ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА СИСТЕМЫ SM|GI|∞ В УСЛОВИЯХ РАСТУЩЕГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. Назаров, И. Лапатин*

Томский государственный университет

Томск,Россия

*Makar4udra@yandex.ru

В работе перведено исследование выходящего потока системы SM|GI|∞. Исследование проводилось методом просеянного потока в условиях растущего времени обслуживания. Также использовался метод функций аналогичных характеристическим.

Ключевые слова: система массового обслуживания, выходящий поток, метод просеянного потокаю, метод асимптотического анализа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания [1] с неограниченным числом приборов являются моделями реальных систем в различных сферах нашей жизни: банковское дело, страхование, транспорт, торговля и т.д.

Одним из аспектов исследования систем массового обслуживания является исследование выходящего потока. Для систем с неограниченным числом приборов, на вход которых поступает простейший поток, было показано [2], что выходящий поток также является простейшим.

В данной работе предлагается метод, позволяющий исследовать выходящие потоки немарковских систем с неограниченным числом приборов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПОТОКА

Рассмотрим двумерный марковский процесс $\{\xi(n), \tau(n)\}$ с дискретным временем $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $\xi(n)$ принимает значения из некоторого дискретного множества, а $\tau(n)$ принимает неотрицательные значения из непрерывного множества.

По определению, марковская переходная функция [1] двумерного однородного марковского процесса $\{\xi(n), \tau(n)\}$ имеет вид

$$F(k_2, x; k_1, y) = P\{\xi(n+1) = k_2, \tau(n+1) < x\,|\xi(n) = k_1, \tau(n) = y\}$$

Будем рассматривать только такие двумерные случайные процессы $\{\xi(n), \tau(n)\}$, для которых

$$F(k_2, x; k_1, y) = F(k_2, x; k_1),$$

в этом случае будем обозначать

$$F(k_2, x; k_1) = A_{k_1 k_2}(x).$$

Матрицу $A(x)$, элементами которой являются функции $A_{k_1 k_2}(x)$, будем называть полумарковской.

Случайный поток однородных событий

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} \cdots \qquad (1)$$

будем называть полумарковским или SM-потоком, заданным матрицей $A(x)$, если для длин $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ его интервалов выполняются равенства

$$\tau_{n+1} = \tau(n)$$

Компонента $\xi(n)$ рассматриваемого двумерного марковского процесса $\{\xi(n), \tau(n)\}$ является цепью Маркова с дискретным временем и матрицей P вероятностей $P_{k_1 k_2}$ переходов за один шаг, определяемой равенством

$$P = A(\infty)$$

Эта цепь Маркова для рассматриваемого SM-потока является вложенной по моментам времени (1).

Вторая компонента $\tau(n)$ является немарковским процессом, но для ее элементов можно определить условные функции распределения

$$A_k(x) = P\{\tau(n) < x \,|\xi(n) = k\} = \sum_{\nu} A_{k\nu}(x)$$

Определим процесс s(t)

$$s(t) = \xi(n+1), t_n < t \leq t_{n+1} \qquad (2)$$

который необходим для исследования в данной работе.

3. МЕТОД ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает некоторый случайный поток событий. Время обслуживания будем считать случайным с функцией распределения $B(x)$ одинаковой для всех заявок.

Пусть $T_1 > 0$, T>0 - некоторые заданные величины, а $b = \int\limits_0^\infty (1 - B(x))dx$ - среднее время обслуживания, тогда обозначим

$$S(t) = B(bT_1 + T - t) - B(bT_1 - t)$$

Будем полагать, что если событие входящего потока наступает в момент t, то с динамической (зависящей от момента времени t) вероятностью $S(t)$ эта заявка просеивается, то есть отправляется в просеянный поток, а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается.

Здесь $S(t)$ - вероятность того, что η - время обслуживания заявки, поступившей в систему в момент времени $t \in [0, bT_1]$, принадлежит интервалу $[bT_1 - t, bT_1 + T - t]$, а закончит обслуживание эта заявка в момент времени $t + \eta \in [bT_1, bT_1 + T]$.

