}$. Обоснуйте его способ вычислений.

Вектор-функции

Определение 1. Пусть каждому t из промежутка X соответствует радиус-вектор $\vec{r}\left(t\right)$ трехмерного (двумерного) пространства. Тогда будем говорить, что задана *вектор-функция* $\vec{r} : X \to \mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ скалярного аргумента.

Замечание 2. В стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ задание вектор-функции равносильно заданию трех скалярных функций, то есть

$$\vec{r}(t) = x_1(t)\vec{i} + x_2(t)\vec{j} + x_3(t)\vec{k},\ t \in X,$$

или более кратко

$$\vec{r}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\right),\ t \in X.$$

Определение 2. Вектор $\vec{r}_0$ называется *пределом* вектор-функции $\vec{r}(t)$ при t, стремящемся к t_0, если

$$\lim_{t\to t_0} |\vec{r}(t)-\vec{r}_0| = 0. \tag{1}$$

Обозначения: $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0$; $\vec{r}(t)\to\vec{r}, t\to t_0$.

Лемма 1. Пусть $\vec{r}_0=(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Тогда

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} x_1(t)=x_0^1, \\ \lim\limits_{t\to t_0} x_2(t)=x_0^2, \\ \lim\limits_{t\to t_0} x_3(t)=x_0^3. \end{cases}$$

◄ Доказательство следует из неравенств

$$|x_k(t)-x_0^k| \le |\vec{r}(t)-\vec{r}_0| \le \sum_{i=1}^{3} |x_i(t)-x_0^i|, k=1,2,3$$

и определений соответствующих пределов.►

Определение 3. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0).$$

Определение 4. Производной вектор-функции $\vec{r}(t)$ называется предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\vec{r}\,'(t). \tag{2}$$

Замечание 3. Справедливо равенство

$$\vec{r}\,'(t)=\left(x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)\right), \tag{3}$$

которое следует из леммы 1.

***Задачи*:** 1055, 1060, 1062, 1083, 1099, 1101, 1105.

ЧАВО

1. *Показательная функция не меняется при дифференцировании. Есть ли еще такие функции?*

Ваш вопрос, на языке математики, относится к теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Значит, надо уметь решать уравнение $f'(x)=f(x)$. Со временем вы научитесь решать такие и более сложные дифференциальные уравнения. Кстати, все решения указанного дифференциального уравнения имеют вид $f(x)=ce^x$.

2. *Пытался найти функцию, которая дифференцируема в каждой точке интервала и имеет разрывы первого рода. Не нашел.*

Такой функции вам не удастся найти. Смотрите лемму Дарбу (лекция 18).

3. *Почему гиперболический синус совершенно не похож на тригонометрический синус, а формулы для них имеют много общего?*

Достаточно добавить мнимую единицу, то есть перейти в область комплексного анализа, и все станет понятно. Комплексный анализ у вас будет позже.

Отдохнем ☺

Таблица умножения физика 5×5 = 25; 6×6 = 36; 7×7 = 47?? — это ПОЧТИ верно.

ЛЕКЦИЯ 17

Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница

Уже знакомую нам производную $f'(x)$ называют также производной первого порядка (первой производной) и обозначают символом $f^{(1)}(x) \equiv f'(x)$. Если производная первого порядка является дифференцируемой, то ее производную $\left(f'\right)'(x) = f''(x) \equiv f^{(2)}(x)$ будем называть производной второго порядка (второй производной). По индукции определяются производные третьего и других порядков, то есть

$$f^{(n+1)}\left(x\right) = \left(f^{(n)}\right)'\left(x\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, в дальнейшем будем использовать следующее обозначение: $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.

Теорема 1 (*Лейбниц*). Пусть функции *f, g* имеют производные *n*-го порядка. Тогда справедлива формула (правило) Лейбница

$$\left(fg\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)};\ \ C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}. \tag{1}$$

◄ Эта формула доказывается по индукции. Достаточно обосновать только последний шаг индукции, но он следует из цепочки равенств (в третьем равенстве индексы в сумме сдвигаем на единицу и записываем последнее слагаемое $\left(k = n+1\right)$ отдельно от сумм):

$$(fg)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} + gf^{(n+1)} + fg^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

При этом мы воспользовались известными свойствами биномиальных коэффициентов: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$; $C_n^n = C_n^0 = 1$ (введение в анализ).►

Пример 1. Для того чтобы пользоваться формулой Лейбница, надо знать несколько формул для производных любого порядка от элементарных функций. Приведем три примера, которые легко доказать методом математической индукции.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} \right);\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} \right);\ \left(x^a\right)^{(n)} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (a-k) \right) x^{a-n}.$$

С производными n-го порядка тесно связаны дифференциалы n-го порядка. Известный нам дифференциал (лекция 14) называют также первым дифференциалом (дифференциалом первого порядка) и используют обозначение $d^1 f \equiv df$. Напомним, что дифференциал зависит от двух переменных: x, $dx \equiv h$. По переменной h дифференциал является линейной функцией, а зависимость от переменной x может быть достаточно сложной. Будем считать, что дифференциал является функцией от переменной x, а h является параметром. Тогда может существовать дифференциал от функции $df(x)h$, то есть $d(df(x)) = d(f'(x)h) = f''(x)hh_1$. Пусть $h_1 = h$. Обозначим

$$d^2 f(x)h^2 = f''(x)h^2 = f''(x)dxdx \equiv f''(x)dx^2.$$

Итак, появилась новая функция $d^2 f$ $\left(d^2 f(x,h) = f''(x)h^2\right)$, которую называют *вторым дифференциалом*. Если существует третья производная, то аналогично (по переменной x) получаем *третий дифференциал* $d^3 f$ $\left(d^3 f(x,h) = f'''(x)h^3\right)$. По индукции n-й *дифференциал* $\left(d^n f = d\left(d^{n-1} f\right)\right)$ определяется следующей формулой:

$$d^n f(x)(h) = f^{(n)}(x)h^n. \tag{2}$$

Замечание 1 (об инвариантности формы дифференциала). Запишем первый дифференциал функции $y = f(x)$ в виде $dy = f'(x)dx$. Пусть $x = g(t)$. Рассмотрим сложную функцию $y = f(g(t)) = \tilde{f}(t)$. Тогда

$$dy = \tilde{f}'(t)dt = f'(g(t))g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Получилось, что форма первого дифференциала не изменилась после замены независимой переменной. В этом случае говорят об *инвариантности формы* первого дифференциала. Простые примеры $\left(f(t^2)\right)$ показывают, что второй и следующие дифференциалы не являются инвариантными. Есть, правда, одно исключение, когда $g(t) = at + b$ является линейной функцией. В этом случае, легко видеть, что все дифференциалы обладают свойством инвариантности формы.

Производные функций, заданных параметрически и неявно

Пусть дана система

$$\begin{cases} x = s(t), \\ y = b(t), \end{cases} \qquad (*)$$

где $t \in [0, T]$. Если функция $x = s(t)$ имеет обратную $t = s^{-1}(x)$ (например, когда эта функция строго возрастает или убывает), то можно составить композицию $y = b(s^{-1}(x)) \equiv F\left(x\right)$. В этом случае говорят, что система $(*)$ задает функцию y от переменной x параметрически. В механике систему уравнений $(*)$ называют кинематическими уравнениями плоского движения.

Используя формулы для производной сложной функции и обратной функции, находим

$$F'(x) = \frac{b'(s^{-1}(x))}{s'(s^{-1}(x))} \Rightarrow F'(s(t)) = \frac{b'(t)}{s'(t)} = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференцируя предыдущее соотношение еще раз, получим

$$F''(x) = \frac{b''(s^{-1}(x)) - b'(s^{-1}(x))\dfrac{s''(s^{-1}(x))}{s'(s^{-1}(x))}}{\left(s'(s^{-1}(x))\right)^2} \Rightarrow F''(s(t)) = \frac{b''(t)s'(t) - b'(t)s''(t)}{s'(t)^3}.$$

Для приложений в механике обычно этих двух производных достаточно.

Замечание 2. Встречаются «функции-шпионы». Их называют функциями, заданными неявно. Говорят, что функция $y = f(x), x \in X$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, когда $\forall x \in X(F(x, f(x)) \equiv 0)$. Если понадобятся производные функции, заданной неявно, то указанное тождество дифференцируют нужное число раз и находят требуемые производные. Отметим, что даже первая производная будет выражаться через исходную функцию.

Например, рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Если это уравнение задает неявно дифференцируемую функцию $y = f(x)$, то получим тождество

$$x^2 + f(x)^2 \equiv 1.$$

Дифференцируя это тождество, получим $2x + 2f(x)f'(x) \equiv 0$. Откуда находим производную

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

***Задачи*:** 839, 845, 858, 860, 864, 875, 885, 895, 901, 913, 926, 934, 958, 961.

ЧАВО

1. *В чем суть правила Лейбница?*

Не надо быть Лейбницем, чтобы сообразить, что в формуле для производной $(fg)^{(n)}$ должны встречаться только слагаемые следующего вида: $f^{(k)}g^{(n-k)}$. Суть правила Лейбница в том, СКОЛЬКО таких слагаемых будет в формуле. Оказалось, что их количество совпадает с соответствующим биномиальным коэффициентом.

2. *Рассмотрим равенство* $x^2 + y^2 = -1$. *Оно не задает неявной функции, но можно найти производную* $y' = -\frac{x}{y}$. *Как так может быть?*

Прежде чем считать производную неявной функции, надо убедиться, что есть хотя бы одна пара (x, y), которая удовлетворяет неявному уравнению. Если такой пары нет, то считать производную не имеет смысла. Подробнее все вопросы, которые связаны с неявными функциями, мы обсудим позже (теорема о неявной функции).

Отдохнем ☺

Идут константа и экспонента по улице. Тут вдруг константа резко сворачивает за угол и убегает. Экспонента ее догоняет и спрашивает:

— Ты чего убежала?

— Да там оператор дифференцирования идет. Я боюсь. Он меня продифференцирует.

— Да ну, а я его не боюсь. Мне он ничего не сделает.

ЛЕКЦИЯ 18

Возрастание и убывание функций в точке. Локальный экстремум

Пусть дана функция $f : X \to \mathbb{R}$. Введем обозначения: $x_0 \in X$, $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции, $\dot{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ — проколотая δ-окрестность точки x_0. Вспомните еще функцию $\operatorname{sgn} x$ (лекция 10).

Определение 1. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей в точке* x_0, если найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется равенство

$$\operatorname{sgn} \Delta x = \operatorname{sgn} \Delta f. \tag{1}$$

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ назовем *убывающей в точке* x_0, если найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется равенство

$$\operatorname{sgn} \Delta x = -\operatorname{sgn} \Delta f. \tag{2}$$

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*строгого локального максимума*), если найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется равенство

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \le 0 \; (\Delta f = f(x) - f(x_0) < 0).$$

Определение 3. Точку x_0 называют *точкой локального минимума* (*строгого локального минимума*), если найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется равенство

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \ge 0 \; (\Delta f = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Определение 4. Точка локального минимума или локального максимума называется точкой *локального экстремума*, а значение функции в такой точке называется *экстремумом функции*.

Сформулируем одно достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции.

Теорема 1. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливы два утверждения:
если $f'(x_0) > 0$, то функция f возрастает в точке x_0;
если $f'(x_0) < 0$, то функция f убывает в точке x_0.

◄ Достаточно доказать первое утверждение. Пусть $f'(x_0) = \gamma > 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\gamma.$$

Полагаем $\varepsilon=\gamma/2$. Найдем δ, такое, что для всех $x\in\dot{U}_\delta\left(x_0\right)$ выполняется соотношение

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\gamma\right|<\gamma/2\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\gamma/2\Rightarrow\operatorname{sgn}\Delta f=\operatorname{sgn}\Delta x.$$

Второе утверждение следует из первого, если взять $f_1(x)=-f(x)$.►

Важные теоремы дифференциального исчисления. Теоремы Ферма, Ролля, Коши, Лагранжа

Везде далее в этом разделе все функции $f,g,...$ заданы на отрезке $[a,b]$ и непрерывны на этом отрезке.

Теорема 2 (*Ферма*). Пусть $x_0\in(a,b)$ и точка x_0 является точкой экстремума функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Если существует производная функции f в точке x_0, то

$$f'(x_0)=0.$$

◄ Рассмотрим три возможности: $f'(x_0)>0, f'(x_0)<0, f'(x_0)=0$. В силу условий теоремы Ферма и по теореме 1 остается только третья возможность. ►

Определение 5. Точки x_0, в которых $f'(x_0)=0$, будем называть *стационарными* точками функции f.

Замечание 1. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a,b]$ надо искать среди точек трех типов: стационарных точек; точек, где функция не дифференцируема; граничных точек *a, b*.

Если теорема Ферма является локальным результатом (важно как ведет себя функция в некоторой окрестности данной точки), то следующие результаты теорем являются глобальными (результат зависит от поведения функции на всем отрезке).

Теорема 3 (*Ролль*). Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a)=f(b)$. Тогда найдется точка $c\in(a,b)$, такая, что

$$f'(c)=0.$$

◄ Для постоянной функции этот результат очевиден. Пусть теперь функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ не является постоянной. Тогда по теореме Вейерштрасса (лекция 11) функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ достигает наибольшего M и наименьшего m значений. Причем $m\neq M$. Значит, одно из этих значений (оно будет точкой локального экстремума) достигается на интервале (a,b). Осталось применить теорему 2.►

Теорема 4 (*Коши*). Рассмотрим две функции f,g. Предположим, что обе функции дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x)\neq 0$. Тогда найдется точка $c\in(a,b)$, такая, что

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

◄ Введем вспомогательную функцию

$$K(x)=(f(a)-f(b))g(x)-(g(a)-g(b))f(x).$$

Легко заметить, что для функции $K(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля $\left(K(a)=K(b)\right)$. Поэтому $\exists c\in(a,b)$, что справедливо соотношение

$$K'(c)=(f(a)-f(b))g'(c)-(g(a)-g(b))f'(c)=0.$$

Откуда и следует равенство (3). ►

Теорема 5 (*Лагранж*). Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a,b), то $\exists c\in(a,b)$, что справедливо равенство

$$f(a)-f(b)=f'(c)(a-b). \tag{4}$$

Эту формулу называют: *формула Лагранжа*, *формула конечных приращений*, *теорема о среднем значении*. В данном разделе это самая важная формула.

◄ Если взять $g(x)\equiv x$, то теорема Лагранжа будет частным случаем теоремы 4. ►

Следствие 1. Формулу (4) можно записывать в следующем виде:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),\theta\in(0,1). \tag{5}$$

Следствие 2. Если производная $f'(x)\equiv 0$ на некотором промежутке, то функция f является постоянной.

◄ Из теоремы Лагранжа следует, что $\forall x_1,x_2$ справедливо равенство $f(x_1)-f(x_2)=0$.►

Следствие 3. Если $F'(x)\equiv G'(x)$ на некотором промежутке, то $F(x)\equiv G(x)+c$, где c — постоянная.

◄ Полагаем $F(x)-G(x)=f(x)$. Осталось применить следствие 2. ►

Лемма 1 (*Дарбу*). Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a,b). Для $\left[c,d\right]\subset(a,b)$ обозначим $C=f'(c),D=f'(d)$. Тогда производная $f'(x)$ принимает любое значение между C и D.

◄ Пусть, например, $D<\lambda<C$. Рассмотрим функцию $F\left(x\right)=f\left(x\right)-\lambda x$. Тогда $F'\left(c\right)=C-\lambda>0,F'\left(d\right)=D-\lambda<0$. Тогда функция F возрастает в точке c справа и убывает в точке d слева. Значит, внутри отрезка $[c, d]$ есть значение функции $F(x)$, которое больше, чем значения на концах этого отрезка. Итак, внутри интервала (c, d) найдется точка α, в которой функция $F(x)$ принимает максимальное значение. Тогда $F'(\alpha)=f'(\alpha)-\lambda=0$. Это значит, что производная $f'(x)$ принимает значение λ. Случай $C<\lambda<D$ рассматривается аналогично, но для минимума внутри интервала (c, d).►

Задачи: 987, 1034, 1039, 1044, 1048, 1054, 1135.

