БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.9

РУСЕЦКИЙ
Артём Юрьевич

РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ И ОБОБЩЕННЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2018

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научные руководители: **Лазакович Николай Викторович,**
доктор физико-математических наук, профессор;

Антоневич Анатолий Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры функционального
анализа и аналитической экономики
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Леваков Анатолий Афанасьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики
Белорусского государственного университета;

Каримова Татьяна Ивановна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
УО "Брестский государственный технический
университет".

Оппонирующая организация — **УО "Гродненский государственный университет имени Янки Купалы".**

Защита состоится 27 апреля 2018 г. в 12:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, тел. ученого секретаря (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан "   " марта 2018 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физико-математических наук
доцент   Е.М. Радыно

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена задаче Коши для стохастической дифференциальной системы уравнений с обобщенными коэффициентами.

Данная задача является некорректной в рамках классической теории дифференциальных уравнений, поскольку в уравнениях могут присутствовать произведения обобщённых функций.

Проблема произведения обобщенных функции исследовалась многими авторами в рамках теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для трактовки уравнений с обобщенными коэффициентами был предложен ряд подходов, однако различные трактовки одних и тех же уравнений могли приводить к различным решениям этих уравнений. Одним из основных подходов к определению решений диффренциальных уравнений с обобщенными коэффициентами является формализация такого типа задач в рамках теории обобщенных функций. В данном направлении работали П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский, Я. Лигеза и др. Кроме того, этот подход развивался в работах С.Т. Завалищина, А.Н. Сесекина[1] и др. Также использовался подход, заключающийся в формальном переходе к соответствующему интегральному уравнению, где интеграл понимается в определенном смысле, например, как интеграл Лебега-Стилтьеса и т.д. В рамках этого подхода работали П.С. Дас, Р.Р. Шарма[2], С.Ж. Пандит и др. Основы третьего, аппроксимационного подхода к трактовке дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами были заложены в работе Я. Курцвейля[3]. В качестве решения некорректного уравнения понимается слабый предел последовательности решений систем дифференциальных уравнений, коэффициентами в которых являются обычные функций, аппроксимирующие в смысле теории распределений обобщенные функции, входящие в дифференциальные уравнения.

В работе используется подход предложенный Н.В. Лазаковичем, основанный на построении вспомогательного семейства конечно-разностных уравнений, зависящих от малых параметров, аппроксимирующих исходное формально записанное уравнение. Решением при данном подходе называется ассоциированное решение — предел решений аппроксимирующих уравнений. В рамках данного подхода задачи Коши для различных классов уравнений с обобщенными или случайными коэффициентами были исследованы в работах

[1] Завалищин, С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин. — М.: Наука, 1991. — 256 с.

[2] Das, P.S. Existence and stability of measure differential equations / P.S. Das, R.R. Sharma // Czech. Math. J. — 1972. — Vol. 22, №1. — P. 145–158.

[3] Kurzweil, J. Generalized ordinary differential equation / J. Kurzweil // Czech. Math. J. — 1958. — Vol. 8, №1. — P. 360–388.

Т.С. Автушко, Н.В. Бедюк, В.В. Грушевского, А.И. Жук, А.Н. Ковальчука, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонского и др.

В данном подходе находит отражение тот факт, отмеченый в работе В.С. Владимирова[4], что реально нельзя измерить физическую величину в точке, а можно измерять лишь средние значения в достаточно малых ее окрестностях и объявить предел последовательности этих средних, значением рассматриваемой физической величины в данной точке.

Для разных классов уравнений возникают тонкости при использовании данного подхода. В работе впервые рассмотрены дифференциальные системы в которых, наряду с обобщенными коэффициентами, присутствуют случайные компоненты. Присутствие в уравнении одновременно двух видов сингулярностей приводит к существенному усложнению анализа предельного поведения решений аппроксимирующих уравнений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Исследования проводились в рамках научной темы «Алгебро-аналитические методы функционального анализа и стохастических дифференциальных уравнений и их приложение в задачах экологии, нанотехнологий и предсказаний эволюции сложных систем», входящей в государственную программу «Конвергенция», 2012–2017.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является описание ассоциированных решений задачи Коши для стохастической дифференциальной системы уравнений с обобщенными коэффициентами и исследование их свойств. Цель обусловила постановку следующих задач:

1. Построить системы стохастических интегральных уравнений, ассоциированные с заданным способом аппроксимации и способом стремления малых параметров к 0, доказать существование и единственность решений этих уравнений.

2. Доказать сходимость решений аппроксимирующих систем уравнений к решениям ассоциированных стохастических интегральных.

[4]Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике. / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

3. Конкретизировать результаты для случая линейных уравнений и получить выражение ассоциированных решений линейных уравнений через ассоциированные фундаментальные матрицы.

Объектом исследования является задача Коши для стохастической дифференциальной системы уравнений с обобщенными коэффициентами.

Предметом исследований являются аппроксимирующее семейство, ассоциированные системы интегральных уравнений и ассоциированные решения дифференциальных систем со случайными и обобщенными компонентами.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем.