Очевидно, что число событий просеянного потока к моменту времени bT_1 равно числу обслуженных заявок на интервале $[bT_1, bT_1 + T]$.

Обозначим $n(t)$ - число событий просеянного потока, наступивших к моменту времени t.

Если в начальный момент времени $t = 0$ система свободна, то для момента времени bT_1 выполняется равенство

$$n(bT_1) = m(T, bT_1) \tag{3}$$

где $m(T, bT_1)$ - число событий выходящего потока рассматриваемой системы на интервале $[bT_1, bT_1 + T]$. Устремляя $T_1 \to \infty$, получим стационарный поток, определяемый процессом $m(T)$- число обслуженных заявок за время T.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА СИСТЕМЫ SM|GI|∞

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает полумарковский поток событий. Время обслуживания будем считать случайным с функцией распределения $B(x)$ одинаковой для всех заявок.

Обозначим $z(t)$ - длину интервала от момента t до момента наступления следующего события в полумарковском потоке, $n(t)$ - число событий просеянного потока, наступивших к моменту времени t, процесс $s(t)$ определен по закону (2).

Будем исследовать трехмерный марковский процесс $\{s(t), z(t), n(t)\}$.

Для распределения вероятностей

$$P(s, z, n, t) = P\{s(t) = s, z(t) < z, n(t) = n\}$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(s,z,n,t)}{\partial t} &= \frac{\partial P(s,z,n,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(s,0,n,t)}{\partial z} + \\ &+ \sum_{\nu} \frac{\partial P(\nu,0,n-1,t)}{\partial z} S(t) A_{\nu s}(z) \\ &+ \sum_{\nu} \frac{\partial P(\nu,0,n,t)}{\partial z} (1 - S(t)) A_{\nu s}(z).\end{aligned} \tag{4}$$

Обозначив

$$H(s, k, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(s, z, n, t), \tag{5}$$

где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, из системы (5) получим систему для $H(s,z,u,t)$

$$\frac{\partial H(s,z,u,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(s,z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial H(s,0,u,t)}{\partial z} +$$

$$+ \sum_{\nu} A_{\nu s}(z)\{(e^{ju} - 1)S(t) + 1\}\frac{\partial H(\nu,0,u,t)}{\partial z} \tag{6}$$

или в матричном виде

$$\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial H(0,u,t)}{\partial z} +$$

$$+[(e^{ju} - 1)S(t) + 1]\frac{\partial H(0,u,t)}{\partial z}A(z) \tag{7}$$

где $H(z,u,t) = \{H(0,z,u,t), H(1,z,u,), ...\}$, $A(z)$ - полумарковская матрица.

Функции $H(s,z,u,t)$ будем называть функциями аналогичными характеристическим.

Теперь перейдем к асимптотике растущего времени обслуживания [3].

Обозначив $\varepsilon = 1/b$, в системе (7) выполним замены

$$\tau = \varepsilon t, H(z,u,t) = F(z,u,\tau,\varepsilon), S(t) = S_1(\tau) = \varepsilon T B'(T_1 - \tau) + O(\varepsilon^2) \tag{8}$$

для $F(z,u,\tau,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial F(z,u,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F(z,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F(0,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z} +$$

$$+[(e^{ju} - 1)S_1(\tau) + 1]\frac{\partial F(0,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z}A(z) \tag{9}$$

В уравнении (9) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, учитывая $F(z,u,\tau,\varepsilon) \to F(z,u,\tau)$, и получим, что $F(z,u,\tau)$ является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial F(z,u,\tau)}{\partial z} = \frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}(I - A(z)) \tag{10}$$

где I - единичная матрица.