ЧАВО

1. *Возрастание функции в точке и возрастание функции в окрестности этой точки — это одинаковые понятия?*

Это разные понятия. Возрастание функции в окрестности этой точки равносильно возрастанию функции в каждой точке окрестности.

2. *Наибольшее значение функции на отрезке всегда достигается в точках локального максимума?*

Не всегда. Наибольшее значение может достигаться на концах отрезка.

3. *В теореме Лагранжа и Коши фигурирует некоторая точка c. Как ее найти?*

В общем случае этого никто не знает. Кстати, теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Найдется точка (не обязательно одна) на графике, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Отдохнем ☺

Факультет радиофизики и электроники. Начался экзамен по одному из предметов. Студенты разобрали билеты и пытаются что-то вспомнить. Преподаватель строго смотрит на экзаменующихся студентов и легонько стучит пальцами по столу. Вдруг один студент вскакивает, подбегает к преподавателю и сует ему зачетку, тот молча ставит туда отлично, после чего студент исчезает за дверью. Немая сцена. Через некоторое время второй студент точно так же подбегает к преподавателю и выбегает с четверкой. После этого подскакивает еще один студент, протягивает зачетку и, видимо, ждет, когда там появится тройка. Но чуда не происходит, студент слышит только: «Уже готовы? Ну, садитесь и отвечайте...» Как потом оказалось, преподаватель пальцами азбукой Морзе набивал:

кому нужна пятерка подходите, поставлю. Потом, соответственно, также пообещал четверку, ну а про тройку разговора не было.

ЛЕКЦИЯ 19

Правило Лопиталя

Есть метод (правило Лопиталя) для раскрытия неопределенностей следующего вида: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$. Вначале мы докажем аналогичное правило (лемма Штольца) для последовательностей.

Лемма 1 (*лемма Штольца*). Пусть положительная, возрастающая последовательность (y_n) является бесконечно большой. Если существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l.$$

◀ Можно считать, что $l=0$. В противном случае надо рассмотреть две последовательности: $X_n = x_n - ly_n$ и $Y_n = y_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}-X_n}{Y_{n+1}-Y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-l=0,$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{Y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-ly_n}{y_n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l.$$

Итак, полагаем $l=0$. Тогда $x_{n+1}-x_n=\alpha_n(y_{n+1}-y_n)$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. Следовательно, $\forall\varepsilon>0\exists N>0\forall n\ge N(|\alpha_n|<\varepsilon/2)$. Рассмотрим систему равенств:

$$\begin{cases} x_{N+1}-x_N=\alpha_N(y_{N+1}-y_N); \\ x_{N+2}-x_{N+1}=\alpha_{N+1}(y_{N+2}-y_{N+1})); \\ \dots \\ x_{n+1}-x_n=\alpha_n(y_{n+1}-y_n). \end{cases}$$

Складывая все равенства этой системы, получим

$$x_{n+1}=x_N+\sum_{k=N}^{n}\alpha_k(y_{k+1}-y_k).$$

Итак,

$$|x_{n+1}| \le |x_N| + \sum_{k=N}^{n} |\alpha_k| |y_{k+1} - y_k| \le |x_N| + \frac{\varepsilon}{2}(y_{n+1} - y_N).$$

В последнем неравенстве мы воспользовались возрастанием последовательности (y_n). Следовательно,

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right| \le \frac{|x_N|}{y_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > N.$$

Так как последовательность (y_n) бесконечно большая, то найдется N_1, что для всех $n > N_1$ выполняется неравенство $\frac{|x_N|}{y_{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, при $n > \max(N, N_1)$ справедливо неравенство $\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right| < \varepsilon$. Осталось вспомнить определение предела последовательности. ►

Упражнение 1. Найдите предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}, p > 0.$$

Теорема 1 (*правило Лопиталя* $\frac{0}{0}$). Пусть функции $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $g:(a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в правой полуокрестности точки a и там же выполняются условия:

$$1) \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0; 2)\ g'(x) \ne 0; 3) \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \qquad (1)$$

◄ Продолжим функции f, g по непрерывности в точку a справа, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in (a, a+\delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Тогда по теореме Коши (лекция 18) для $x \in (a, a+\delta)$ получаем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.►

Замечание 1. Понятно, что с соответствующими изменениями в условиях, теорема справедлива и для базы $x \to b-0$. Для случая базы $x \to \infty$ аналогичная теорема также верна. Достаточно сделать замену $x = 1/t$.

Теорема 2 (*правило Лопиталя* $\frac{\infty}{\infty}$). Пусть функции $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $g:(a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в правой полуокрестности точки a и там же выполняются условия:

$$1) \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = +\infty;\ 2) g'(x) \neq 0;\ 3) \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \qquad (2)$$

◄ Из условий 1, 2 следует, что функция g строго убывает в правой окрестности точки a. Рассмотрим последовательность $(x_n) \downarrow a$. Тогда по теореме Коши (лекция 18) получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L.$$

Теперь из леммы 1 следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L.$$

Осталось применить критерий Гейне (лекция 7).►

Асимптоты

Определение 1. Прямая $y = kx + b$ называется (*наклонной* при $k \neq 0$) *асимптотой* к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx+b)) = 0 \left(\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx+b)) = 0 \right).$$

Лемма 2. Асимптота к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k;\ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

◄ Из определения асимптоты вытекает соотношение:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (kx+b)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Остальное очевидно.►

Замечание 2. Справедливо аналогичное утверждение и для асимптоты к графику при $x \to -\infty$.

Замечание 3. Если $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty; \left(\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \pm\infty \right)$, то говорят, что в точке *a* график функции $y = f(x)$ имеет *вертикальную асимптоту*.

Задачи: 1140, 1158, 1163, 1169, 1190, 1195, 1197, 1206, 1211, 1251.

ЧАВО

1. *Зачем доказывать отдельно два правила Лопиталя? Можно ведь доказать правило Лопиталя для случая неопределенности 0/0, а потом, для неопределенности ∞/∞, воспользоваться преобразованием* $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+} \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

Такое доказательство не проходит. Так как после дифференцирования получим $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim\limits_{x \to a+} \dfrac{g'(x)/g^2(x)}{f'(x)/f^2(x)}$. Теперь надо знать предел $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, а он-то нам и не известен.

2. *Правило Лопиталя применять удобно. Бывает ли так, что оно не помогает?*

Попробуйте применить правило Лопиталя к простому пределу

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

3. *Верно ли я думаю: «Асимптота — это прямая, к которой приближается график, никогда не пересекая его»?*

Это не совсем так. По нашему определению прямая $y = 0$ является асимптотой к графику функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

4. *Может ли парабола быть асимптотой некоторой функции?*

Может. Надо только дать соответствующее определение. Например, парабола $y = ax^2 + bx + c$ называется *асимптотической параболой* к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax^2 + bx + c)) = 0.$$

5. *Нашел предел* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x} = 1$, *но* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \cos x)$ *не существует. Значит, правило Лопиталя не верно?*

Правило Лопиталя не симметрично, если существует предел $\lim\limits_{\text{в}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{\text{в}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\text{в}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Когда же существует предел $\lim\limits_{\text{в}} \frac{f(x)}{g(x)}$, то о пределе $\lim\limits_{\text{в}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ нельзя сказать ничего определенного.

Отдохнем ☺

Студент говорит на экзамене:

— Из точки на прямую можно провести один перпендикуляр, если проводить ровно.

Увидев реакцию экзаменатора, оправдывается:

— Так в учебнике написано!

Открывают учебник, читают: «Из точки на прямую можно провести РОВНО один перпендикуляр».

ЛЕКЦИЯ 20

Первообразная. Неопределенный интеграл

В этом разделе все функции $f, g, F, G, \ldots$ заданы на промежутке (a,b).

Определение 1. Функция F называется *первообразной* функции f, если в каждой точке $x \in (a,b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Лемма 1. Если две функции $F_1(x), F_2(x)$ являются первообразными функции $f(x)$, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на (a,b).

◀ Полагаем $F_1(x) - F_2(x) = F(x)$. Тогда $F'(x) \equiv 0$. По следствию 2 из лекции 18 получим требуемый результат.▶

Определение 2. Непрерывная функция F называется *обобщенной первообразной* функции f, если равенство $F'(x) = f(x)$ может нарушаться лишь в конечном множестве точек (не исключается случай, когда производная не существует в некоторых таких точках).

Замечание 1. Нетрудно установить, что и для обобщенных первообразных справедлива лемма 1. Надо только иметь в виду следующий факт: кусочно-постоянная функция либо разрывна, либо является постоянной. Дальнейшие результаты, если не оговорено противное, справедливы и для обобщенных первообразных.

Пример 1. Для функции $y = \operatorname{sgn} x$ обобщенной первообразной является функция $y = |x|$.

Определение 3. Множество всех первообразных (обобщенных первообразных) F функции f называется *неопределенным интегралом* функции f и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Замечание 2. Из леммы 1 следует, что можно писать

$$\int f(x)dx = \{F(x)\} = F(x) + c.$$

Имейте в виду, что последняя запись общепринятая, но может вызвать недоразумения. Надо помнить, что неопределенный интеграл — *множество* первообразных, и все равенства с неопределенными интегралами надо понимать как равенства соответствующих множеств.

Сформулируем несколько простых, но полезных свойств неопределенного интеграла. Эти свойства являются прямым следствием определения и свойств производных.

Свойство 1.

$$\int f'(x)dx = f(x) + c.$$

Свойство 2.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Свойство 3.

$$\int df = f(x) + c.$$

Свойство 4.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Свойство 5. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx.$$

Свойство 6. Пусть $F(x)$ первообразная функции $f(x)$. Тогда (советуем запомнить!)

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + c.$$

Приведем список основных первообразных элементарных функций. Проверка производится дифференцированием первообразных.

1) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$; 2) $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c, \mu \neq -1$; 3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a \neq 1$;
4) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + c$; 5) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + c$; 6) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$;

7) $\int \sin x dx = -\cos x + c$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$; 9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$;

10) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,\ a \neq 0$; 11) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c, a > 0$;

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + c$; 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c, a > 0$.

Интегрирование по частям. Замена переменных

Теорема 1. Пусть функции u, v дифференцируемы на интервале (a,b) и существует первообразная функции $u'v$. Тогда функция uv' имеет первообразную и справедлива формула (интегрирования по частям)

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx. \tag{1}$$

◀ Вычислим производную правой части равенства (1):

$$\left(uv - \int u'vdx\right)' = u'v + uv' - u'v = uv'.$$

Осталось вспомнить определение первообразной.▶

Замечание 3. Формулу интегрирования по частям (1) кратко записывают в виде

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Теорема 2. Пусть функция $F:(a,b) \to \mathbb{R}$ является первообразной функции $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. Рассмотрим дифференцируемую функцию $\varphi:(\alpha,\beta) \to (a,b)$. Тогда справедлива формула (замены переменной)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c. \tag{2}$$

◀ Вычисляем производную правой части формулы (2).

$$\left(F(\varphi(t)) + c\right)' = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Что и требовалось. ▶

Замечание 4. Если функция $\varphi:(\alpha,\beta) \to (a,b)$ взаимно однозначная, то формулу (2) можно записать в виде

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Big|_{t = \varphi^{-1}(x)}. \tag{3}$$

Упражнение 1. Доказать рекуррентную формулу

$$I_{n+1} \equiv \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}} = \frac{x}{2n\left(x^2+1\right)^n} + \left(\frac{2n-1}{2n}\right) I_n, n \in \mathbb{N}.$$

Указание. Проинтегрировать по частям.

Пример 2. Рассмотрим следующие интегралы:

$$\int e^x \cos x dx, \ \int e^x \sin x dx.$$

Дважды интегрируя по частям, получим

$$I_s = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + \int e^x d \sin x =$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I_s.$$

Откуда находим

$$I_s = \int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$I_c = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$$

***Задачи*:** 1320, 1331, 1336–1338, 1341, 1348, 1355, 1359, 1374.

ЧАВО

1. *Зачем нужна обобщенная первообразная? В большинстве учебников фигурирует первообразная, а обобщенной первообразной нет.*

Главный результат, для которого нужна первообразная, это теорема Ньютона — Лейбница. Оказалось, что указанная теорема справедлива и для обобщенных первообразных. Надо только иметь в виду обязательную непрерывность обобщенной первообразной. Чаще всего обобщенную первообразную «склеивают» из «кусков» гладких первообразных.

2. *Первообразная и неопределенный интеграл — это разные понятия?*

Неопределенный интеграл — это множество всех первообразных (обобщенных первообразных) данной функции. Правда, оказывается, что все первообразные данной функции отличаются на постоянную. Поэтому неопределенный интеграл полностью определяется одной из первообразных.

3. *Если мне известна первообразная функции* $\cos x$*, то как мне найти первообразную функции* $\cos 3x$*?*

Из свойства 6 неопределенного интеграла получаем, что аргумент первообразной функции $\cos x$ надо увеличить в три раза и добавить впереди множитель, равный 1/3. Получим $\frac{1}{3}\sin 3x$.

4. *Что такое неберущиеся интегралы?*

Неберущимися интегралами называются неопределенные интегралы, которые не имеют первообразной в виде элементарной функции. Кстати, доказательство того факта, что интеграл является неберущимся, обычно довольно сложно. Заметим, что неберущиеся интегралы ничем не хуже остальных. С ними прекрасно можно работать.

5. *Я построил таблицу первообразных так. Написал в строке несколько функций. В следующей строке написал их производные. Затем поменял местами строки. Получилась таблица первообразных.*

Прекрасно. Только в этой таблице могут быть первообразные сложных функций, а простых и важных не будет.

ЛЕКЦИЯ 21

Интегрирование рациональных функций

Изучим классы функций, для которых можно найти первообразные в виде элементарных функций. Нам понадобятся некоторые результаты из алгебры. Пусть $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ — *многочлен* (*полином*) степени n. Отношение двух многочленов $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называют *рациональной* функцией. Далее мы будем рассматривать только правильные рациональные функции, у которых степень числителя меньше степени знаменателя. Если же степень знаменателя не превосходит степени числителя, то такую дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции. Мы надеемся, что читатель умеет делить многочлен на многочлен. Рассмотрим пример деления многочлена $x^4 + x + 1$ на многочлен $x^2 + 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^4+0x^3+0x^2+1x+1 & x^2+0x+1 \\ \cline{2-2} x^4+0x^3+1x^2 & x^2+0x-1 \\ -1x^2+1x+1 & \\ -1x^2+0x-1 & \\ 1x+2 & \end{array}.$$

Частное равно $\left(x^2-1\right)$, а остаток от деления будет $\left(x+2\right)$. Как видите, деление многочленов напоминает деление чисел столбиком $\left(x=10\right)$, только цифры могут быть любыми числами. Мы советуем писать нули перед отсутствующими степенями.

Лемма 1. Пусть многочлены Q_1, Q_2 не имеют общих корней и степень многочлена Q_2 не превосходит степени многочлена Q_1. Тогда найдутся многочлены R_1, R_2, что справедливо тождество

$$1 \equiv Q_1(x)R_1(x) + Q_2(x)R_2(x). \qquad (*)$$

◀ Напомним, что известный из средней школы алгоритм Евклида для нахождения общего делителя двух чисел работает и для многочленов. Если степень многочлена Q_2 не превосходит степени многочлена Q_1, то после деления получим тождество

$$Q_1(x) = Q_2(x)P_2(x) + Q_3(x),$$

где степень остатка $Q_3(x)$ строго меньше степени многочлена $Q_2(x)$. Продолжив процедуру деления (делим Q_2 на Q_3 и т. д.), мы получим цепочку тождеств:

$$Q_2(x) = Q_3(x)P_3(x) + Q_4(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q_{k-2}(x) = Q_{k-1}(x)P_{k-1}(x) + Q_k(x),$$
$$Q_{k-1}(x) = Q_k(x)P_k(x).$$

Так как степени $Q_j(x)$ убывают при возрастании индекса, то последний остаток должен быть нулевым. При этом многочлен $Q_k(x)$ должен быть общим делителем всех многочленов $Q_j(x)$, если смотреть вверх по цепочке тождеств.