1. Получено полное описание случаев существования ассоциированных решений задачи Коши для дифференциальной системы уравнений с обобщенными коэффициентами и случайными компонентами в зависимости от взаимосвязи параметров аппроксимаций.

2. Для анализа предельного поведения ассоциированных решений построена вспомогательная система стохастических нагруженных интегральных уравнений и доказана ее разрешимость.

3. Доказано, что решение, ассоциированное с заданным способом аппроксимации, удовлетворяет соответствующей вспомогательной системе стохастических нагруженных интегральных уравнений.

4. Доказана формула представления ассоциированных решений задачи Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения с обобщенными коэффициентами высшего порядка через ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Положения выносимые на защиту

1. Описание всех случаев существования ассоциированных решений задачи Коши для дифференциальной системы уравнений с обобщенными коэффициентами и случайными компонентами в зависимости от взаимосвязи параметров аппроксимаций.

2. Построение по заданному способу аппроксимации вспомогательной системы стохастических нагруженных интегральных уравнений и доказательство ее разрешимости.

3. Доказательство того, что ассоциированное решение удовлетворяет построенной вспомогательной системе стохастических нагруженных интегральных уравнений.

4. Представление ассоциированных решений задачи Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения с обобщенными коэффициентами высшего порядка через ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Роль научного руководителя Н.В. Лазаковича состояла в постановке задач и анализе полученных результатов. Результаты, опубликованные в соавторстве с Т.С. Автушко и Н.В. Лазаковичем, принадлежат авторам на паритетных началах, они являются частным случаем более общих утверждений, полученных в диссертации и демонстрируют возможность более детального анализа в конкретном случае. Сооавторы Ю.В. Гриднев и С.А. Рак по работе [6] дали описание физического процесса, а А.Ю. Русецким была построена математическая модель соответствующего процесса в виде дифференциального уравнения.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертационной работы докладывались на научных конференциях:

— Международная научная конференция "XI Белорусская математическая конференция"(Минск, 2012 г.);

— XV Международная математическая конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения - 2013"(Гродно, 2013 г.);

— XVI Международная математическая конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения - 2014"(Новополоцк, 2014 г.);

— Международная математическая конференция "Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям"(Минск, 2015 г.);

— Международная научная конференция "XII Белорусская математическая конференция"(Минск, 2016 г.).

Результаты, включенные в диссертацию, отмечены дипломом 1 степени Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2013 г.), третьей премией Специального фонда

Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов (2014 г.).

Результаты работы неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры функционального анализа Белорусского государственного университета (Минск, 2011-2017 гг.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 научных работах, в том числе 4 статьях в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 2.9 авторских листа), 2 статьях в других научных изданиях, 5 тезисах докладов на международных математических конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка. Первая глава содержит обзор литературы и основных методов исследования по теме диссертации. Основные результаты диссертации приводятся во второй и третьей главах. Полный объём диссертации — 98 страниц. Библиографический список содержит 88 наименований, включая собственные публикации соискателя ученой степени.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В **первой главе** приводятся необходимые определения и обозначения, а также сведения, которые будут использованы в работе в дальнейшем, указывается основная литература. В частности в данной главе вводятся понятия стохастического интеграла от неслучайных функций и неклассического интеграла Римана-Стилтьеса, а также определяется пространство случайных процессов, непрерывных справа имеющих предел слева.

Во **второй главе** работы рассматривается задача Коши для стохастической дифференциальной системы нелинейных уравнений с обобщенными коэффициентами. Данная задача исследуется впервые. Глава состоит из трех разделов.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. $W_j(t,\omega), j = \overline{1,q}$ — независимые винеровские процессы определенные на этом пространстве.

Рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами и случайными компонентами

$$\begin{cases} X'(t,\omega) = L'(t)F(t, X(t,\omega)) + G(t)W'(t,\omega), \\ X(0,\omega) = X_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in \boldsymbol{T} = [0,b], \omega \in \Omega$,

$$X(t,\omega) = (X_i(t,\omega))^T, X_0 = ((X_0^i)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$F(x,y) = (F_j(x,y))^T, G(t) = (G_{ij}(t))^T,$$
$$L'(t) = (L'_{ij}(t)), W'(t) = (W'_j(t)),$$

где F_j, $j = \overline{1,q}$ — липшицевы функции, удовлетворяющие условиям линейного роста по второй переменной, $L_{ij} : \boldsymbol{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации. $G_{ij}(t) \in L_2(\boldsymbol{T})$, $i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}$. Производные функций понимаются в обобщенном смысле.

Стохастические дифференциальные уравнения вида (1) могут быть использованы в качестве моделей в различных областях физики и техники. Например, уравнение такого вида описывает движения маятника под действием силы тяжести и силы молекулярного воздействия окружающего его газа[5]. В статье [6] показано, что уравнения такого вида возникают при описании пространственного движения реактивного летательного аппарата с учетом управляющего и возмущающего воздействий.

В работе некорректная система уравнений (1) трактуется, в соответствии с подходом, предложенным Н.В. Лазаковичем[6], как семейство конечно-разностных систем уравнений с осреднением, зависящее от малых параметров. Это семейство строится следующим образом. Пусть

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \rho \geq 0, supp(\rho) \subseteq [0,1], \int\limits_0^1 \rho(s)ds = 1,$$

[5]Арато, М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход / М. Арато. — М.: Наука, 1989. — 304 с.