Когда многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ являются взаимно простыми, то $Q_k(x) \equiv \lambda = const$. В этом случае получим представление

$$1 = Q_{k-1}(x)\tilde{P}_{k-1}(x) + \frac{1}{\lambda}Q_{k-2}(x).$$

С помощью предыдущего тождества $\left(Q_{k-3}(x) = Q_{k-2}(x)P_{k-1}(x) + Q_{k-1}(x)\right)$ можно исключить многочлен $Q_{k-1}(x)$ и получить соотношение

$$1 = Q_{k-2}(x)\tilde{P}_{k-2}(x) + Q_{k-3}(x)\tilde{P}_{k-3}(x).$$

Поднимаясь вверх по цепочке тождеств (исключая $Q_{k-2}(x), \ldots, Q_3(x)$), доказываем тождество $(*)$.▶

Из формулы $(*)$ получим

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)Q_2(x)} = \frac{P(x)R_1(x)}{Q_2(x)} + \frac{P(x)R_2(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

а тогда (по индукции)

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)Q_2(x)\dots Q_k(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}+\dots+\frac{P_k(x)}{Q_k(x)}. \qquad (**)$$

Основная теорема алгебры (каждый многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень) позволяет разложить многочлен на комплексные множители

$$Q(z)=q_0(z-z_1)^{\alpha_1}\dots(z-z_k)^{\alpha_k}. \qquad (***)$$

С помощью соотношений (**) и (***) получим (полагая $Q_j(z)=(z-z_j)^{\alpha_j}$) разложение рациональной функции

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{j=1}^{k}\frac{P_j(z)}{(z-z_j)^{\alpha_j}}. \qquad (1)$$

У формулы (1) есть один недостаток. Если обе функции $P(z)$, $Q(z)$ имеют действительные коэффициенты, то многочлены $P_j(z)$ могут иметь комплексные коэффициенты, да и корни могут быть комплексными. Получим аналог формулы (1) для многочленов $P(x), Q(x)$ с действительными коэффициентами.

Замечание 1. Если многочлен с действительными коэффициентами $P(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k\left(a_k=\overline{a_k}\right)$ имеет мнимый корень z_0, то

$$\overline{a_nz^n+\dots+a_1z+a_0}=a_n\overline{z}^n+\dots+a_1\overline{z}+a_0.$$

Тогда $0=P(z_0)=\overline{P(z_0)}=P(\overline{z_0})$. Значит, если у многочлена с действительными коэффициентами есть мнимый корень, то обязательно есть и его сопряженный корень. Поэтому многочлен $P(x)$ делится на квадратный трехчлен с действительными коэффициентами

$$(x-z_0)(x-\overline{z_0})=x^2+a_0x+b_0,\ a_0=-2\operatorname{Re}z_0,\ b_0=|z_0|^2.$$

Из замечания 1 и равенства (1) получим разложение для рациональной функции с вещественными коэффициентами

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{k_1}\frac{P_j(x)}{\left(x-x_j\right)^{\alpha_j}}+\sum_{j=1}^{k_2}\frac{R_j(x)}{\left(x^2+a_jx+b_j\right)^{\beta_j}}. \qquad (2)$$

Замечание 2. Из тождества (2) следует, что интеграл от рациональной функции можно свести к сумме интегралов от следующих простейших рациональных функции двух видов:

$$\frac{1}{(x-a)^k};\quad \frac{cx+d}{\left(x^2+px+q\right)^m}.$$

Теперь мы можем теоретически проинтегрировать любую рациональную функцию, ибо функции первого вида мы уже умеем интегрировать, а после преобразования

$$\frac{cx+d}{\left(x^2+px+q\right)^m}=\frac{c/2\left(2x+p\right)-cp/2+d}{\left(x^2+px+q\right)^m}=\frac{c}{2}\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^m}+\frac{c_1}{\left(x^2+px+q\right)^m}$$

получим интегралы:

$$\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^m}=\int\frac{dt}{t^m};$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}=c_2\int\frac{dy}{\left(y^2+1\right)^m}=c_2 I_m\ .$$

Метод вычисления интеграла I_m можно найти в лекции 20 (упражнение 1). Итак, первообразная любой рациональной функции выражается через элементарные функции.

***Задачи*:** 1628, 1631, 1633, 1639, 1644, 1645, 1650, 1656–1658, 1661, 1663, 1668.

ЧАВО

1. *Не могу разложить на простейшие дробь* $\frac{1}{x^4+1}$.

Можно это сделать так: $\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{x^4\pm 2x^2+1}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2}$ и т. д.

Замечу, что даже Лейбниц не знал этого преобразования. Он считал, что интеграл

$$\int\frac{dx}{x^4+1}$$

не берется в элементарных функциях?! Позже И. Бернулли нашел способ неопределенных коэффициентов и сообщил Лейбницу, что интегралы от рациональных функций всегда выражаются через элементарные функции.

Отдохнем ☺

Студент оксфордского университета сдает экзамен по истории права. Экзамен длится 6 часов. По истечении 3 часов студент говорит экзаменатору: «Согласно закону оксфордского университета 1656 года по истечении 3 часов экзамена студент имеет право на кусок мяса и бутылку пива». Профессор в недоумении. Студент говорит: «Если не верите, то сходите в библиотеку и посмотрите». Профессор пошел в библиотеку, нашел закон, прочитал — действительно так. Он посоветовался с деканом. Тот с ректором. Ректор сказал, что закон оксфордского университета 1985 года запрещает распитие спиртных напитков в университете. Ну, сошлись на том, что дадут студенту гамбургер и кока-колу.

Студент съел, написал экзамен. Через неделю к нему приходят и говорят: «Вы отчислены!» Студент в недоумении, за что. Идет в университет, перед ним представительная комиссия во главе с деканом. И тот говорит: «Согласно закону оксфордского университета 1625 года вы обязаны были явиться на экзамен с мечом...»

ЛЕКЦИЯ 22

Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций

Определение 1. Функция

$$P_n(x,y)=\sum_{0\le i+j\le n} a_{ij}x^i y^j$$

называется многочленом степени не выше n от двух переменных x, y. Отношение двух таких многочленов

$$R(x,y)=\frac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}$$

называют рациональной функцией от переменных x, y.

Интегралы от тригонометрических функций следующего вида:

$$\int R(\sin x,\cos y)\,dx, \qquad (1)$$

после замены $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, приводятся к интегралам от рациональной функции. Надо только вспомнить формулы тригонометрии:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};x=2\operatorname{arctg}t;dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Займемся теперь интегралами от иррациональных функций. Рассмотрим вначале интегралы, которые можно представить в виде

$$\int R\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx.$$

После замены $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ получим интеграл от рациональной функции. Такие интегралы были рассмотрены в предыдущей лекции.

Изучим теперь интегралы вида

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$$

Такие интегралы после линейной замены можно свести к одному из следующих трех типов интегралов:

$$1)\int R\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)dx;\ 2)\int R\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)dx;\ 3)\int R\left(x,\sqrt{x^2+1}\right)dx.$$

После соответствующей замены:

$$1)\ x=\cos t;\ 2)\ x=\frac{1}{\cos t};\ 3)\ x=\operatorname{tg} t,$$

каждый из интегралов приводится к интегралам вида (1).

Рассмотрим еще интегралы Чебышева

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx, \tag{2}$$

когда одно из чисел: m, n, p, не является целым. Русский математик П. Л. Чебышев доказал, что интегралы вида (2) выражаются через элементарные функции только в трех случаях:

$$1) p\in\mathbb{Z};\ 2)\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z};\ 3)\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}.$$

Каждый из перечисленных случаев заменой переменной

$$1) x=t^q;\ 2) a+bx^n=t^s;\ 3) b+ax^{-n}=t^s,$$

где q общий знаменатель дробей n, m, а s — знаменатель дроби p, сводится к интегралу от рациональной функции.

***Задачи*:** 1674, 1679, 1680, 1689, 1697, 1700, 1703, 1706, 1709, 1719, 1723, 1727.

ЧАВО

1. *Если считать интеграл* $\int\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$ *с помощью универсальной подстановки, то получаются громоздкие выражения. Нельзя ли такие интегралы вычислять проще.*

Этот интеграл можно быстро вычислить с помощью подстановки $\operatorname{tg} x=t$. Такая подстановка всегда помогает в тех случаях, когда подынтегральное выражение не меняется при изменении знака у синуса и косинуса одновременно. Общий совет — надо пробовать разные замены $(\sin x = t; \cos x = t; \operatorname{tg} x = t\ldots)$ и приобретать опыт.

2. *Можно ли вычислить интеграл* $\int \sqrt{x^3+1}\,dx$?

Он не удовлетворяет условиям Чебышева $\left(m = 0, n = 3, p = \dfrac{1}{2}\right)$, поэтому этот интеграл не выражается через элементарные функции.

3. *Я слышал, что есть эллиптические интегралы.*

Если вычислять длину дуги эллипса, то появляются интегралы, которые содержат радикал $\sqrt[4]{x^4+ax^3+bx^2+cx+d}$. Такие интегралы обычно не выражаются через элементарные функции. Их называют эллиптическими интегралами.

ЛЕКЦИЯ 23

Интеграл (определенный интеграл). Необходимое условие интегрируемости

Пусть дана функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Определение 1. *Разбиением* отрезка $[a,b]$ называется множество точек $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$, для которого выполняются условия $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. *Диаметром* разбиения будем называть число $d(P)=\max\limits_{1\le k\le n}(\Delta x_k)$.

Определение 2. Пусть P разбиение отрезка $[a,b]$. Выберем по одной точке $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$. Множество $P_\xi=\{x_0,\ldots,x_n;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ назовем *размеченным разбиением* отрезка $[a,b]$. Полагаем также $d(P)=d(P_\xi)$.

Определение 3. Для заданного размеченного разбиения P_ξ отрезка $[a,b]$ построим сумму

$$\sigma(f,P_\xi)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эту сумму будем называть *интегральной суммой* функции *f*, соответствующей разбиению P_ξ.

Определение 4. Число *I* называется *интегралом* (*определенным интегралом, интегралом Римана*) от функции *f* на отрезке $[a,b]$, если истинно следующее утверждение:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall P_\xi\left(d(P_\xi)<\delta\Rightarrow\left|I-\sigma(f,P_\xi)\right|<\varepsilon\right).$$

При этом функция f называется *интегрируемой* и вводится обозначение: $I=\int_a^b f(x)dx$.

Замечание 1. Определим базу $\mathbf{B}=\{B_\delta\}$, где $B_\delta=\{P_\xi\mid d(P_\xi)<\delta\}$. Тогда определение 4 равносильно существованию предела

$$\lim_{\mathbf{B}}\sigma(f,P_\xi)=I.$$

Теперь для интеграла можно использовать общие теоремы о пределах по базе. Например, для интегрируемой функции f найдется δ_0, что интегральные суммы $\sigma(f,P_\xi)$ ограничены при $d(P_\xi)<\delta_0$. Кроме того, число I может быть только одно (единственность предела).

Замечание 2. Для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ будем пользоваться терминологией: b — верхний предел, a — нижний предел, f — подынтегральная функция, x — переменная интегрирования, $f(x)dx$ — дифференциальная форма (подынтегральное выражение).

Замечание 3. Определение интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(\lambda)d\lambda=\ldots$$

Определение 5. Полагаем по определению

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx. \qquad (*)$$

Из равенства (*) вытекает формула

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

Пример 1. Постоянная функция $f(x)=c\equiv const$ интегрируема на любом отрезке и

$$\int_a^b c\,dx=c(b-a),$$

так как $\sum_{k=1}^{n}c\Delta x_k=c(b-a)$ для любого разбиения.

Теорема 1. Необходимым условием интегрируемости функции f на отрезке $[a,b]$ является ее ограниченность.

◄ Пусть функция f интегрируема и неограниченна. Рассмотрим разбиение P_ξ из замечания 1. Найдется отрезок $[x_{k-1},x_k]$ этого разбиения, на котором функция f неограниченна. Тогда сумму, соответствующую разбиению P_ξ, можно записать в виде

$$\sigma(f, P_\xi) = f(\xi_k)\Delta x_k + S, \qquad (**)$$

где слагаемое S не зависит от ξ_k. За счет выбора точки ξ_k сумму (**) можно сделать сколь угодно большой по абсолютной величине. Это противоречит ограниченности интегральных сумм. ►

Пример 2. Приведем пример ограниченной, но не интегрируемой функции. Зададим ее на отрезке $[a,b]$ так:

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Эту функцию называют функцией Дирихле. Для любого размеченного разбиения P_ξ отрезка $[a,b]$ можно так выбрать точки ξ_k, что одна из интегральных сумм (за счет присутствия рациональных и иррациональных чисел на любом отрезке) будет равна длине отрезка, а другая — нулю. Поэтому функция Дирихле не является интегрируемой ни на одном отрезке, хотя она и ограничена.

Замечание 4. Основные проблемы и задачи для ближайших лекций:

- Найти достаточно обширные классы интегрируемых функций.
- Выяснить свойства интеграла.
- Разобрать методы вычисления интегралов.

***Задачи*:** 1741, 1744, 1750, 1766, 1769, 1778, 1780, 1786,1792, 1796, 1799, 1802, 1828.

ЧАВО

1. *Почему пишут* $\int_a^b f(x)dx$*, ведь можно писать проще* $\int_a^b f(x)$*?*

Оказалось, что интегрируется не функция f, а дифференциальная форма $f(x)dx$. В противном случае становятся непонятными многие свойства интеграла: замена переменных и т. п.

2. *Только ли функция Дирихле не является интегрируемой?*

Нет. Неинтегрируемых функций, в некотором смысле, больше, чем интегрируемых.

3. *Есть ли другие интегралы, кроме интеграла Римана?*

Есть и другие способы построения интеграла. Один из важнейших — интеграл Лебега (обобщение интеграла Римана). Кстати, интеграл Лебега от функции Дирихле существует. Есть еще интеграл Стилтьеса, интеграл Перрона, интеграл Даниэля...

Отдохнем ☺

На экзамене студента просят дать определение корня многочлена кратности два. Студент, подумав, отвечает:

— Значит так, если подставить число в многочлен и в результате получится нуль, а затем снова подставить это число и снова получится нуль, а вот если в третий раз подставить то же самое число и нуль не получится, то это и будет корень кратности два.

ЛЕКЦИЯ 24

Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости

Так как необходимым условием интегрируемости является ограниченность функции (лекция 23), то далее предполагаем, что функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена, а $P=\{x_0,...,x_n\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$.

Определение 1. Пусть $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$ и $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$. Обозначим

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k;\ \underline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k.$$

Сумму $\overline{S}(f,P)$ будем называть *верхней суммой Дарбу*, а сумму $\underline{S}(f,P)$ назовем *нижней суммой Дарбу*.

Замечание 1. Отметим неравенство

$$\underline{S}(f,P)\le\sigma(f,P_\xi)\le\overline{S}(f,P),$$

которое следует из определения сумм Дарбу. Напомним (лекция 23), что $\sigma(f,P_\xi)=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Замечание 2. Так как числа M_k, m_k можно приблизить с любой точностью, выбирая нужное значение $f\left(\xi_k\right)$, то, с учетом предыдущего замечания, получаем

$$\overline{S}(f,P)=\sup_\xi\sigma(f,P_\xi);\ \underline{S}(f,P)=\inf_\xi\sigma(f,P_\xi).$$

Лемма 1. Для любых разбиений P_1, P_2 справедливо неравенство $\underline{S}(f,P_1)\le\overline{S}(f,P_2)$.

◀ Пусть к разбиению P добавлена одна точка $\tilde{x}\in[x_{k-1},x_k]$. Обозначим $\tilde{M}_{k-1} = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},\tilde{x}]} f(x)$ и $\tilde{M}_k = \sup\limits_{x\in[\tilde{x},x_k]} f(x)$. Тогда

$$\tilde{M}_{k-1}\left(\tilde{x}-x_{k-1}\right)+\tilde{M}_k\left(x_k-\tilde{x}\right)\le M_k\left(x_k-x_{k-1}\right).$$

Значит, верхняя сумма $\overline{S}(f,P)$ при добавлении новых точек разбиения может только уменьшиться. Аналогично нижняя сумма $\underline{S}(f,P)$ не может уменьшиться, если добавить новые точки разбиения.

Рассмотрим разбиение $P=P_1\cup P_2$. Тогда справедливы два неравенства: $\underline{S}(f,P_1)\le\underline{S}(f,P), \overline{S}(f,P)\le\overline{S}(f,P_2)$. Откуда и получаем требуемое неравенство.►

Следствие 1. Из леммы 1 следует, что все нижние суммы ограничены сверху любой верхней суммой, а все верхние суммы ограничены снизу любой нижней суммой. Поэтому можно определить два числа: $\underline{J}=\sup\limits_P\underline{S}(P)$ и $\overline{J}=\inf\limits_P\overline{S}(P)$.