[6]Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады НАН Беларуси. – 1994. — Т.38, №5. — С. 23–27.

а функции

$$L_n^{ij}(t) = (L_{ij} * \rho_n^{ij})(t), \rho_n^{ij}(t) = \gamma_{ij}(n)\rho(\gamma_{ij}(n)t), G_n^{ij}(t) = (G_{ij} * \rho_n)(t),$$

$$W_n^j(t,\omega) = (W_j * \rho_n)(t,\omega), F_n^j(t) = (F_j * \rho_n)(t), \rho_n(t) = n\rho(nt),$$

где $\gamma_{ij}(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $i, j = \overline{1,n}$, являются аппрокимациями исходных обобщенных функций. Тогда искомое семейство уравнений имеет следующий вид

$$\begin{cases} X_n(t+h_n,\omega) - X_n(t,\omega) = [L_n(t+h_n) - L_n(t)]F_n(t, X_n(t,\omega)) + \\ \qquad\qquad + G_n(t)[W_n(t+h_n,\omega) - W_n(t,\omega)], \\ X_n(t,\omega)|_{[0,h_n)} = X_n^0(t,\omega), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$X_n(t,\omega) = (X_n^i(t,\omega))^T, X_n^0(t,\omega) = (X_{n0}^i(t,\omega))^T,$$
$$F(x,y) = (F_n^i(x,y))^T, G_n(t) = (G_n^{ij}(t)),$$
$$L_n(t) = (L_n^{ij}(t)), W_n(t,\omega) = (W_n^j(t,\omega))^T.$$

Обозначим пространство непрерывных справа имеющих предел слева случайных процессов как $\mathbb{X}_1$. На введенном пространстве зададим норму $\|X(t,\omega)\|_{\mathbb{X}_1} = \int\limits_{\boldsymbol{T}} \left(E|X(t,\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$, где $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^p$, E — математическое ожидание.

Определение 2.1.1. *Случайный процесс $X(t,\omega)$ называется решением задачи Коши (1), ассоциированным с аппрокимирующим семейством, если решения $X_n(t,\omega)$ задач (2) сходятся к $X(t,\omega)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbb{X}_1}$.*

В работе[7] рассматривается скалярный случай дифференциального уравнения с обобщенными коэффициентами. Для данного случая показано, что решение задачи Коши (2) при $n \to \infty, h_n \to 0$, сходится покоординатно в $L_1(\boldsymbol{T})$, тогда и только тогда, когда $h_n = \circ(\frac{1}{\gamma_i(n)})$ или $\frac{1}{\gamma_{ij}(n)} = \circ(h_n)$, $\forall i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}$. В настоящей работе предполагаются выполненными данные соотношения связи малых параметров для введенных семейств конечно-разностных уравнений.

Во втором разделе третьей главы исследуется следующая нагруженная

[7]Bedziuk, N.V. Solutions of nonlinear differential equations / N.V. Bedziuk, A.L. Yablonski // Nonlinear differential equations a. Applications. — 2010. — Vol. 17, №2. — P. 249–270.

система стохастических интегральных уравнений

$$X(t,\omega) = X_0 + \int\limits_0^t dL^c(s)F(s,X(s,\omega)) + \sum_{\mu_l \le t} \Psi(\mu_l, X(\mu_l-,\omega), \Delta L(\mu_l)) + \\ + \int\limits_0^t G(s)dW(s,\omega), \tag{3}$$

где $t \in \boldsymbol{T} = [0,b], \omega \in \Omega$, $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p\times q} \to \mathbb{R}^q$ — вектор-функция трех аргументов.

Для системы уравнений (3) доказывается теорема о существовании и единственности решений.

Теорема 2.2.1.[4,11] *Пусть функции $F(t,x)$ и $\Psi(t,x,u)$ — борелевские функции по (t,x) и для любых $x, y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $t \in \boldsymbol{T}$ эти функции удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста*

$$|F(t,x) - F(t,y)| \le h_1(t)|x-y|,$$

$$|F(t,x)| \le h_2(t)(1+|x|),$$

$$\sup_{\boldsymbol{T}} |F(t,0)| < \infty,$$

$$|\Psi(t,x,u) - \Psi(t,y,u)| \le h_3(t)|u||x-y|,$$

$$|\Psi(t,x,u)| \le h_4(t)|u|(1+|x|),$$

где для $i = \overline{1,4}$

$$\int\limits_0^b h_i^2(s)dVarL(s) < \infty.$$

Тогда $\forall$ начального условия $X(t_0-,\omega) = X_0$ для почти всех $\omega \in \Omega$ решение уравнения (3) существует и единственно в пространстве случайных процессов, непрерывных справа и имеющих предел слева, с нормой

$$\|X(t,\omega)\|_{\mathbb{X}_\infty} = \sup_{\boldsymbol{T}} \left(E|X(t,\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

.

Следствие 2.2.1.[4,11] *При выполнении условий из* **теоремы 2.2.1** *решение уравнения (3) существует и единственно в пространстве непрерыв-*

ных справа и имеющих предел слева случайных процессов с нормой

$$\|X(t,\omega)\|_{\mathbb{X}_1} = \int\limits_{\boldsymbol{T}} \left(E|X(t,\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

В третьем разделе второй главы описываются пределы решений задач (2) — ассоциированные решения задачи (1).

Пусть $\Psi(\mu,x,u) = \phi(1,\mu,x,u) - \phi(0,\mu,x,u), \mu \in \boldsymbol{T}, x \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^{p\times q}$, где $\phi(t,\mu,x,u)$ решение следующей системы интегральных уравнений:

$$\phi(t,\mu,x,u) = X_0 + u\int\limits_0^t d\eta(s)F(\mu,\phi(s,\mu,x,u)), \tag{4}$$

в котором

$$\eta(s) = (\eta_{ij}(s)),$$

где $\eta_{ij} : D = [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная справа функция ограниченной вариации.

Следующая теорема описывает ассоциированные решения задачи Коши исходной системы дифференциальных уравнений (1).

Теорема 2.3.1.[4,10] *Пусть $F(t,x)$ — борелевская функция по (t,x) и для любых $x,y \in \mathbb{R}^p, t \in \boldsymbol{T}$ функция удовлетворяет условиям Липшица и линейного роста.*

$X_n(t,\omega)$ — решения конечно-разностных с осреднением задач Коши (2), начальные условия которых удовлетворяют соотношению для почти всех $\omega \in \Omega$

$$\sup_{t\in[0,h_n)} |X_n^0(t,\omega) - X_0| \xrightarrow{n\to\infty, h_n\to 0} 0. \tag{5}$$

Тогда $X(t,\omega)$ — решение системы интегральных уравнений (3), в которой функция Ψ определяется с помощью вспомогательного уравнения (4), где $\eta_{ij}(s) = s$, если $h_n = \circ(\frac{1}{\gamma_{ij}(n)})$ и $\eta_{ij}(s) = H(s-1)$, если $\frac{1}{\gamma_{ij}(n)} = \circ(h_n)$, где $H(s)$ — функция Хевисайда, является ассоциированным решением задачи Коши (1).

Таким образом для каждого допустимого способа связи малых параметров получается свое ассоциированное решение.

В **третьей главе** работы рассматриваются задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с обобщенными коэффициентами второго порядка и линейного стохастического дифференциального уравнения высшего порядка. Глава состоит из 3 разделов.

Данные задачи являются частным случаем системы, рассмотренной во второй главе, но линейность рассматриваемых уравнений позволяет конкретизировать полученные результаты.

Первый раздел содержит постановку задачи, а также определение и описание ассоциированных решений задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами. Кроме того в данном разделе приведены некоторые свойства ассоциированных решений данной задачи.

$$\begin{cases} y''(t) + a_2'(t)y'(t) + a_1'(t)y(t) + f'(t) = 0, \\ y(0) = c_1, \\ y'(0) = c_2, \end{cases} \tag{6}$$

где $t \in \boldsymbol{T} = [0, b], c_i, b \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2,\ a_i, f : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}, \forall i = 1, 2$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации.

Задачами Коши для дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в одномерном случае занимались А.Н. Ковальчук, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский и др.; в двумерном диагональном случае — Е.В. Шлыков; в двумерном — Т.С. Автушко; в многомерном — А.И. Жук.

Используя замену $X_i(t) = y^{(i-1)}(t), i = 1, 2$ в уравнении (6), получим следующую систему

$$\begin{cases} X'(t) = L'(t)X(t) + F'(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$X(t) = (X_i(t))^T, X_0 = (c_i)^T \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2,$$
$$F'(t) = (F_i'(t))^T,$$

$F_1'(t) \equiv 0$, а $F_2'(t) = -f'(t)$,

$$L'(t) = (L_{ij}'(t)),$$

здесь $L_{11}'(t) = 0$, $L_{12}'(t) = 1$ и $L_{2j}'(t) = -a_j'(t)$.

Построим вспомогательное семейство конечно-разностных уравнений, зависящих от малых параметров, соответствующее исходной задаче Коши.

$$\begin{cases} X_n(t + h_n) - X_n(t) = [L_n(t + h_n) - L_n(t)]X_n(t) + \\ \qquad\qquad + [F_n(t + h_n) - F_n(t)], \\ X_n(t)|_{[0,h_n)} = X_n^0(t), \end{cases} \tag{8}$$

где

$$X_n(t) = (X_n^i(t))^T, X_n^0(t) = (c_i)^T, i = 1, 2,$$

$$F_n(t) = (F_n^i(t))^T,$$

$F_n^1(t) \equiv 0$ и $F_n^2(t) = -f_n(t)$.

$$L_n(t) = (L_n^{ij}(t)),$$

здесь $L_n^{11}(t) = 0$, $L_n^{12}(t) = t$ и $L_n^{2j}(t) = -a_n^j(t)$, $j = 1, 2$.

$$a_n^i(t) = (a_i * \rho_n^i)(t), \rho_n^i(t) = \gamma_i(n)\rho(\gamma_i(n)t),$$

$$f_n(t) = (f * \rho_n)(t), \rho_n(t) = n\rho(nt)$$

а $\gamma_i(n) \to \infty$ при $n \to \infty, i = 1, 2,$

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \rho \geq 0, supp(\rho) \subseteq [0, 1], \int\limits_0^1 \rho(s)ds = 1.$$

Определение 3.1.1. $X(t)$ *называется решением задачи Коши (7), ассоциированным с аппроксимирующим семейством, если решения* $X_n(t)$ *задач (8) сходятся к* $X(t)$ *по норме в* $L_1(\boldsymbol{T})$.