Следствие 2. Справедлив неравенство

$$\underline{S}(f,P)\le\underline{J}\le\overline{J}\le\overline{S}(f,P).$$

Теорема 1 (критерий интегрируемости).

$$\lim_{\mathbf{B}}\sigma(f,P_\xi)=I\Leftrightarrow\lim_{\mathbf{B}}\left(\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\right)=0. \qquad (1)$$

Другими словами, функция f интегрируема тогда и только тогда, когда верхняя и нижняя сумма отличаются друг от друга сколь угодно мало для достаточно мелких разбиений. В формуле (1) база **B** из замечания 1 лекции 23.

◄ Пусть функция f интегрируема. Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall P_\xi\left(d(P_\xi)<\delta\Rightarrow\left|\sigma(f,P_\xi)-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Тогда из замечания 2 получим неравенства:

$$I-\frac{\varepsilon}{2}\le\overline{S}(f,P)\le I+\frac{\varepsilon}{2};I-\frac{\varepsilon}{2}\le\underline{S}(f,P)\le I+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих неравенств следует, что $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\le\varepsilon$. Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall P\left(d(P)<\delta\Rightarrow\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon\right)$. Тогда из следствия 2 вытекает неравенство $0\le\overline{J}-\underline{J}<\varepsilon$. Значит, $\overline{J}=\underline{J}$ и можно обозначить $I=\overline{J}=\underline{J}$. Из замечания 1 и следствия 2 получим неравенства: $\underline{S}(f,P)\le\sigma(f,P)\le\overline{S}(f,P);\underline{S}(f,P)\le I\le\overline{S}(f,P)$. Откуда следует неравенство $\left|\sigma(f,P)-I\right|<\varepsilon$. Теорема доказана.►

Теорема 2 (*Дарбу*). Для любой ограниченной функции f существуют пределы:

$$\lim_{\mathbf{B}}\left(\overline{S}(f,P)\right)=\overline{J}, \tag{2}$$

$$\lim_{\mathbf{B}}\left(\underline{S}(f,P)\right)=\underline{J}. \tag{3}$$

◀ Пусть $|f(x)|<M$. Для $\varepsilon<1$ (следствие 1) есть разбиение $P_\varepsilon=\{x_0,x_1,...,x_n\}$, что

$$\overline{S}(f,P_\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k<\overline{J}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь надо найти δ, чтобы для всех разбиений P с диаметром $d(P)<\delta$ выполнялось неравенство.

$$\overline{S}(f,P)-\overline{J}<\varepsilon. \tag{4}$$

Возьмем $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4nM}$. Запишем сумму $\overline{S}(f,P)$ в виде нескольких сумм:

$$\overline{S}(f,P)=\overline{S_\varepsilon}(f,P)+\overline{S_1}(f,P)+\overline{S_2}(f,P)+...+\overline{S_n}(f,P). \tag{5}$$

Поясним, что в первой сумме $\overline{S_\varepsilon}(f,P)$ суммируем по всем отрезкам, которые принадлежат одному из отрезков $[x_k-\delta,x_k+\delta]$. Суммарная длина таких отрезков не превосходит $2\delta n$. Поэтому справедлива оценка

$$\overline{S_\varepsilon}(f,P)\le 2M\delta n=\frac{\varepsilon}{2}.$$

В суммах $\overline{S_k}(f,P), k=\overline{1,n}$, суммирование производится по всем отрезкам, которые содержатся в (x_{k-1},x_k) без повторений. Тогда выполняется неравенство $\overline{S_k}(f,P)\le M_k\Delta x_k$. Собирая оценки сумм в правой части равенства (5), получим неравенство

$$\overline{S}(f,P)\le\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k<\overline{J}+\varepsilon.$$

Равенство (2) доказано. Аналогично доказывается равенство (3).▶

Следствие 3. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда $\overline{J}=\underline{J}$.

◀ Из равенств (2), (3) получим

$$\lim_{\mathbf{B}}\left(\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)\right)=\overline{J}-\underline{J}.$$

Осталось применить теорему 1.▶

Задачи: 1836, 1837, 1840, 1867, 1868, 1872, 1880, 1884, 1905, 1914.

ЧАВО

1. *Являются ли суммы Дарбу одновременно и интегральными суммами?*

Вообще говоря, нет.

2. *Можно ли интегрировать функцию, которая задана на всей действительной оси?*

Можно, но для этого понадобится обобщение интеграла — несобственный интеграл. Позже мы его рассмотрим. Кстати, некоторые <u>неограниченные</u> функции на отрезке мы тоже научимся интегрировать.

ЛЕКЦИЯ 25

Классы интегрируемых функций

Замечание 1. Достаточно найти последовательность разбиений P_n, таких, что $(\overline{S}(f,P_n)-\underline{S}(f,P_n))\to 0$ и тогда функция f будет интегрируемой, так как

$$0\le \overline{J}-\underline{J}\le \overline{S}(f,P_n)-\underline{S}(f,P_n).$$

Осталось вспомнить последнее следствие из лекции 24.

Пример 1. Конечно, считать интеграл с помощью предела интегральных сумм задача не из легких. Так, даже простые интегралы приводят к сложным пределам. Например, при разбиении отрезка $[0,1]$ на n равных частей получим формулу

$$\int_0^1 x^p dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}. \qquad \text{(A)}$$

Далее мы докажем формулу Ньютона — Лейбница, которая позволит легко справляться с подобными интегралами без вычисления предела. Более того, можно будет считать пределы с помощью интегралов. Кстати, предел (A) при $p = 1, 2$ умел вычислять еще Архимед.

А сейчас нас интересует задача, какие функции интегрируемы?

Определение 1. *Колебанием* функции на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ называется число $\omega_k=M_k-m_k$, где $M_k=\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$; $m_k=\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

Упражнение 1. Показать, что колебание функции на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ можно определить следующим образом:

$$\sup_{x,y\in[x_{k-1},x_k]}\left|f(x)-f(y)\right|=\omega_k.$$

Замечание 2. Теперь критерий интегрируемости (лекция 24) можно записать в другом виде:

$$\lim_{\mathbf{B}} \sigma(f, P_\xi) = I \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{B}} \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \right) = 0. \qquad (1)$$

Пример 2. Для функции Дирихле (лекция 23) получаем при любом разбиении $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = b - a$, так как на любом отрезке есть рациональные и иррациональные числа. Поэтому функция $D(x)$ не интегрируема.

С помощью теорем, которые доказаны в лекции 24, и теоремы Кантора (лекция 13) нетрудно установить, что непрерывные функции интегрируемы.

Теорема 1. Любая функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.

◀ По теореме Кантора для функции $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a,b] \left(|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right).$$

Рассмотрим разбиение $P = \{x_0, ..., x_n\}$ отрезка $[a,b]$ с диаметром $d(P) < \delta$. Тогда

$$\omega_k \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k < \varepsilon.$$

Осталось воспользоваться замечанием 2. ▶

Теорема 2. Ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция и непрерывная там же (исключая конечное множество точек разрыва) — интегрируема.

◀ Можно рассмотреть только одну точку разрыва. Пусть $r \in (a,b)$ такая точка (при $r = a$ или $r = b$ доказательство еще проще).

В силу замечания 1, достаточно найти такую последовательность $(\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)) \equiv (\Omega_n)$, что $\Omega_n < 1/n$. Считаем, что $|f(x)| < M$. Удалим из отрезка $[a,b]$ интервал $\left(r - \frac{1}{8Mn}, r + \frac{1}{8Mn}\right) \equiv (\tilde{a}, \tilde{b})$. Тогда останутся два отрезка: $[a, \tilde{a}]$; $[\tilde{b}, b]$, на которых функция f будет непрерывна. Как и в доказательстве теоремы 1, можно построить два разбиения этих отрезков: P_n^1, P_n^2, что

$$\sum_{P_n^1} \omega_k \Delta x_k < \frac{1}{4n}; \sum_{P_n^2} \omega_k \Delta x_k < \frac{1}{4n}.$$

Так как колебание ω_r функции f на отрезке $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ не превосходит $2M$, то $\omega_r(\tilde{b} - \tilde{a}) \le \frac{1}{2n}$. Разбиение $P_n = P_n^1 \cup P_n^2 \cup \{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ будет искомым, ибо

$$\Omega_n = \sum_{P_n} \omega_k \Delta x_k = \sum_{P_n^1} \omega_k \Delta x_k + \sum_{P_n^2} \omega_k \Delta x_k + \omega_r(\tilde{b} - \tilde{a}) < 1/n.$$

Идея доказательства в случае конечного множества точек разрыва остается такой же. ►

Теорема 3. Ограниченные монотонные (неубывающие, невозрастающие) функции интегрируемы на отрезке.

◄ Достаточно рассмотреть неубывающую функцию $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Для разбиения $P = \{x_0, ..., x_n\}$ отрезка $[a,b]$ с диаметром $d(P) < \delta = \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \le \delta \sum_{k=1}^{n} \omega_k \le \delta(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Осталось сослаться на замечание 2.►

Замечание 3. Нетрудно сообразить, что монотонная функция может иметь бесконечное множество точек разрыва и оставаться интегрируемой. Пример функции Дирихле показывает, что ограниченные разрывные функции могут быть не интегрируемы. Окончательное решение проблемы интегрируемости разрывных ограниченных функций можно получить из теоремы Лебега, которую приведем ниже без доказательства.

Определение 2. Назовем множество $M \in \mathbb{R}$ *множеством лебеговой меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется покрытие множества M конечной или счетной системой интервалов (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < \varepsilon.$$

Теорема 4 (*Лебег*). Пусть функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Функция f будет интегрируемой тогда и только тогда, когда множество точек разрыва является множеством лебеговой меры нуль.

Замечание 4. Обсуждение теоремы Лебега и доказательство можно найти в учебниках [1, 5].

***Задачи*:** 1926, 1937, 1967, 1983, 1995, 2000, 2013, 2026, 2028, 2030.

ЧАВО

1. *Как появилось обозначение* $\int$ *для интеграла?*

Впервые такое обозначение применил Лейбниц. Оно является стилизованной первой буквой в слове «summa». Вообще Лейбницу мы обязаны многими обозначениями.

ЛЕКЦИЯ 26

Свойства интеграла

Читателю предлагается освежить в памяти критерий интегрируемости и замечание 2 из предыдущей лекции.

Свойство 1 (*линейность*). Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)\equiv \alpha f(x)+\beta g(x)$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, интегрируема на этом отрезке и справедливо равенство

$$\int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b f(x)dx.$$

◀ Доказательство вытекает из следующего соотношения между интегральными суммами

$$\sigma(F,P_\xi)=\alpha\sigma(f,P_\xi)+\beta\sigma(g,P_\xi).\blacktriangleright$$

Свойство 2. (*аддитивность*) Справедливы два утверждения:
1. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и точка $c\in\left(a,b\right)$. Тогда $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$.
2. Если функция f интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,b]$.

При этом в обоих случаях справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \qquad (*)$$

◀ Для функции f и разбиения $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ отрезка $[a,b]$ обозначим

$$\Omega_f\left(P\right)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\equiv\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P).$$

Предположим, что функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда найдется последовательность разбиений (P_n) отрезка $[a,b]$, что

$$\lim_{\mathbf{B}}\Omega_f\left(P_n\right)=0.$$

Если добавить к разбиениям P_n точку $c \in [a,b]$, то получим последовательность разбиений (R_n), для которой $\Omega_f(P_n) \ge \Omega_f(R_n) \ge 0$ (см. лемму 1 из лекции 24). Значит,

$$\lim_{\mathbf{B}} \Omega_f(R_n) = 0.$$

Но каждое из разбиений R_n можно представить в виде объединения разбиения R_n^a отрезка $[a,c]$ и разбиения R_n^b отрезка $[c,b]$. При этом $\Omega_f(R_n) = \Omega_f(R_n^a) + \Omega_f(R_n^b)$. Следовательно,

$$\lim_{\mathbf{B}} \Omega_f(R_n^a) = \lim_{\mathbf{B}} \Omega_f(R_n^b) = 0.$$

Это и означает, что функция *f* интегрируема на отрезках $[a,c],[c,b]$. Первое утверждение доказано.

Предположим, что функция *f* интегрируема на отрезках $[a,c]$, $[c,b]$. Тогда найдется последовательность разбиений (R_n^a) отрезка $[a,c]$ и последовательность разбиений (R_n^b) отрезка $[c,b]$, что

$$\lim_{\mathbf{B}} \Omega_f(R_n^a) = \lim_{\mathbf{B}} \Omega_f(R_n^b) = 0.$$

Значит, для последовательности разбиений $(R_n) = (R_n^a \cup R_n^b)$ отрезка $[a,b]$ получаем

$$\lim_{\mathbf{B}} \Omega_f(R_n) = 0,$$

что означает интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Так как для интегральных сумм этих разбиений справедливо равенство

$$\sigma(f, R_n) = \sigma(f, R_n^a) + \sigma(f, R_n^b),$$

то и формула $(*)$ доказана.▶

Замечание 1. Легко показать, с помощью определения 5 лекции 23, что равенство $(*)$ справедливо и в том случае, когда точка c находится вне отрезка $[a,b]$. При этом предполагается, что указанные интегралы существуют. Например, при $a > b > c$ получим цепочку равенств:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$$

Осталось заметить, что $\int_c^b f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx$.

Свойство 3 (*монотонность*). Пусть функции *f*, *g* интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и для всех *x* справедливо неравенство $f(x) \ge g(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

◀ Доказательство сразу следует из неравенства

$$\sigma(f,P) \geq \sigma(g,P)$$

для интегральных сумм указанных функций и свойства сохранения нестрогого неравенства, при переходе к пределу. ▶

Следствие 1. Если функция *f* интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

◀ Полагаем $g(x) \equiv 0$. ▶

Упражнение 1. Пусть интеграл от непрерывной и неотрицательной функции равен нулю. Показать, что это может быть только тогда, когда функция тождественно равна нулю. Указание — воспользуйтесь «противным» методом и свойством сохранения знака непрерывной функцией.

Свойство 4 (*оценка интеграла*). Предположим, что функция *f* интегрируема на отрезке $[a,b]$. Если для всех $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $m \leq f(x) \leq M$, то имеет место оценка

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

◀ Доказательство следует из свойства 3 данной лекции и примера 1 лекции 23. ▶

Свойство 5 (*интегрируемость модуля*). Пусть функция *f* интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда модуль этой функции интегрируем на отрезке $[a,b]$ и справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (**)$$

◀ Рассмотрим разбиение $P = \{x_0,...,x_n\}$ отрезка $[a,b]$. Обозначим $\omega_k(f), k=1,...,n$, колебание на каждом из отрезков разбиения для функции *f*, а символом $\omega_k(|f|), k=1,...,n$ — колебание функции $|f(x)|$. Так как $|f(x)-f(y)| \geq \| f(x)|-|f(y)\|$, то $\omega_k(|f|) \leq \omega_k(f)$ (см. упражнение 1 из лекции 25). Значит,

$$\Omega_{|f|}(P) = \sum_P \omega_k(|f|)\Delta x_k \leq \Omega_f(P) = \sum_P \omega_k(f)\Delta x_k.$$

Откуда, в силу критерия интегрируемости (лекция 24), получим, что функция $|f(x)|$ интегрируема. Так как справедливо неравенство $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$, то из свойства 3 следует неравенство (∗∗).▶

***Задачи*:** 2074, 2084, 2088, 2098, 2108, 2147, 2167.

ЧАВО

1. *Пусть функция является неотрицательной и не равной тождественному нулю. Может ли интеграл от такой функции быть равен нулю?*

Может. Например, рассмотрите функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

2. *Пусть модуль функции интегрируем. Будет ли эта функция интегрируема?*

Не обязательно. Вот пример функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

модуль которой интегрируем, а сама функция не интегрируема. Заметим, что $f(x)=2D(x)-1$, где $D(x)$ — функция Дирихле (пример 2 лекция 23).