Данное определение вытекает из более общего **определения 2.1.1** в случае, когда множество Ω состоит из одной точки.

Далее рассматриваются 4 случая существования ассоциированных решений, которые получаются при различных связях малых параметров.

Теорема 3.1.1. [1,2] *Пусть* $a_i, f : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ *— непрерывные справа функции ограниченной вариации,* $X_n(t), t \in \boldsymbol{T}$ *— решение задачи Коши (8) и*

$$\sup_{t\in[0,h_n)} |X_n^0(t) - X_0| \xrightarrow{n\to\infty, h_n\to 0} 0. \tag{9}$$

Тогда при $n \to \infty, h_n \to 0$

$$\int\limits_{\boldsymbol{T}} |X_n(t) - X^k(t)|dt \to 0, k = \overline{1, 4},$$

где $X^k(t)$ *— решения уравнений*

$$X^k(t) = X_0 + \int\limits_0^t dL^c(s)X^k(s) + \sum_{\mu_l \le t} \Delta L^k(\mu_l)X^k(\mu_l -) + F(t) - F(0), \qquad (10)$$

где $L^c(t)$ *— непрерывная часть функции* $L(t)$, $\mu_l, l \in \mathbb{N}$ *— точки разрыва* $L(t)$.

$$\Delta L^k(t) = (\Delta L^k_{ij}(t)), k = \overline{1,4},$$

где $L^k_{1j}(t) = 0$, $j = 1, 2$. *Если* $\frac{1}{\gamma_2(n)} = \circ(h_n)$, *то*

$$\Delta L^k_{2j}(\mu_l) = \begin{cases} -\Delta a_2(\mu_l), j = 2, \\ -\Delta a_1(\mu_l), \text{если } \dfrac{1}{\gamma_1(n)} = \circ(h_n), j = 1, \\ -\Delta a_1(\mu_l)(1 - \Delta a_2(\mu_l)), \text{если } h_n = \circ(\dfrac{1}{\gamma_1(n)}), j = 1. \end{cases}$$

Если $h_n = \circ(\frac{1}{\gamma_2(n)})$, *то при условии, что* $\Delta a_2(\mu_l) \neq 0$

$$\Delta L^k_{2j}(\mu_l) = \begin{cases} e^{-\Delta a_2(\mu_l)} - 1, j = 2, \\ -\Delta a_1(\mu_l), \text{если } \dfrac{1}{\gamma_1(n)} = \circ(h_n), j = 1, \\ \dfrac{\Delta a_1(\mu_l)}{\Delta a_2(\mu_l)}(e^{-\Delta a_2(\mu_l)} - 1), \text{если } h_n = \circ(\dfrac{1}{\gamma_1(n)}), j = 1. \end{cases}$$

Если же $\Delta a_2(\mu_l) = 0$, *то*

$$\Delta L^k_{2j}(\mu_l) = -\Delta a_j(\mu_l), j = 1, 2, k = \overline{1,4}.$$

Таким образом вследствие специального вида матрицы $L(t)$, в данной теореме был получен явный вид функций Ψ для каждого ассоциированного решения.

Решения уравнений (10), $k = \overline{1,4}$ существуют и единственны[8].

Утверждение 3.1.1.[1,8] *Первые координаты* $X^k_1(t)$ *ассоциированных решений* $X^k(t) = (X^k_i(t))^T, i = 1, 2, t \in \boldsymbol{T}$ *уравнений (10) абсолютно непрерывны для любых* $k = \overline{1,4}$.

Во втором разделе вводятся и исследуются ассоциированные фундамен-

[8]Миллер, Б.М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б.М. Миллер. — М.: Наука, 2005. — С.392–396.

тальные матрицы.

Введем *ассоциированные фундаментальные матрицы* $B^k(t,r)$, как решения следующих интегральных уравнений

$$B^k(t,r) = E + \int\limits_r^t dL^c(s)B^k(s,r) + \sum_{r<\mu_l\le t} \Delta L^k(\mu_l)B^k(\mu_l-,r), r,t \in \boldsymbol{T}, \quad (11)$$

где ΔL^k — матрицы из **теоремы 3.1.1**, $k = \overline{1,4}$.

Теорема 3.2.1.[1,7] *Ассоциированные решения задачи (7) при $f'(t) \equiv 0$ представимы в виде*

$$X^k(t) = B^k(t,0)X_0, \forall t \in \boldsymbol{T}, k = \overline{1,4}. \quad (12)$$

В следующей теореме ассоциированные решения задачи Коши (7) выражаются через ассоциированные фундаментальные матрицы.

Теорема 3.2.2.[2,5] *Ассоциированные решения задачи Коши (7) представимы в виде*

$$X^k(t) = B^k(t,0)X_0 + \int\limits_0^t B^k(t,\tau)dF^c(\tau) + \sum_{0<s\le t} B^k(t,s)\Delta F(s), k = \overline{1,4}. \quad (13)$$

В третьем разделе третьей главы рассматривается задача Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения высшего порядка, описываются все возможные ассоциированные решения данной задачи, а также доказывается теорема о представлении ассоциированных решений через ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующей однородной задачи.

$$\begin{cases} y^{(p)}(t,\omega) + a'_p(t)y^{(p-1)}(t,\omega) + \ldots + a'_1(t)y(t,\omega) + g(t)w'(t,\omega) = 0, \\ y(0,\omega) = c_1, \\ y'(0,\omega) = c_2, \\ \ldots \\ y^{(p-1)}(0,\omega) = c_p, \end{cases} \quad (14)$$

где $t \in \boldsymbol{T} = [0,b], \omega \in \Omega, c_i, b \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,p}$, $a_i : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,p}$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации, $w(t,\omega)$ — винеровский процесс, $g(t) \in L_2(\boldsymbol{T})$

При моделировании случайных процессов, описывающих процентные ставки в финансовой математике, используются уравнения, решениями которых являются марковские процессы, в то время как реальные финансовые данные часто не являются такими процессами. Данное заключение было сделано в силу того, что корреляционные функции реальных финансовых данных могут принимать отрицательные значения[9]. Случайные процессы с данными свойствами могут быть смоделированы с помощью стохастических дифференциальных уравнений вида (14).

Используя замену $X_i(t,\omega) = y^{(i-1)}(t,\omega), i = \overline{1,p}$ в уравнении (14), получим следующую систему

$$\begin{cases} X'(t,\omega) = L'(t)X(t,\omega) + G(t)W'(t,\omega), \\ X(0,\omega) = X_0, \end{cases} \tag{15}$$

где $t \in \boldsymbol{T}$,

$$X(t,\omega) = (X_i(t,\omega))^T, X_0 = (c_i)^T \in \mathbb{R}^p, i = \overline{1,p},$$

$$W'(t,\omega) = (W_j'(t,\omega))^T,$$

$W_j'(t,\omega) \equiv 0$, $\forall j = \overline{1,p-1}$ и $W_p'(t,\omega) = w'(t,\omega)$.

$$L'(t) = (L_{ij}'(t)),$$

здесь $L_{ij}'(t) = 1$, при $i = j-1$, и $L_{ij}'(t) = 0$, при $i \neq j-1$, если $i = \overline{1,p-1}, j = \overline{1,p}$ и $L_{pj}'(t) = -a_j'(t)$, $j = \overline{1,p}$.

$$G(t) = (G_{ij}(t)),$$

где $G_{ij}(t) = 0$, если $i \neq p$ или $j \neq p$, а $G_{pp}(t) = -g(t)$.

Таким образом задача Коши (15) является частным случаем системы (1). Рассмотрим семейство конечно-разностных с осреднением, аппроксимирующих данную систему.

Следствие 3.3.1.[3,9] *Пусть a_i — непрерывные справа функции ограниченной вариации, $g(t) \in L_2(\boldsymbol{T})$ и выполняется условия (5), тогда ассоции-*

[9]Медведев, Г.А. Математические модели финансовых рисков. В 2 ч. / Г.А. Медведев. — Мн.: БГУ, 2001. — Ч.1. — 293 с.

рованные решения задачи Коши (15) являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} X^k(t,\omega) =& X_0 + \int\limits_0^t dL^c(s)X^k(s,\omega) + \sum_{\mu_l \le t} \Delta L^k(\mu_l)X^k(\mu_l-,\omega) + \\ &+ \int\limits_0^t G(s)dW(s,\omega), t \in \boldsymbol{T}, \omega \in \Omega, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\Delta L^k(t) = (\Delta L^k_{ij}(t))$, $k = \overline{1,2^p}$, $L^k_{ij}(t) = 0$, *при* $i = \overline{1,p-1}, j = \overline{1,p}$. *Если* $\frac{1}{\gamma_p(n)} = \circ(h_n)$, *то*

$$\Delta L^k_{pj}(t) = \begin{cases} -\Delta a_p(\mu_l), j = p, \\ -\Delta a_j(\mu_l), \text{если } \dfrac{1}{\gamma_j(n)} = \circ(h_n), j = \overline{1,p-1}, \\ -\Delta a_j(\mu_l)(1-\Delta a_p(\mu_l)), \text{если } h_n = \circ(\dfrac{1}{\gamma_j(n)}), j = \overline{1,p-1}. \end{cases}$$

Если $h_n = \circ(\frac{1}{\gamma_p(n)})$, *то при условии, что* $\Delta a_p(\mu_l) \neq 0$

$$\Delta L^k_{pj}(t) = \begin{cases} e^{-\Delta a_p(\mu_l)} - 1, j = p, \\ -\Delta a_j(\mu_l), \text{если } \dfrac{1}{\gamma_j(n)} = \circ(h_n), j = \overline{1,p-1}, \\ \dfrac{\Delta a_j(\mu_l)}{\Delta a_p(\mu_l)}(e^{-\Delta a_p(\mu_l)} - 1), \text{если } h_n = \circ(\dfrac{1}{\gamma_j(n)}), j = \overline{1,p-1}. \end{cases}$$