Отдохнем ☺

Сидят два математика в кафе и спорят, знает ли простой народ математику. Один говорит, что знает, другой, что нет. Тут тому, кто говорил, что не знает, понадобилось выйти. Оставшийся математик подзывает официантку и говорит:

— Я задам вам вопрос, а вы отвечайте «икс куб на три». Запомните: «икс куб на три». Официантка пообещала и отошла. Тем временем вернулся второй математик, а первый ему говорит:

— Ну, давай проверим — спросим официантку.

Подзывает официантку и спрашивает:

— Чему равен интеграл от икс квадрат?

Та отвечает:

— Икс куб на три.

— Ну, вот видишь! — говорит первый математик. Второй математик был безмерно удивлен. Отходя от стола, официантка добавила:

— … плюс константа!

Тут и первый математик потерял дар речи.

ЛЕКЦИЯ 27

Теоремы о среднем для интеграла

Теоремы о среднем значении в математическом анализе встречаются довольно часто. Главный признак таких теорем — наличие некоторых чисел λ, c,…, которые позволяют вычислить, например, интеграл на некотором отрезке. В лекции 18 мы уже встречались с такого рода теоремой (теорема Лагранжа). Сначала докажем одну лемму.

Лемма 1. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, тогда и функция $f^2(x)$ интегрируема на том же отрезке.

◄ Из ограниченности функции $\left(|f(x)|<M\right)$ следует неравенство

$$\left|f^2(x)-f^2(y)\right|\le\left(|f(x)|+|f(y)|\right)\left|f(x)-f(y)\right|<2M\left|f(x)-f(y)\right|.$$

Тогда колебания функций $f^2(x)$ и f (x) связаны неравенством $\omega_k(f^2)<2M\omega_k(f)$ (см. упражнение 1 из лекции 25). Это значит, что справедливо неравенство

$$0\le\sum_P\omega_k(f^2)\Delta x_k<2M\sum_P\omega_k(f)\Delta x_k.$$

Осталось вспомнить критерий интегрируемости (лекция 24). ►

Следствие 1. Если функции f, g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то и произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо на этом отрезке.

◄ Для доказательства надо воспользоваться тождеством

$$f(x)g(x)\equiv\frac{1}{4}\left((f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\right)$$

и учесть линейность интеграла. ►

Теорема 1. Предположим, что функции f, g интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Пусть функция g не меняет знака (то есть неотрицательная или неположительная), а для функции f справедливо неравенство $m\le f(x)\le M$. Тогда найдется число $\lambda\in[m,M]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\lambda\int_a^b g(x)dx.$$

(Запомните — под интегралом осталась функция, которая сохраняет знак.)

◀ Достаточно рассмотреть случай неотрицательной функции $g(x)$. Из неравенства $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ и свойства монотонности интеграла (с учетом следствия 1) получим неравенство

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx. \tag{1}$$

1. Пусть $\int_a^b g(x)dx = 0$. Тогда в неравенстве (1) крайние интегралы равны нулю. Поэтому $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Итак, если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то подходит любое число λ.

2. Пусть $\int_a^b g(x)dx > 0$. Тогда из неравенства (1) получим

$$m \le \lambda =: \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M.$$

Откуда и следует требуемое.▶

Следствие 2. Пусть функция $g(x)$ интегрируема и неотрицательна (неположительна) на отрезке $[a,b]$. Если функция f непрерывна на этом отрезке, то найдется точка $c \in [a,b]$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

◀ По следствию 2 лекции 11 функция f принимает любое значение между наибольшим M и наименьшим m значениями функции f. Значит, $\exists c\big(f(c) = \lambda\big)$.▶

Следствие 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует точка $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Замечание 1. Полезно запомнить, что число $\lambda = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называют *средним значением функции f*.

Приведем еще одну теорему о среднем значении (вторая теорема о среднем значении) [15].

Теорема 2. Предположим, что функции *f*, *g* интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Если функция $g(x)$ неотрицательная и невозрастающая на этом отрезке, то найдется точка $c\in[a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx. \tag{2}$$

◄ Рассмотрим разбиение $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ $\left(\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\right)$ отрезка $[a,b]$.

<u>1 этап</u>. Покажем, что интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ является пределом сумм

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} g\left(\xi_k\right) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \tag{3}$$

Рассмотрим оценку

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sum_{k=1}^{n} g\left(\xi_k\right)\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\right| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left|g\left(x\right)-g\left(\xi_k\right)\right|\left|f(x)\right|dx \le$$

$$\le M_f \sum_{k=1}^{n}\left(g\left(x_{k-1}\right)-g\left(x_k\right)\right)\left(x_{k-1}-x_k\right) \le M_f d_P\left(g\left(a\right)-g\left(b\right)\right),$$

где $M_f = \sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right|$, а d_P — диаметр разбиения. Из этой оценки получим, что

$$\lim_{d_P\to 0} S_n = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

<u>2 этап</u>. Преобразуем сумму S_n. Введем обозначения: $F\left(x\right)=\int_a^x f(t)dt$, $F_k = \int_a^{x_k} f(t)dt$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} g\left(\xi_k\right)\left(F_k - F_{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} F_k\left(g\left(\xi_k\right)-g\left(\xi_{k+1}\right)\right) + F_n g\left(\xi_n\right). \tag{4}$$

В последней сумме формулы (4) множители $\left(g\left(\xi_k\right)-g\left(\xi_{k+1}\right)\right)$ будут неотрицательны. Если обозначить $m_F = \inf\limits_{x\in[a,b]} F\left(x\right)$ и $M_F = \sup\limits_{x\in[a,b]} F\left(x\right)$, то справедливы неравенства $m_F \le F_k \le M_F$. Значит,

$$m_F\left(g\left(\xi_k\right)-g\left(\xi_{k+1}\right)\right)\leq F_k\left(g\left(\xi_k\right)-g\left(\xi_{k+1}\right)\right)\leq M_F\left(g\left(\xi_k\right)-g\left(\xi_{k+1}\right)\right).$$

Суммируя полученные неравенства (по индексу k), с учетом формулы (4) получим двойное неравенство

$$m_F g\left(\xi_1\right)\leq S_n\leq g\left(\xi_1\right)M_F.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $d_P\to 0$, получим (можно взять $\xi_1=a$)

$$m_F g\left(a\right)\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq g\left(a\right)M_F. \qquad (5)$$

Если $g\left(a\right)=0$, то формула (2) доказана. Когда $g\left(a\right)\neq 0$, то из неравенства (5) получим

$$m_F\leq\frac{1}{g\left(a\right)}\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M_F. \qquad (6)$$

Так как функция $F\left(x\right)=\int_a^x f(t)dt$ непрерывна, то она принимает все значения на промежутке $\left[m_F,M_F\right]$. Значит, найдется точка $c\in[a,b]$, что справедливо равенство (2). ►

Замечание 2. Пусть функция g неотрицательная и <u>неубывающая</u> на отрезке $[a,b]$ и выполняются остальные условия теоремы 2, тогда найдется точка $c\in[a,b]$, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_c^b f(x)dx. \qquad (7)$$

◄ Надо сделать замены: $x=-\tilde{x}$, $\tilde{f}\left(\tilde{x}\right)=f\left(-\tilde{x}\right)$, $\tilde{g}\left(\tilde{x}\right)=g\left(-\tilde{x}\right)$, и применить теорему 2 для функций $\tilde{f}\left(\tilde{x}\right)$ и $\tilde{g}\left(\tilde{x}\right)$. ►

***Задачи*:** 2181, 2182, 2185, 2205, 2316, 2317.

ЧАВО

1. *Зачем нужны теоремы о среднем для интеграла?*

Эти теоремы полезны в том случае, когда точное значение интеграла получить трудно, но можно получить оценку интеграла (найти приближенное значение и т. п.).

2. *Что такое функционал?*

Пусть имеется множество M функций. Если каждой функции ставится в соответствие некоторое число, то говорят, что на множестве M задан функционал. Примером функционала (на множестве интегрируемых функций) может служить интеграл. Причем интеграл является линейным функционалом (см. свойство линейности). Еще один важный функционал — дельта-функция Дирака. Этот функционал ставит в соответствие каждой непрерывной функции f ее значение в нуле — $f(0)$.

ЛЕКЦИЯ 28

Интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим интеграл (интеграл с переменным верхним пределом)

$$H(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Оказывается, этот интеграл является связующим звеном между дифференциальным и интегральным исчислением. Докажем две теоремы о свойствах интеграла с переменным верхним пределом.

Теорема 1. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда функция H является непрерывной функцией на отрезке $[a,b]$.

◄ Так как функция f ограничена $\left(|f(x)|\le M\right)$, то справедливо неравенство

$$\left|H(x)-H(x_0)\right|\le\left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right|\le M\left|x-x_0\right|.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to x_0}H\left(x\right)=H\left(x_0\right)$. Откуда и следует непрерывность функции H (интеграла с переменным верхним пределом).►

Теорема 2. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0\in(a,b)$. Тогда интеграл $H(x)$ с переменным верхним пределом является дифференцируемой функцией в точке x_0 и справедливо равенство $H'(x_0)=f(x_0)$ или

$$\left.\left(\int_a^x f(t)dt\right)'\right|_{x=x_0}=f(x_0).$$

◄ Обозначим

$$F\left(x\right):=\frac{\int\limits_a^x f(t)dt-\int\limits_a^{x_0} f(t)dt}{x-x_0}-f(x_0)\equiv\frac{H(x)-H(x_0)}{x-x_0}-f(x_0).$$

Мы должны показать, что $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=0$, то есть что модуль $\left|F(x)\right|$ мал, когда x близко к x_0. Воспользуемся свойством аддитивности, тогда

$$F(x)=\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0}-\frac{f(x_0)}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} dx=\frac{\int_{x_0}^{x}\left(f(t)-f(x_0)\right)dt}{x-x_0}.$$

Из непрерывности функции f в точке x_0 следует, что

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\left(\left|t-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(t)-f(x_0)\right|<\varepsilon\right).$$

Пусть теперь $\left|x-x_0\right|<\delta$ (тогда и $\left|t-x_0\right|<\delta$). Воспользовавшись свойством 4 из лекции 26, получаем оценку $\left|F(x)\right|<\varepsilon$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=0$. Теорема доказана.►

Следствие 1. Из теорем 1 и 2 получаем, что каждая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция f имеет первообразную $H(x)=\int_a^x f(t)dt$. Кроме того, если у функции f будет конечное множество разрывов первого рода, то она имеет обобщенную первообразную $H(x)=\int_a^x f(t)dt$, ибо функция H — непрерывна.

Замечание 1. Интеграл, задаваемый формулой

$$L(x)=\int_x^b f(t)dt,$$

называют интегралом с переменным нижним пределом.

Следствие 2. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$L'(x)=\left(\int_x^b f(t)dt\right)'=-f(x).$$

Это формула следует из соотношения $\int_x^b f(t)dt=-\int_b^x f(t)dt$ (лекция 23).

Формула Ньютона — Лейбница

Теорема 3 (*Ньютон — Лейбниц*). Пусть функция f ограничена и имеет не более конечного множества точек разрыва первого рода. Если функция Φ является обобщенной первообразной (лекция 20) функции f, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)=:\Phi(x)\Big|_a^b.$$

◄ В следствии 1 мы установили, что у функции f есть еще одна обобщенная первообразная $\Phi_1(x)=\int_a^x f(t)dt$. Тогда, по лемме 1 из лекции 20, получим тождество $\Phi(x)-\Phi_1(x)\equiv c=const$. Так как $\Phi_1(a)=0$, то $c=\Phi(a)$. При $x=b$ получаем равенство

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx+\Phi(a),$$

что и доказывает теорему.►

Замечание 2. Для интегрируемой функции f предел интегральных сумм равен интегралу. Значит, справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

Эта формула позволяет вычислять некоторые пределы с помощью интеграла.

Пример 1. Пусть требуется вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=I.$$

Воспользуемся замечанием 2. После преобразования

$$\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

находим, что

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование по частям. Замена переменной

Докажем две теоремы, которые часто помогают вычислять интегралы.

Теорема 4 (*интегрирование по частям*). Пусть функции $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

◄ Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ тождество

$$u(x)v'(x)+u'(x)v(x)\equiv\big(u(x)v(x)\big)'. \qquad (*)$$

По теореме Ньютона — Лейбница получим

$$\int_a^b\big(u(x)v(x)\big)'\,dx=u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Осталось взять интеграл от правой и левой части тождества (*), что дает нам формулу

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Переносим второй интеграл в правую часть (с противоположным знаком). Теорема доказана. ►

Теорема 5 (*замена переменной*). Пусть выполняются следующие условия:

1. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.
2. Функция $g:[\alpha,\beta]\to[a,b],\ g(t)=x$, непрерывно дифференцируема.
3. $g(\alpha)=a,\ g(\beta)=b$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

◄ По следствию 1 у функции f есть первообразная F. Тогда по теореме о производной сложной функции (лекция 15) получим соотношение

$$\frac{d}{dt}\big(F(g(t))\big) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Значит, функция $F(g(t))$ является первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$. Осталось применить формулу Ньютона — Лейбница.

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = F(g(t))\Big|_\alpha^\beta = F\left(x\right)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)dx. \blacktriangleright$$

Замечание 3. Запомните, что замена переменной в определенном интеграле состоит из трех этапов:

1) замена переменной в подынтегральной функции $\big(f(x)\to f(g(t))\big)$;
2) замена переменной в дифференциале $\big(dx\to g'(t)dt\big)$;
3) изменение пределов интегрирования $\left(\int_a^b \ \to \int_\alpha^\beta\ \right)$.

Пример 2. Так как функция $y=|x|$ является обобщенной первообразной для функции $y=\operatorname{sgn}x$ (пример 1 лекции 20), то сразу находим

$$\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = |x|\Big|_{-1}^2 = 1.$$

Упражнение 1 (запомнить). Пусть функция f является *нечетной* и непрерывной на отрезке $[-a,a]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$

Указание. Если сделать замену $x=-t$, то получим равенство $\int\limits_{-a}^{0} f\left(x\right)dx = \int\limits_{0}^{a} f\left(t\right)dt$.

Упражнение 2 (запомнить). Пусть функция *f* является *четной* и непрерывной на отрезке $\left[-a,a\right]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt.$$

Указание. После замены $x = -t$ получим $\int_{-a}^{0} f\left(x\right)dx = -\int_{0}^{a} f\left(t\right)dt$.

***Задачи*:** 2209, 2211, 2222, 2233, 2241, 2246, 2258, 2265, 2281.

ЧАВО

1. *Как быть с интегралом, у которого оба предела являются переменными? Например, как найти*

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt \text{ ?}$$

Надо воспользоваться аддитивностью интеграла:

$$\int_{x}^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{a}^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{x}^{a} \frac{\sin t}{t} dt =: H\left(x^2\right) + L\left(x\right).$$

2. *Делаю замену* $x = 1/t$ *в интеграле*

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{1}^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt = -I.$$

Странный результат?

Надо аккуратно проверять условия теоремы о замене переменной! В данном случае $g\left(t\right) = \frac{1}{t}$; $g:[-1,1] \to \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ функция g (t) разрывная, причем отрезок $[-1,1]$ переходит во внешность этого отрезка.

3. *Теорему 2 об интеграле с переменным верхним пределом также открыли Ньютон и Лейбниц?*

Эту теорему знал Барроу (учитель Ньютона). Поэтому ее основной результат называют формулой Барроу.

Отдохнем ☺

Студент пишет письмо отцу: «Дорогой папа! $пешу $ообщить вам, что у меня в$е хорошо. Я учу$ь нормально. Правда, мне не $ов$ем легко $ этой учебой, я $овершенно не могу думать ни о чем другом. Пожалуй$та, вышли мне $рочную телеграмму. Я буду $частлив получить от тебя ве$точку. Твой $ын».

Вскоре пришло письмо от отца: «Сынок. Понимаю твое НЕТерпение. НЕ Трудись слишком сильно, а то будешь совсем НЕТрудоспособным. Если стаНЕТ очень тяжело, пиши еще, если НЕТрудно. Я всегда помогу тебе советом. Твой отец».

ЛЕКЦИЯ 29

Приложения интеграла

В большинстве приложений интеграла используется понятие из следующего определения.