Если же $\Delta a_p(\mu_l) = 0$, *то*

$$\Delta L^k_{pj}(t) = \begin{cases} 0, i = \overline{1,p-1}, j = \overline{1,p}, \\ -\Delta a_j(\mu_l), i = p, j = \overline{1,p}, \end{cases} \quad k = \overline{1,2^p}.$$

Теорема 3.3.2.[3,9] *Ассоциированные решения задачи Коши (14) представимы в виде:*

$$X^k(t,\omega) = B^k(t,0)X_0 + \int\limits_0^t B^k(t,\tau)G(\tau)dW(\tau,\omega), k = \overline{1,2^p}, \tag{17}$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, *где* $B^k(t,s), k = \overline{1,2^p}$ *— ассоциированные фундаментальные матрицы (11) соответствующей однородной системы.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Получено полное описание случаев существования ассоциированных решений задачи Коши для дифференциальной системы уравнений с обобщенными коэффициентами и случайными компонентами в зависимости от взаимосвязи малых параметров соответствующих конечно-разностных уравнений с осреднением [1,2,4,6].

2. Доказана разрешимость вспомогательной системы стохастических нагруженных интегральных уравнений [4,11].

3. Доказана, теорема о сходимости решений ассоциированного семейства конечно-разностных уравнений к решению построенной вспомогательной системы стохастических нагруженных интегральных уравнений для всех случаях взаимосвязи малых параметров [4,10].

4. Доказана формула представления ассоциированных решений задачи Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения с обобщенными коэффициентами высшего порядка через ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующего линейного дифференциального уравнения [1,2,3,5,7,8,9].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Представленная работа имеет теоретический характер. Полученные результаты представляют собой развитие теории стохастических дифференциальных систем уравнений с обобщенными коэффициентами. Результаты диссертации могут использоваться в учебном процессе при чтении специальных курсов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Автушко, Т.С. Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщёнными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т.С. Автушко, Н.В. Лазакович, А.Ю. Русецкий // Вес. Нац. Акад. Навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2013. — №3. — С.83–92.

2. Автушко, Т.С. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщёнными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Т.С. Автушко, Н.В. Лазакович, А.Ю. Русецкий // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. — 2013. — №2. — С.74–79.

3. Русецкий, А.Ю. Линейные стохастические дифференциальные системы в алгебре обобщенных случайных процессов / А.Ю. Русецкий // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. — 2016. — №2. — С.23–27.

4. Русецкий, А.Ю. Теорема существования и единственности ассоциированных решений стохастической дифференциальной системы уравнений с мерами / А.Ю. Русецкий // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2017. — №2. — С.23–27.

Статьи в других научных изданиях

5. Русецкий, А.Ю. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / А.Ю. Русецкий, Н.В. Лазакович // Сборник научных работ студентов Республики Беларусь «НИРС-2013». — Минск, 2013. — С.51–52.

6. Гриднев, Ю.В. Стохастическое моделирование систем автоматического управления беспилотного летательного аппарата с применением оптимального фильтра Калмана. / Ю.В. Гриднев, А.Ю. Русецкий, С.А. Рак // Доклады БГУИР. — 2013. — №8(78). — С.53–59.

Тезисы докладов научных конференций

7. Автушко, Т.С. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами / Т.С. Автушко,

А.Ю. Русецкий // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г. В 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Минск, 2012. — Ч.1. — С.30–31.

8. Лазакович, Н.В. Задача Коши для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщёнными коэффициентами в алгебре мнемофункций / Н.В. Лазакович, А.Ю. Русецкий // Еругинские чтения — 2013: тез. докл. XV Междунар. матем. конф., Гродно, 15–17 мая 2013 г. В 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Гродно, 2013. – Ч.2. — С.38.

9. Русецкий, А.Ю. Задача Коши для линейной стохастической дифференциальной системы второго порядка в алгебре обобщенных случайных процессов / А.Ю. Русецкий, Н.В. Лазакович // Еругинские чтения — 2014: тез. докл. XVI Междунар. матем. конф., Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. В 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т. — Новополоцк, 2014. – Ч.2. — С. 42–43.

10. Лазакович, Н.В. Ассоциированные решения задачи Коши для стохастической дифференциальной системы. / Н.В. Лазакович, А.Ю. Русецкий // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям — 2015: тез. докл. Междунар. матем. конф., Минск, 7–10 декабря 2015 г. В 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: Красовский С.Г. [и др.]. — Минск, 2015. — Ч.2. — С.49–51.

11. Русецкий, А.Ю. Теорема существования и единственности для стохастического интегрального уравнения / А.Ю. Русецкий // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. Науч. Конф. Минск, 5–10 сентября 2016 г. В 5 ч. / Ред. С.Г. Красовский — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. — Ч.1. — С.53–54.