Определение 1. Рассмотрим упорядоченные пары точек (x, y) из отрезка $[a, b]$. Пусть каждой такой паре (x, y) ставится в соответствие действительное число $A(x, y)$. Будем говорить, что задана *аддитивная функция A отрезка* $[a,b]$, если для любой тройки $\{x, y, z\}$ точек из этого отрезка выполняется равенство (условие аддитивности)

$$A(x,y)+A(y,z)=A(x,z).$$

Замечание 1. При $x=y=z$ из определения следует, что $\forall x\big(A(x,x)=0\big)$, а при $x=z$ получим $\forall y\forall z\big(A(z,y)=-A(y,z)\big)$.

Замечание 2. При удачном выборе параметра длина траектории, площадь фигуры, объем тела и т. п. являются аддитивными функциями.

Замечание 3. Работа $A(t_1,\ t_2)$ за промежуток времени $[t_1,\ t_2]$ является аддитивной функцией.

Замечание 4. Интеграл

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = A(\alpha,\ \beta)$$

будет аддитивной функцией.

Последний пример является, при некоторых ограничениях, универсальным. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) $A(x,y)$ — аддитивная функция на отрезке $[a,b]$;
2) функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$;
3) для всех пар точек (α,β), $(\alpha<\beta)$ из отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство

$$\left(\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\right)(\beta-\alpha)\le A(\alpha,\beta)\le\left(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\right)(\beta-\alpha). \qquad (*)$$

В этом случае

$$A(a,b)=\int_a^b f(x)dx.$$

◀ Рассмотрим разбиение $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ отрезка $[a,b]$. Пусть $m_k=\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $M_k=\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, а верхние и нижние суммы Дарбу (лекция 24) заданы формулами

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k;\ \underline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k.$$

Запишем неравенства вида (*) для отрезков $[x_{k-1},x_k]$

$$m_k(x_k-x_{k-1})\le A(x_{k-1},x_k)\le M_k(x_k-x_{k-1}).$$

Суммируя эти неравенства по индексу k, получим (с учетом аддитивности) двойное неравенство

$$\underline{S}(f,P)\le A(a,b)\le \overline{S}(f,P).$$

Осталось перейти к пределу, когда диаметр разбиения P стремится к нулю. Теорема доказана.▶

Рассмотрим несколько важных приложений этой теоремы.

Пример 1 (длина траектории). Вычислим *длину траектории* в пространстве $\mathbb{R}^3$, которую задает гладкая вектор-функция $\vec{r}(t), t\in[a,b]$ (лекция 16). Вектор скорости в момент времени t равен $\vec{r}'(t)$, а величина скорости равна $\left|\vec{r}'(t)\right|$. Пусть длина траектории за промежуток времени $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ равна $l(\alpha,\beta)$. Тогда из физических соображений вытекает неравенство

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]}\left|\vec{r}'(t)\right|(\beta-\alpha)\le l(\alpha,\beta)\le \sup_{x\in[\alpha,\beta]}\left|\vec{r}'(t)\right|(\beta-\alpha).$$

По теореме 1 длину $l(a,b)$ всей траектории можно определить формулой

$$l(a,b)=\int_a^b\left|\vec{r}'(t)\right|dt=\int_a^b\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}dt=\int_a^b dl. \qquad (**)$$

Дифференциальную форму dl называют *дифференциалом длины дуги*. Справедливо равенство (теорема Пифагора для дифференциалов)

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Пусть траектория плоская, то есть можно выбрать систему координат, в которой $z(t)\equiv 0$. Тогда формула (**) будет (для плоской кривой) иметь следующий вид:

$$l(a,b)=\int_a^b\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt.$$

Пример 2 (площадь криволинейной трапеции). Рассмотрим график функции $y=f(x), f(x)>0$. Будем называть *криволинейной трапецией на*

$[a,b]$ множество $G_{a,b} = \{(x,y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$. Пусть $a \le \alpha \le \beta \le b$. Обозначим символом $S(\alpha,\beta)$ площадь криволинейной трапеции $G_{\alpha,\beta}$.Тогда $S(\alpha,\beta)$ является аддитивной функций и справедливо неравенство

$$\left(\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\right)(\beta-\alpha) \le S(\alpha,\beta) \le \left(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\right)(\beta-\alpha).$$

Поэтому по теореме 1 площадь криволинейной трапеции на отрезке $[a,b]$ вычисляется по формуле

$$S(a,b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Пример 3 (площадь в полярных координатах). Пусть требуется вычислить площадь в полярных координатах криволинейного сектора, который ограничен двумя лучами: $\varphi = a; \varphi = b$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$. Обозначим символом $S(\alpha,\beta)$ — площадь сектора между лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где $a \le \alpha \le \beta \le b$. Так как площадь $S(\alpha,\beta)$ содержится внутри кругового сектора радиуса $\max\limits_{\varphi\in[\alpha,\beta]} r(\varphi)$ и вне кругового сектора радиуса $\min\limits_{\varphi\in[\alpha,\beta]} r(\varphi)$, то для всех α,β справедливо неравенство:

$$\frac{1}{2}\min_{\varphi\in[\alpha,\beta]} r^2(\varphi)(\beta-\alpha) \le S(\alpha,\beta) \le \frac{1}{2}\max_{\varphi\in[\alpha,\beta]} r^2(\varphi)(\beta-\alpha).$$

Поэтому из теоремы 1 вытекает формула

$$S(a,b) = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi.$$

***Задачи*:** 2401, 2403, 2419, 2426, 2434, 2442, 2446.

ЧАВО

1. *Геометрический смысл интеграла Римана — площадь?*

Точнее будет сказать: «геометрический смысл интеграла Римана от неотрицательной функции — площадь под графиком этой функции на отрезке интегрирования». Если считать площадь над осью абсцисс со знаком плюс, а под осью абсцисс — со знаком минус, то получим *алгебраическую* площадь графика функции на отрезке. Тогда геометрический смысл интеграла Римана — алгебраическая площадь. Например, из геометрических соображений получим, что $\int\limits_0^{2\pi} \sin x dx = 0$.

2. *Можно ли с помощью определенного интеграла вычислять площадь поверхности, объем...?*

Можно (особенно для тел вращения), но лучше пользоваться специальными интегралами (объемными, поверхностными). Они нам встретятся во втором семестре.

ПЯТЬ НАПОМИНАНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА

1. Помните о свойствах интеграла (аддитивность, монотонность и т. п.).
2. При замене переменных надо изменить пределы интегрирования.
3. Интегрируя по частям, не забывайте делать двойную подстановку.
4. Интеграл от положительной функции — площадь под графиком этой функции.
5. Помните о свойствах интеграла от четных и нечетных функций на симметричном промежутке.

Отдохнем ☺

Англичанин пишет письмо своему сыну-студенту:

«Дорогой Джон! В конверт я вкладываю 20 фунтов, как ты просил. Кстати, запомни раз и навсегда, что число 20 пишется с одним нулем, а не с двумя».

ЛЕКЦИЯ 30

Формула Тейлора

Рассмотрим задачу интерполяции: найти многочлен $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, если заданы значения этого многочлена и его производных в точке $x = a$.

Лемма 1. Многочлен $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ при любом a может быть записан в виде

$$P(x)=b_0+b_1(x-a)+\ldots+b_n(x-a)^n, \quad (1)$$

где

$$b_k=\frac{P^{(k)}(a)}{k!},\ k=0,\ldots,n. \quad (2)$$

◄ Используя бином Ньютона, получим

$$x^k \equiv \left((x-a)+a\right)^k \equiv \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i}\left(x-a\right)^i, k=1,...,n. \qquad (*)$$

Подставив тождества (∗) в формулу $P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, получим разложение (1). Откуда после дифференцирования находим $P^{(k)}(a)=b_k k!$. Значит, равенства (2) обоснованы. ►

Следствие 1. Пусть для многочлена степени *n* заданы значения $(P(a)=\gamma_0, P'(a)=\gamma_1,...,P^{(n)}(a)=\gamma_n)$. Тогда существует единственный многочлен степени *n* с такими значениями. Этот многочлен задается формулой

$$P(x)=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{1!}(x-a)+...+\frac{\gamma_n}{n!}(x-a)^n.$$

Упражнение 1. Напишите формулу для многочлена третьей степени $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, который принимает указанные значения в заданных точках: $P_3(x_1)=c_1, P_3(x_2)=c_2, P_3(x_3)=c_3, P_3(x_4)=c_4$.

Указание. Рассмотрите многочлен

$$P(x)=\lambda_1(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+\lambda_2(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+$$
$$+\lambda_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+\lambda_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Такой многочлен будет частным случаем *интерполяционного многочлена Лагранжа,* который часто встречается в численных методах.

Введем несколько новых понятий.

Определение 1. Пусть функция *f* имеет в точке $x = a$ все производные до порядка *n*, включительно. Запишем следующий многочлен:

$$f_n(a,x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Этот многочлен назовем *многочленом Тейлора* степени *n* для функции *f* в точке *a*. Если $a = 0$, то такой многочлен называют еще *многочленом Маклорена*. Формулу

$$f(x)=f_n(a,x)+R_n(a,x)$$

будем называть *формулой Тейлора* (*формулой Маклорена* при $a = 0$), где $R_n(a,x)$ (разность между функцией *f* и многочленом Тейлора) называется *остатком формулы Тейлора* (порядка *n*).

Для того чтобы пользоваться формулой Тейлора (в приближенных вычислениях и т. п.), надо изучить поведение остатка $R_n(a,x)$.

Теорема 1 (*Пеано*). Пусть функция *f* дифференцируема $n-1$ раз в некоторой окрестности точки *a*. Если существует $f^{(n)}(a)$, то для остатка справедлива асимптотическая оценка

$$R_n(a,x)=o\left((x-a)^n\right), x\to a.$$

◀ Для следующей неопределенности вида $\frac{0}{0}$ применим (лекция 19) правило Лопиталя $n-1$ раз.

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(a,x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f_n(a,x)}{(x-a)^n}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f_n^{(n-1)}(a,x)}{(x-a)}=$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-f^{(n)}(a)\right)=\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(a)-f^{(n)}(a)\right)=0.$$

Теорема доказана. ▶

Замечание 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда формулу

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right), x\to a,$$

называют формулой Тейлора с остатком в форме Пеано.

Теорема 2. Зададим неотрицательное целое число n. Предположим, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Тогда для остатка формулы Тейлора имеет место равенство

$$R_n(a,x)=\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt, x\in[a,b]. \qquad (3)$$

◀ Применим индукцию по n. При $n = 0$ формула (3) превращается в формулу Ньютона — Лейбница

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt.$$

Пусть при $n=m$ формула (3) справедлива, то есть

$$f(x)-f_m(a,x)=\int_a^x f^{(m+1)}(t)\frac{(x-t)^m}{m!}dt.$$

Покажем, что тогда равенство (3) выполняется и при $n = m+1$. Для этого воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$f(x)-f_m(a,x)\equiv R_m(a,x)=\int_a^x f^{(m+1)}(t)\frac{(x-t)^m}{m!}dt=f^{(m+1)}(t)\left(-\frac{\left(x-t\right)^{m+1}}{\left(m+1\right)!}\right)\Bigg|_{t=a}^{t=x}+$$

$$+\int_a^x f^{(m+2)}(t)\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!}dt=f^{(m+1)}(a)\frac{\left(x-a\right)^{m+1}}{(m+1)!}+\int_a^x f^{(m+2)}(t)\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!}dt.$$

Осталось заметить, что

$$R_{m+1}(a,x)=f(x)-f_{m+1}(a,x)=R_m(a,x)-f^{(m+1)}(a)\frac{\left(x-a\right)^{m+1}}{(m+1)!}. \blacktriangleright$$

Следствие 2 (*Лагранж*). Если условия теоремы 2 выполняются, то найдется ξ между a и x, что для остатка формулы Тейлора имеет место равенство

$$R_n(a,x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{\left(x-a\right)^{n+1}}{(n+1)!}, \xi=a+\theta(x-a), 0<\theta<1. \qquad (L)$$

◀ Обозначим $F(t)=f^{(n+1)}(t)$ и $G(t)=\frac{(x-t)^n}{n!}$. Для доказательства воспользуемся следствием 2 из теоремы о среднем (лекция 27). Тогда

$$R_n(a,x)=\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt=\int_a^x F(t)G(t)dt=f^{(n+1)}(\xi)\frac{\left(x-a\right)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где точка ξ находится между a и x. ▶

Определение 2. Правая часть равенства (L) называется остатком формулы Тейлора в *форме Лагранжа*, а правую часть равенства (3) называют остатком формулы Тейлора в *интегральной форме.*

Замечание 2. Пусть $h=dx=x-a$, $\Delta f=f(x)-f(a)$. Тогда формуле Тейлора можно придать следующий вид:

$$\Delta f=df(a,h)+\frac{d^2f(a,h)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(a,h)}{n!}+R_n(a,x).$$

Это формула Тейлора в дифференциалах.

Упражнение 2. Разложите функцию $\mathrm{tg}\,x$ по формуле Маклорена $\left(a=0\right)$. Напишите, сколько сможете слагаемых.

***Задачи*:** 1381, 1394, 1397, 1398, 1401.

ЧАВО

1. *Что такое интерполяция?*

Интерполяцией называется метод, с помощью которого можно восстановить функцию по нескольким известным ее значениям.

2. *Зачем нужны разные остатки в формуле Тейлора?*

Остаток в форме Пеано удобно применять при вычислении пределов. Остаток в форме Лагранжа удобен в приближенных вычислениях. Надо отметить, что формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа — далеко идущее обобщение формулы конечных приращений (теорема о среднем).

3. *Формула Тейлора и формула Маклорена, какая разница?*

Формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора, когда $a = 0$.

Отдохнем ☺

После экзамена студент поворачивается к своей соседке по столу и говорит:

— Я сдал совершенно пустой лист бумаги. Ничего не смог вспомнить!

Девушка отвечает:

— Со мной то же самое. Чистый лист сдала. Надеюсь, преподаватель не подумает, что мы списали друг у друга.

ЛЕКЦИЯ 31

Формула Маклорена для основных элементарных функций

Запишем (лекция 30) формулу Маклорена с остатком в форме Лагранжа

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!};\ \xi = \theta x,\ 0 < \theta < 1. \quad (*)$$

Чтобы выписать такую формулу для конкретной функции, надо уметь вычислять производные требуемого порядка в точке нуль. Для некоторых элементарных функций мы умеем (лекция 17) вычислять производные любого порядка.

Справедливы следующие основные разложения для элементарных функций (везде ниже $(0 \le \theta \le 1)$):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x; \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x; \quad (2)$$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \frac{x^{2k}}{(2k)!}\mathrm{ch}\theta x; \quad (3)$$

$$\mathrm{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathrm{ch}\theta x; \quad (4)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{(n)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}; \quad (5)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n^{LN}(0,x), |x|<1; \tag{6}$$

$$\left(1+x\right)^{\lambda}=\sum_{k=0}^{n}C_{\lambda}^{k}x^{k}+R_n^{BN}\left(0,x\right), |x|<1, \tag{7}$$

где

$$C_{\lambda}^{k}=\frac{\lambda(\lambda-1)\cdot...\cdot(\lambda-k+1)}{k!}=\begin{pmatrix}\lambda\\ k\end{pmatrix}.$$

Так как для функции $f_1(x)=\sin x$ справедливо соотношение

$$f_1^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

то легко получить разложение (1).

Аналогично, для функции $f_2(x)=\cos x$ имеем

$$f_2^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

и формула (2) справедлива. Доказать формулы (3), (4), (5) не составляет труда даже слабому студенту.

Займемся теперь формулой (6). Пусть $f_3(x)=\ln(1+x)$. Тогда

$$f_3^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Изучим поведение остатка $R_n^{LN}(0,x)$. Запишем этот остаток в интегральной форме (лекция 30).

$$R_n^{LN}(0,x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\left(\frac{t-x}{t+1}\right)^n dt.$$

Сделаем замену $y=\dfrac{t-x}{t+1}$. Тогда

$$R_n^{LN}(0,x)=\int_0^{-x}\frac{y^n}{y-1}dy.$$

Применим теорему о среднем (лекция 27). Обозначив $f(y)=\dfrac{1}{y-1}$, $g(y)=y^n$, получим

$$R_n^{LN}(0,x)=-\frac{1}{1+\theta x}\int_0^{-x}y^n dy=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}, 0<\theta<1. \tag{8}$$

Эта формула удобна при оценке погрешности, зависящей от переменных x и n.