РЕЗЮМЕ

Русецкий Артем Юрьевич

Решения дифференциальных систем со случайными и обобщенными компонентами

Ключевые слова: стохастические дифференциальные системы с обобщенными коэффициентами; семейство конечно-разностных стохастических дифференциальных систем уравнений; ассоциированные решения; линейные дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами.

Целью работы является описание ассоциированных решений задачи Коши для стохастической дифференциальной системы уравнений с обобщенными коэффициентами и изучение их свойств. Для этого используется подход, предложенный Н.В. Лазаковичем, основанный на построении вспомогательного семейства конечно-разностных уравнений, зависящих от малых параметров, аппроксимирующих исходную формально записанную систему. В диссертационной работе были получены следующие результаты:

1. Описаны все случаи существования ассоциированных решений задачи Коши для дифференциальной системы уравнений с обобщенными коэффициентами и случайными компонентами в зависимости от взаимосвязи параметров аппроксимаций.

2. Для анализа предельного поведения ассоциированных решений построена вспомогательная система стохастических нагруженных интегральных уравнений и доказана ее разрешимость.

3. Доказано, что решение, ассоциированное с заданным способом аппроксимации, удовлетворяет соответствующей вспомогательной системе стохастических нагруженных интегральных уравнений.

4. Доказана формула представления ассоциированных решений задачи Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения с обобщенными коэффициентами высшего порядка через ассоциированные фундаментальные матрицы соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Настоящие результаты являются новыми и согласуются с полученными ранее.

Представленная работа имеет теоретический характер. Совокупность полученных результатов представляет собой развитие теории стохастических дифференциальных систем уравнений с обобщенными коэффициентами.

РЭЗЮМЭ

Русецкі Арцем Юр'евіч

Рашэнні дыферэнцыяльных сістэм з выпадковымі і абагульненымі кампанентамі

Ключавыя словы: стахастычныя дыферэнцыяльныя сістэмы з абагульненымі каэфіцыентамі; сямейства вядома-рознасных стахастычных дыферэнцыяльных сістэм ураўненняў; асацыяваныя рашэнні; лінейныя дыферэнцыяльныя ураўненні з абагульненымі каэфіцыентамі.

Мэтай работы з'яўляецца апісанне асацыяваных рашэнняў задачы Кашы для стахастычнай дыферэнцыяльнай сістэмы ураўненняў з абагульненымі каэфіцыентамі і вывучэнне іх уласцівасцей. Для гэтага выкарыстоўваецца падыход, прапанаваны М.В. Лазаковічам, заснаваны на пабудове дапаможнага сямейства вядома-рознасных ураўненняў, якія залежаць ад малых параметраў, якшя апраксімуюць зыходную фармальна запісаную сістэму. У дысертацыйнай рабоце былі атрыманы наступныя вынікі:

1. Апісаны ўсе выпадкі існавання асацыяваных рашэнняў задачы Кашы для дыферэнцыяльная сістэмы ўраўненняў з абагульненымі каэфіцыентамі ў залежнасці ад сувязі параметраў апраксімацыі.

2. Для аналізу гранічных паводзінаў асацыяваных рашэнняў пабудавана дапаможная сістэма стахастычных нагружаных інтэгральных ураўненняў і даказана існаванне і адзінасць іх рашэнняў.

3. Даказана, што рашэнне, асацыяванае за дадзеным спосабам апраксімацыі, задавальняе адпаведнай дапаможнай сістэме стахастычных нагружаных інтэгральных ураўненняў.

4. Даказана формула прадстаўлення асацыяваных рашэнняў задачы Кашы для лінейнага стахастычнага дыферэнцыяльнага ўраўнення з абагульненымі каэфіцыентамі вышэйшага парадку праз асацыяваныя фундаментальныя матрыцы адпаведнага лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага ўраўнення.

Вынікі з'яўляюцца новымі і адпавядаюць атрыманым раней.

Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Атрыманыя вынікі ўяўляюць развіцце тэорыі стахастычных дыферэнцыяльных ураўненняў з абагульненымі каэфіцыентамі.

SUMMARY

Rusetski Artsiom Yurievich

Solutions of the differential systems with random and generalized components

Keywords: stochastic differential systems with generalized coefficients; family of finite-difference stochastic differential equation systems; associated solutions; linear differential equations with generalized coefficients.

The purpose of the thesis is to describe associated solutions of the Cauchy problem for stochastic differential system with generalized coefficients and study their features. To do this, the approach proposed by N.V. Lazakovich, based on the construction of an auxiliary family of finite-difference equations that depend on small parameters approximating the initial formal system is used. The thesis has following results:

1. Described all cases of existence of the associated solutions of the Cauchy problem for differential equations system with generalized coefficients with dependence of approximation parameters relations.

2. To analyze boundary behavior of associated solutions was built auxiliary system of stochastic weighted integral equations and solved problem of solution existence and uniqueness.

3. Proved that solution associated with the given way of approximation, satisfy the correspondent auxiliary system of weighted integral equations.

4. Proved formula of representing associated solutions of Cauchy problem for linear stochastic differential equation with generalized coefficients of higher order through associated fundamental matrices of correspondent linear homogeneous differential equation.

The present results are new and agreed with the obtained earlier.

The results of the thesis are theoretical. They are related to the theory of stochastic differential equations with generalized coefficients.