Осталось исследовать равенство (7). Если λ натуральное число, то получим известную формулу бинома Ньютона (хотя знали эту формулу и до Ньютона, а вот Ньютон изучил общий случай $\lambda \in \mathbb{R}$). Запишем остаток (для $x > 0$) в форме Лагранжа.

$$R_n^{BN}(0,x) = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1+\theta x)^{\lambda-1-n}, 0<\theta<1. \qquad (9)$$

При отрицательных значениях x удобнее пользоваться остатком в интегральной форме

$$R_n^{BN}(0,x) = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\lambda-1}\left(\frac{x-t}{t+1}\right)^n dt.$$

После замены $y = \frac{t-x}{t+1}$, как и выше, получим

$$\int_0^x (1+t)^{\lambda-1}\left(\frac{x-t}{t+1}\right)^n dt = (-1)^n \int_{-x}^0 \left(\frac{x+1}{1-y}\right)^{\lambda} \frac{y^n}{1-y} dy.$$

Из теоремы о среднем (лекция 27), при $f(y) = \frac{1}{(1-y)^{\lambda+1}}$, $g(y) = y^n$, находим

$$R_n^{BN}(0,x) = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1+\theta x)^{-\lambda-1}(1+x)^{\lambda}. \qquad (10)$$

Замечание 1. Можно отметить, что все остатки, которые мы упомянули, стремятся к нулю при $n \to \infty$ и фиксированном x.

Монотонность дифференцируемых функций

Здесь мы используем формулу Тейлора для исследования монотонности функций. Для дальнейшего полезно вспомнить лекцию 18 (возрастание и убывание функций в точке). Пусть функция $f: P \to \mathbb{R}$ задана на промежутке P.

Определение 1. Функция f называется *возрастающей* (*убывающей*) *на промежутке* P, если для каждой пары $x, y \in P$, $x > y$ справедливо неравенство $f(x) > f(y)$ $(f(x) < f(y))$.

Определение 2. Функция f называется *невозрастающей* (*неубывающей*) *на промежутке* P, если для каждой пары точек $x, y \in P$, $x > y$ справедливо неравенство $f(x) \le f(y)$ $(f(x) \ge f(y))$.

Определение 3. Все функции из определений 1 и 2 называются *монотонными* на промежутке P.

Теорема 1. Пусть функция $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда справедливы четыре утверждения:

1) $(f' > 0) \Rightarrow f$ — возрастающая;
2) $(f' < 0) \Rightarrow f$ — убывающая;
3) $(f' \geq 0) \Leftrightarrow f$ — неубывающая;
4) $(f' \leq 0) \Leftrightarrow f$ — невозрастающая.

◀ Все утверждения следуют из двух фактов:
а) в силу теоремы Лагранжа (лекция 18) найдется такая точка *c* между *x* и *y*, что справедливо равенство

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y);$$

б) определения производной

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \blacktriangleright$$

***Задачи*:** 1270, 1288, 1289, 1563, 1576, 1587.

ЧАВО

1. *Почему нет разложения Маклорена функции* $\ln x$ *?*

Эта функция не определена в окрестности $a = 0$. Правда, есть разложение функции $\ln x$ в окрестности $a = 1$, ибо

$$\ln x = \ln\big(1 + (x - 1)\big).$$

2. *Верно ли, что условие $f' > 0$ является необходимым и достаточным для возрастания функции f.*

Неверно. Рассмотрите пример функции $f(x) = x^3$.

ЛЕКЦИЯ 32

Экстремумы дифференцируемых функций

Рассмотрим некоторую функцию $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Пусть $x_0 \in (a, b)$ и $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Точка x_0 является (лекция 18) точкой строгого локального минимума (максимума), если найдется проколотая окрестность $\dot{U}_\delta(x_0)$, такая, что для всех *x* из этой окрестности выполнено неравенство $\Delta f > 0$ $(\Delta f < 0)$.

Определение 1. Если найдется $\delta > 0$, что $f' > 0$ в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f' < 0$ в интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, то будем говорить, что *производная меняет в точке x_0 знак с* (+) *на* (–). Аналогично определяется термин — *производная меняет в точке x_0 знак с* (–) *на* (+).

Теорема 1 (*первое достаточное условие экстремума*). Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ и дифференцируема в проколотой окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$. Тогда справедливы два утверждения:

1) если производная меняет в точке x_0 знак с (+) на (–), то в точке x_0 строгий локальный максимум;

2) если производная меняет в точке x_0 знак с (–) на (+), то в точке x_0 строгий локальный минимум.

◀ Достаточно доказать первое утверждение. Воспользуемся формулой Лагранжа. Тогда найдется точка c между x и x_0, что справедливо равенство $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$. Теперь при $x<x_0$ будет $f'(c)>0$. Значит, имеет место неравенство $\Delta f(x)<0$. Когда $x>x_0$, то аналогично получим неравенство $\Delta f(x)<0$. Значит, неравенство $\Delta f<0$ справедливо, и в точке x_0 строгий локальный максимум.▶

Теорема 2 (*второе достаточное условие экстремума*). Пусть функция f непрерывно дифференцируема нужное число раз в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$. Тогда справедливы три утверждения:

1) если $f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=...=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}(x_0)>0$, то в точке x_0 строгий локальный минимум;

2) если $f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=...=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}(x_0)<0$, то в точке x_0 строгий локальный максимум;

3) если $f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=...=f^{(2n)}(x_0)=0, f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$, то в точке x_0 нет локального экстремума.

◀ Сначала докажем два первых утверждения. Воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Лагранжа (лекция 30). В этом случае для многочлена Тейлора справедливо тождество: $f_{2n-1}(x_0,x)\equiv f(x_0)$. Тогда найдется точка c между x и x_0, что

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}. \qquad (*)$$

В силу непрерывности производной, отыщется окрестность, в которой $\operatorname{sgn} f^{(2n)}(c)=\operatorname{sgn} f^{(2n)}(x_0)$. Но тогда из равенства $(*)$ получаем $\operatorname{sgn}\Delta f=\operatorname{sgn} f^{(2n)}(x_0)$. Откуда и следуют два первых утверждения. Для доказательства третьего утверждения (теперь $f_{2n}(x_0,x)\equiv f(x_0)$) надо написать формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}. \qquad (**)$$

Как и выше, найдется окрестность, где $f^{(2n+1)}(c)\neq 0$. Тогда из формулы (**) видно, что приращение функции меняет знак при переходе через точку x_0. Значит, в этой точке нет экстремума.►

Выпуклость и точки перегиба

Пусть функция *f* дифференцируема на интервале (a,b).

Определение 2. Функция f называется *выпуклой вниз* (*выпуклой вверх*) *в точке* x_0, если график этой функции в некоторой окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$ лежит выше (ниже) касательной в точке x_0, то есть для всех $x\in\dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0);\ \big(f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big).$$

Определение 3. Функция называется *выпуклой вниз* (*вверх*) *на промежутке P*, если она является выпуклой вниз (вверх) в каждой точке промежутка *P*.

Определение 4. Если существует такое δ, что на одном из интервалов $(x_0-\delta,x_0)$ и $(x_0,x_0+\delta)$ функция *f* выпуклая вверх, а на другом выпуклая вниз, то x_0 называется *точкой перегиба* функции *f*.

Теорема 3. Пусть функция *f* имеет требуемое количество непрерывных производных. Тогда справедливы три утверждения:

1) если $f^{(2)}(x_0)=...=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}(x_0)>0$, то в точке x_0 функция выпуклая вниз;

2) если $f^{(2)}(x_0)=...=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}(x_0)<0$, то в точке x_0 функция выпуклая вверх;

3) если $f^{(2)}(x_0)=...=f^{(2n)}(x_0)=0, f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$, то точка x_0 является точкой перегиба.

◄ Воспользуемся той же идеей, что и в доказательстве теоремы 3. Сначала докажем два первых утверждения. Из формулы Тейлора получим

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}.$$

Дальше надо повторить рассуждения доказательства теоремы 3 для правой части указанного равенства. Третье утверждение тоже не составляет труда.►

Замечание 1. Можно (так часто и делают) дать определение выпуклости на интервале, не зависящее от дифференцируемости функции *f*. Пусть дана функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Если для любых двух точек x_1, x_2 из интервала (a,b) и всех чисел $\lambda\ge 0, \mu\ge 0, \lambda+\mu=1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)<\lambda f(x_1)+\mu f(x_2) \ \left(f(\lambda x_1+\mu x_2)>\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)\right),$$

то функция *f* называется выпуклой вниз (вверх) на интервале (a,b).

Можно показать, что в случае дифференцируемой функции такое определение эквивалентно определению 2. Достаточно доказать этот факт для функций выпуклых вниз.

Лемма 1. Функция *f* является выпуклой вниз в смысле замечания 1, тогда и только тогда, когда для любых трех точек $x_1<x<x_2$ из интервала (a,b) выполняется неравенство

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{1}$$

◀ Обозначим $x=\lambda x_1+\mu x_2$, где $\lambda+\mu=1, \lambda\ge 0, \mu\ge 0$. Из этих двух равенств находим

$$\lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1};\ \mu=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Теперь неравенство $f(x)<\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$, определяющее выпуклость вниз, может быть записано в виде

$$f(x)<\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$(x_1-x_2)f(x)+(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)>0,$$

которое эквивалентно неравенству (1). Надо только заметить, что $x_1-x_2=-(x_2-x)-(x-x_1)$.▶

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ является выпуклой вниз в смысле замечания 1, тогда производная $f'(x)$ возрастает (строго).

◀ Пусть в неравенстве (1) один раз x стремится к x_1, а другой раз x стремится к x_2. Тогда получим двойное неравенство:

$$f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'(x_2).$$

Значит, производная не убывает. Если теперь воспользоваться теоремой о среднем (теорема 5, лекция 18), то снова из неравенства (1) получим

$$f'(x_1) \le f'(\zeta_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\zeta_2) \le f'(x_2).$$

Откуда следует строгое неравенство $f'(x_1) < f'(x_2)$.►

Теорема 4. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b). Для выпуклости вниз функции f в смысле определения 2 необходимо и достаточно, чтобы она была выпукла вниз в смысле замечания 1.

◄*Необходимость*. Дано, что для любых точек $p,q \in (a,b)$ выполняется неравенство $f(q) > f(p) + f'(p)(q-p)$. Из этого неравенства вытекает, что

$$\frac{f(p)-f(q)}{p-q} < f'(p)$$

при $q < p$, а

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} > f'(p)$$

при $q > p$. Из этих двух неравенств для $x_1 < x < x_2$ (один раз берем $x = p, x_1 = q$, а другой раз пусть $x = p,\ x_2 = q$) получаем неравенство (1).

Достаточность. Воспользуемся теоремой о среднем (лекция 18). Тогда

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \left(f'(\theta) - f'(x_0)\right)(x - x_0) = \Delta,$$

где точка θ находится между x и x_0. Из следствия 1 получаем, что справедливо неравенство $\Delta > 0$, если $x \ne x_0$.►

Упражнение 1. Нарисуйте произвольный график. Пусть это график производной некоторой функции *f*. Восстановите теперь график исходной функции *f*.

***Задачи*:** 1449, 1481, 1489, 1499, 1532, 1541, 1576.

ЧАВО

1. *Есть в книгах такие понятия: выпуклость, вогнутость, выпуклость вверх, выпуклость вниз, вогнутость вверх, вогнутость вниз. Как с ними разобраться?*

Наиболее наглядными нам кажутся понятия: выпуклость вверх, выпуклость вниз. Отметим, что (выпуклость вверх) ≡ (вогнутость вниз) ≡ (вогнутость); (выпуклость вниз) ≡ (вогнутость вверх) ≡ (выпуклость).

2. *У вас есть определение: функция f называется выпуклой вниз (вверх), если для любых двух точек x_1, x_2 из интервала (a,b) и всех чисел $\lambda \ge 0, \mu \ge 0, \lambda + \mu = 1$ выполняется неравенство*

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) < \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \ \left(f(\lambda x_1 + \mu x_2) > \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)\right).$$

Какой его геометрический смысл?

Для выпуклой вниз (вверх) функции оно означает, что для любых двух точек графика *M*, *N* все точки на графике между ними расположены ниже (выше) отрезка [*M*, *N*].

ЛЕКЦИЯ 33

Несобственные интегралы и их свойства

До сих пор понятие интеграла имело смысл только для ограниченных функций, заданных на ограниченном промежутке. Сейчас мы можем придать смысл интегралам от неограниченных функций или от функций, область определения которых не ограничена.

Определение 1. Пусть для любого $c \in (a,b)$ функция *f* ограничена и интегрируема на отрезке $[a,c]$, но не является ограниченной на промежутке $[a,b)$. Тогда точку b будем называть $(b-)$ *особой точкой функции f*. Если функция не ограничена на промежутке $(a,b]$, но является ограниченной и интегрируемой на любом отрезке $[c,b]$, то точку a будем называть $(a+)$ *особой точкой функции f*. Если функция *f* задана на неограниченном промежутке $[a,+\infty)$ $\left((-\infty,b]\right)$, то особой точкой функции будем называть также $+\infty$ $(-\infty)$ или обе одновременно, когда функция задана на множестве $\mathbb{R}$.

Замечание 1. Далее будем рассматривать только те функции, которые имеют конечное множество особых точек. При определении интеграла по промежутку, на котором функция имеет особые точки, будем считать, что свойство аддитивности сохраняется. Кроме того, пусть $\int_a^{\omega} f(t)dt = -\int_{\omega}^{a} f(t)dt$, где ω — одна из особых точек. По этим причинам достаточно дать определение для случая $(a+)$ особой точки функции и $+\infty$ особой точки. Остальные случаи определяются по аналогии (смотри замечания ниже).

Определение 2. Пусть у функции $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ есть единственная особая точка $(a+)$. Обозначим $F(c) = \int_c^b f(t)dt$, где $a < c < b$. Если существует

$$\lim_{c \to a+} F(c) = I,$$

то будем говорить, что несобственный интеграл от функции f *сходится* в $(a+)$ особой точке, и писать $I=\int_a^b f(t)dt$. Когда предел $\lim\limits_{c\to a+} F(c)$ не существует, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(t)dt$ *расходится*. Число I называется *значением* данного несобственного интеграла.

Замечание 2. В случае $(b-)$ особой точки полагаем $F(c)=\int_a^c f(t)dt$, $a<c<b$, и получаем аналогичное определение несобственного интеграла, который сходится в особой точке $(b-)$, если существует $\lim\limits_{c\to b-} F(c)$ и расходится в противном случае.

Определение 3. Рассмотрим функцию $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Пусть $F(c)=\int_a^c f(t)dt$, где $c>a$. Если существует

$$\lim_{c\to+\infty} F(c)=I,$$

то будем говорить, что несобственный интеграл от функции f *сходится в* $+\infty$, и писать $I=\int_a^{+\infty} f(t)dt$. В противном случае, говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *расходится*. Число I называется *значением* данного несобственного интеграла.

Замечание 3. В случае функции $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ (особая точка $-\infty$) интеграл $I=\int_{-\infty}^b f(t)dt$ сходится, когда существует предел $\lim\limits_{c\to-\infty} F(c)$, где $F(c)=\int_c^b f(t)dt$.

Определение 4. Пусть P промежуток и функция $f:P\to\mathbb{R}$ имеет на этом промежутке конечное множество особых точек. Если интеграл от функции f сходится (с учетом аддитивности) в <u>каждой</u> особой точке, то будем говорить, что интеграл $\int_P f(t)dt$ *сходится*. В противном случае говорят, что интеграл $\int_P f(t)dt$ *расходится* (это означает, что он расходится хотя бы в <u>**одной**</u> особой точке). Все такие интегралы называются *несобственными интегралами*.

Замечание 4. В большинстве учебников интегралы с одной бесконечно удаленной точкой $\left(\int_a^{+\infty} f(t)dt, \int_{-\infty}^b f(t)dt\right)$ называют *несобственными интегралами первого рода*, а интегралы с одной конечной особой точкой называют *несобственными интегралами второго рода*. Отметим, что интеграл Римана (теперь такие интегралы можно называть *собственными*) сходится в смысле определения 2.

Важные примеры (советуем ЗАПОМНИТЬ).

Пример 1. Особая точка $+\infty$. Интеграл

$$I_\gamma = \int_1^{+\infty} x^\gamma dx$$

сходится при $\gamma < -1$ и расходится при $\gamma \geq -1$, так как

$$F(c) = \int_1^c x^\gamma dx = \begin{cases} \dfrac{c^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \dfrac{1}{\gamma+1}, & \gamma \neq -1, \\ \ln c, & \gamma = -1. \end{cases}$$

Поэтому предел $\lim\limits_{c\to+\infty} F(c)$ существует только при $\gamma < -1$.

Пример 2. Особые точки $(b-)$ и $(a+)$. Интегралы

$$\int_a^b (b-x)^\gamma dx\,;\ \int_a^b (x-a)^\gamma dx$$

сходятся при $\gamma > -1$ и расходятся при $\gamma \leq -1$.

◄ Для первого интеграла

$$F(c) = \int_a^c (b-x)^\gamma dx = \begin{cases} \dfrac{(b-c)^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \dfrac{(b-a)^{\gamma+1}}{\gamma+1}, & \gamma \neq -1, \\ \ln(b-a) - \ln(b-c), & \gamma = -1, \end{cases}$$

и предел $\lim\limits_{c\to b-} F(c)$ существует только при $\gamma > -1$. Для второго интеграла все аналогично. ►

Пример 3. Интеграл

$$I_\gamma = \int_0^{+\infty} x^\gamma dx$$

расходится при любых γ. Здесь две особые точки $(0+)$ и $+\infty$, а один из интегралов в сумме

$$\int_0^{+\infty} x^\gamma dx = \int_0^1 x^\gamma dx + \int_1^{+\infty} x^\gamma dx$$

обязательно расходится (пример 1 или 2).

Замечание 5. Если нам встретится интеграл с особыми точками, то важно выяснить: сходится или расходится данный интеграл. Ниже мы рассмотрим разные признаки сходимости. Чтобы не изучать отдельно конечные и бесконечные особые точки, далее рассматривается интеграл $\int_a^\omega f(t)dt$ с одной особой точкой ω. Здесь под ω подразумевается одна из особых точек: $+\infty$ или $(-b)$.

Как видно из определений 2 и 3, сходимость интеграла $\int_a^{\omega} f(t)dt$ равносильна существованию предела $\lim\limits_{c\to\omega} F(c)$, где $F(c)=\int_a^c f(t)dt, a<c<\omega$. Освежим в памяти результаты лекции 8. Из критерия Коши (свойство 7, лекция 8) следует утверждение.

Теорема 1. Интеграл $\int_a^{\omega} f(t)dt$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon\ \exists c_\varepsilon > a\ \forall c', c'' \in (c_\varepsilon, \omega)\left(\left|\int_{c'}^{c''} f(t)dt\right| < \varepsilon\right).$$

◄ Надо применить критерий Коши к функции $F(c)$ и заметить, что $F(c'')-F(c')=\int_{c'}^{c''} f(t)dt$. ►

Следствие 1. Пусть $a<c<\omega$, тогда интегралы $\int_a^{\omega} f(t)dt$ и $\int_c^{\omega} f(t)dt$ сходятся или расходятся одновременно. То есть на сходимость интеграла влияет только достаточно малая окрестность особой точки.

Сформулируем три свойства несобственных интегралов, которые получаются предельным переходом из соответствующих свойств собственных интегралов.

Свойство 1 (*линейность*). Пусть α, β — некоторые числа и интегралы $\int_a^{\omega} f(t)dt$, $\int_a^{\omega} g(t)dt$ сходятся. Тогда сходится интеграл $\int_a^{\omega} (\alpha f(t)+\beta g(t))dt$ и справедливо равенство

$$\int_a^{\omega} (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^{\omega} f(t)dt+\beta\int_a^{\omega} g(t)dt.$$

◄ Несобственный интеграл является пределом собственных интегралов, а для собственных интегралов свойство линейности справедливо.►

Свойство 2 (*интегрирование по частям*). Пусть выполняются условия:

1) функции $u(t), v(t)$ непрерывно дифференцируемы на интервале (a,ω);

2) интеграл $\int_a^{\omega} u(t)v'(t)dt$ сходится;

3) существует $\lim\limits_{t\to\omega} u(t)v(t)$.

Тогда справедлива формула

$$\int_a^{\omega} u(t)v'(t)dt = u(t)v(t)\Big|_a^{\omega} - \int_a^{\omega} u'(t)v(t)dt.$$

◄ Отметим, что по определению

$$u(t)v(t)\Big|_a^{\omega} = -u(a)v(a)+\lim_{t\to\omega}\big(u(t)v(t)\big).$$

Осталось вспомнить формулу интегрирования по частям в собственном интеграле $\int_a^c u(t)v'(t)dt, a < c < \omega$ (лекция 28) и перейти в формуле к пределу при $c \to \omega$.►

Свойство 3 (*замена переменных*). Пусть выполнены условия:
1) функция f непрерывна на промежутке $[a, \omega)$;
2) интеграл $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится;
3) функция $\varphi : [\alpha, \tilde{\omega}) \to [a, \omega)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha, \tilde{\omega})$;
4) $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \tilde{\omega}} \varphi(t) = \omega$.

Тогда справедлива формула

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_\alpha^{\tilde{\omega}} f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt.$$

◄ Как и в предыдущем свойстве, надо использовать формулу замены переменной для интеграла $\int_a^c f(t)dt, a < c < \omega$ (лекция 28) и перейти к пределу при $c \to \omega$.►

***Задачи*:** 2335, 2336, 2346, 2348.

ЧАВО

1. *Какие особые точки имеет функция $y = \ln|x|$ на действительной оси?*

У функции $y = \ln|x|$ четыре особых точки: $-\infty, \left(0-\right), \left(0+\right), +\infty$.

2. *Когда несобственный интеграл расходится?*

Если интеграл расходится хотя бы в одной особой точке, то он уже не будет сходящимся.

3. *Как вычислять несобственные интегралы?*

Главный вопрос, который надо решить для каждого несобственного интеграла, это выяснить его сходимость. Если интеграл расходится, то и вычислять его не надо. Кстати, вычислять несобственные интегралы можно с помощью методов, которые изложены в данной лекции. Другие методы будут рассмотрены во втором семестре и комплексном анализе.

4. *Можно ли рассматривать интегралы с бесконечным множеством особых точек?*

Для интегралов с конечным множеством особых точек на отрезке $\left[a, b\right]$ можно дать равносильное определение: «функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, если существует единственная непрерывная на этом отрезке функция F, которая удовлетворяет равенству

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Здесь $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ — любой отрезок, где функция f непрерывна». В этой равносильности легко убедиться. Теперь можно ответить на заданный вопрос. Указанное здесь определение годится, например, для случая счетного множества особых точек.

ЛЕКЦИЯ 34

Признаки сходимости несобственных интегралов

В этой лекции (как и в предыдущей) под ω подразумевается единственная особая точка. Напомним, что под особой точкой мы понимаем либо точки, в которых функция неограниченна хотя бы с одной стороны, либо $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 1. Пусть интеграл $\int_a^\omega |f(t)|\,dt$ сходится. Тогда интеграл $\int_a^\omega f(t)dt$ называют *абсолютно сходящимся*.

Определение 2. Если интеграл $\int_a^\omega f(t)dt$ сходится, а интеграл $\int_a^\omega |f(t)|\,dt$ расходится, то интеграл $\int_a^\omega f(t)dt$ называют *условно сходящимся*.

Лемма 1. Если справедливо неравенство $|f|\le g$, то из сходимости интеграла $\int_a^\omega g(t)dt$ вытекает абсолютная сходимость интеграла $\int_a^\omega f(t)dt$. При этом из абсолютной сходимости следует сходимость в смысле определения 2 или 3 лекции 33.

◄ Надо воспользоваться критерием Коши (лекция 33) для интеграла от функции f. Запишем цепочку неравенств

$$\left|\int_{c'}^{c''} f(t)dt\right|\le\int_{c'}^{c''}|f(t)|\,dt\le\int_{c'}^{c''} g(t)dt<\varepsilon.$$

Откуда и следует требуемое утверждение. ►

Следствие 1 (*признак сравнения*). Если $0\le f(t)\le g(t)$, то из сходимости интеграла $\int_a^\omega g(t)dt$ следует сходимость интеграла $\int_a^\omega f(t)dt$. Кроме того, если интеграл $\int_a^\omega f(t)dt$ расходится, то интеграл $\int_a^\omega g(t)dt$ также расходится.

Следствие 2 (*признак сравнения в предельной форме*). Пусть $f(t)\ge 0$, $g(t)>0$. Если

$$\lim_{t\to\omega}\frac{f(t)}{g(t)}=\lambda>0, \qquad (*)$$

тогда интегралы $\int_a^\omega f(t)dt$, $\int_a^\omega g(t)dt$ сходятся или расходятся одновременно.

◄ Заметим, что интегралы от функций $f(t)$ и $\alpha f(t), \alpha>0$, сходятся или расходятся одновременно. Из определения предела (∗) следует неравенство

$$0<\frac{\lambda}{2}<\frac{f(t)}{g(t)}<2\lambda$$

для $t\in(c,\omega)$ и некоторого $c>a$. Тогда по следствию 1 интегралы $\int_c^\omega f(t)dt$ и $\int_c^\omega g(t)dt$ сходятся или расходятся одновременно. Учитывая следствие 1 лекции 33, получаем требуемое. ►

Пример 1. Интеграл

$$\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^6+x+4}\,dx$$

сходится, ибо

$$\frac{x^3+1}{x^6+x+4}\sim\frac{1}{x^3},\ x\to\infty.$$

Надо еще вспомнить пример 1 из лекции 33.

Признаки условной сходимости несобственных интегралов. Главное значение интеграла

Если подынтегральная функция меняет знак на промежутке интегрирования, то признаки из предыдущего раздела могут и не дать ответа. В этом случае часто удается представить подынтегральную функцию в виде произведения двух множителей, так что можно применить следующую теорему:

Теорема 1 (*признак Дирихле*). Пусть выполняются условия:

1) первообразная функции $f(t)$ ограничена $\left(\left|\int_a^x f(t)dt\right|<M\right)$ на промежутке $[a,\omega)$;

2) функция $g(t)$ неотрицательна на промежутке $[a,\omega)$;

3) функция $g(t)$ невозрастающая и стремится к нулю $\left(\lim\limits_{t\to\omega} g(t)=0\right)$.

Тогда сходится интеграл

$$\int_a^{\omega} f(t)g(t)dt. \qquad (**)$$

◄ Применим критерий Коши (теорема 1 из лекции 33) к интегралу (**). Из условий, которые накладываются на функцию $g(t)$, следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon\in(a,\omega)\ \forall t>c_\varepsilon\left(0\le g(t)<\varepsilon\right)$. Пусть $c',c''>c_\varepsilon$. В силу второй теоремы о среднем (лекция 27)

$$\left|\int_{c'}^{c''} f(t)g(t)dt\right|=\left|g(c')\int_{c'}^{c} f(t)dt\right|<\varepsilon\left|\int_{c'}^{c} f(t)dt\right|\le 2M\varepsilon.$$

Итак, интеграл (**) сходится (по критерию Коши). ►

Замечание 1. Часто путают условие 1) из теоремы 1 с условием ограниченности функции $\left(|f(t)|<M\right)$. ЗАПОМНИТЕ — не функция f, а ее ПЕРВООБРАЗНАЯ должна быть ограничена.

Пример 2. Интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$$

сходится, так как первообразная $F(x)=\sin x$ функции $f(x)=\cos x$ ограничена, а функция $g(x)=1/x$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Кстати, этот интеграл сходится условно, ибо

$$\left|\frac{\cos x}{x}\right|\ge\frac{(\cos x)^2}{x}=\frac{1}{2x}+\frac{\cos 2x}{2x}.$$

Но интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ расходится (лекция 33), а интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ сходится по признаку Дирихле. Значит, по следствию 1 интеграл

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|dx$$

расходится. Полезно изобразить графики подынтегральных функций.

Определение 3. Рассмотрим интеграл от функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с двумя бесконечными особыми точками $\pm\infty$. Если существует предел

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx=I,$$

то его называют *главным значением* интеграла. Используется, например, обозначение:

$$I =: v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Определение 4. Пусть $c \in (a,b)$ и функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ имеет в области определения две особые точки $(c+),(c-)$. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) = I_c,$$

то его называют *главным значением* интеграла в точке c. Обозначение:

$$I_c =: v.p.\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 3. Хотя интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ расходится, но существует главное значение этого интеграла

$$v.p.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) = 0.$$

***Задачи*:** 2361, 2362, 2365, 2368, 2371, 2378, 2384, 2394.

ЧАВО

1. *Что это такое — «бутылка» Торричелли?*

Торричелли «вращал» график функции $y=\frac{1}{x},\ x\in[1,+\infty)$. Получился бесконечный «сосуд» с конечным объемом. Кстати, продольная площадь сечения этого сосуда неограниченна.

2. *Какая разница между сходимостью несобственных интегралов и главным значением?*

Различия между этими понятиями можно увидеть на следующем примере. Если существует двойной предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{\varepsilon_2}^{1} f(x)dx\right),$$

то мы имеем обычную сходимость несобственного интеграла $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ в двух особых точках $(0-),(0+)$. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx\right),$$

то интеграл $v.p.\int_{-1}^{1} f(x)dx$ сходится в смысле главного значения. Кстати, отсюда видно, что главное значение всегда существует, если интеграл сходится. При этом $\int_{-1}^{1} f(x)dx = v.p.\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Смотрите еще пример 1.

Отдохнем ☺

Урок математики. Преподаватель пишет на доске уравнение: $\sin x = 1$.

— Ну, кто может найти *x*?

Выбегает один из студентов к доске и радостно тычет пальцем в уравнение:

— Вот, вот *x*!

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архипов, Г. И.* Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. М., 1999.
2. *Берс, Л.* Математический анализ: в 2 т. / Л. Берс. М., 1975.
3. *Даан-Дальмедико, А.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер. М., 1986.
4. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. М., 1995.
5. *Зорич, В. А.* Математический анализ: в 2 т. / В. А. Зорич. М., 1981.
6. Математический энциклопедический словарь. М., 1988.
7. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа: в 2 т. / С. М. Никольский. М., 1990.
8. *Олвер, Ф.* Введение в асимптотические методы / Ф. Олвер. М., 1978.
9. *Рудин, У.* Основы математического анализа / У. Рудин. М., 1966.
10. *Стройк, Д. Я.* Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. М., 1978.
11. *Уваров, В. Б.* Математический анализ / В. Б. Уваров. М., 1984.
12. *Успенский, В. А.* Что такое нестандартный анализ? / В. А. Успенский. М., 1987.
13. *Фейнман, Р.* Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. М., 1976. Т. 1.
14. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. М., 1970.
15. *Хинчин, А. Я.* Восемь лекций по математическому анализу / А. Я. Хинчин. М., 1977.
16. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. М., 1977.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Кашевский Витольд Васильевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Курс лекций

В авторской редакции

Технический редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *Л. Н. Масловская*

Ответственный за выпуск *Т. М. Турчиняк*

Подписано в печать 29.12.2006. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,84. Уч.-изд. л. 7,87.
Тираж 100 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
Лицензия на осуществление издательской деятельности
№ 02330/0056804 от 02.03.2004.
220030, Минск, проспект Независимости, 4.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности
№ 02330/0056850 от 30.04.2004.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0;\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ D=b^2-4ac;$$
$$x_1+x_2=-b/a,\quad x_1x_2=c/a$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta},\quad \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta},\quad \mathrm{tg}^2\,\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta),\quad (\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$$
$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta),\quad 2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

$$\sin x=a\Rightarrow x=(-1)^m\arcsin a+\pi m, m\in\mathbb{Z};$$
$$\cos x=a\Rightarrow x=\pm\arccos a+2\pi k, k\in\mathbb{Z};$$
$$\mathrm{tg}\,x=a\Rightarrow x=\mathrm{arctg}\,a+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);\quad \arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}, \mathrm{arcctg}\,\alpha+\mathrm{arctg}\,\alpha=\frac{\pi}{2}$$

$$\sin 0=0; \sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{1}}{2}; \sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c,\quad \log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c,\ \log_a b^r=r\log_a b;$$
$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\quad \log_{a^r} b=\frac{1}{r}\log_a b,\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$