Решая которую, получим

$$F(z,u,\tau)E = \kappa \exp\{\kappa T(e^{ju} - 1)B(\tau)\}\int_0^z (1 - rA(y)E)dy \tag{11}$$

где

$$\kappa = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - rA(y)E)dy},$$

где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, из системы (5) получим систему для $H(s, z, u, t)$

$$\frac{\partial H(s,z,u,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(s,z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial H(s,0,u,t)}{\partial z} +$$

$$+ \sum_{\nu} A_{\nu s}(z)\{(e^{ju} - 1)S(t) + 1\}\frac{\partial H(\nu,0,u,t)}{\partial z} \tag{6}$$

или в матричном виде

$$\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial H(0,u,t)}{\partial z} +$$

$$+[(e^{ju} - 1)S(t) + 1]\frac{\partial H(0,u,t)}{\partial z}A(z) \tag{7}$$

где $H(z,u,t) = \{H(0,z,u,t), H(1,z,u,), ...\}$, $A(z)$ - полумарковская матрица.

Функции $H(s,z,u,t)$ будем называть функциями аналогичными характеристическим.

Теперь перейдем к асимптотике растущего времени обслуживания [3].

Обозначив $\varepsilon = 1/b$, в системе (7) выполним замены

$$\tau = \varepsilon t, H(z,u,t) = F(z,u,\tau,\varepsilon), S(t) = S_1(\tau) = \varepsilon T B'(T_1 - \tau) + O(\varepsilon^2) \tag{8}$$

для $F(z,u,\tau,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial F(z,u,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \frac{\partial F(z,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F(0,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z} +$$

$$+[(e^{ju} - 1)S_1(\tau) + 1]\frac{\partial F(0,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z}A(z) \tag{9}$$

В уравнении (9) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$, учитывая $F(z,u,\tau,\varepsilon) \to F(z,u,\tau)$, и получим, что $F(z,u,\tau)$ является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial F(z,u,\tau)}{\partial z} = \frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}(I - A(z)) \tag{10}$$

где I - единичная матрица.

Решая которую, получим

$$F(z,u,\tau)E = \kappa \exp\{\kappa T(e^{ju} - 1)B(\tau)\}\int\limits_0^z (1 - rA(y)E)dy \tag{11}$$

где

$$\kappa = \frac{1}{\int\limits_0^\infty (1 - rA(y)E)dy},$$

а E - единичный вектор-столбец, а r - распределение вероятностей цепи Маркрва $ksi(n)$.

В уравнении (11) выполним предельный переход при $z \to \infty$, учитывая $F(z,u,\tau) \to F(u,\tau)$, и получим решение $F(u,\tau)E$

$$F(u,\tau)E = \exp\{\kappa T(e^{ju} - 1)B(\tau)\} \tag{12}$$

В силу замен (8) и равенства (12), можно записать асимптотическое, при $\varepsilon \to 0$, приближенное равенство

$$H(u,t)E = F(u,\tau,\varepsilon)E \approx F(u,\tau)E =$$
$$= \exp\{\kappa T(e^{ju} - 1)B(\tau)\} = \exp\{\kappa T(e^{ju} - 1)B(t)\}$$

поэтому для характеристической функции величины $n(t)$ запишем

$$Me^{jun(t)} = H(u,t)E \approx \exp\{(e^{ju} - 1)\kappa TB(t)\} \tag{13}$$

При $t = bT_1$ получим

$$Me^{jun(bT_1)} = Me^{jum(bT_1,T)} \approx \exp\{(e^{ju} - 1)\kappa TB(bT_1)\},$$

устремляя в котором $T_1 \to \infty$ для характеристической функции процесса m(t) получим

$$Me^{jum(T)} = H(u,bT_1)E \approx \exp\{(e^{ju} - 1)\kappa T\}.$$

Таким образом, мы получили, что в условиях растущего времени обслуживания число обслуженных заявок в системе SM|GI|∞ за время T имеет распределение Пуассона с параметром κT. Поэтому можно полагать, что выходящий поток в этих условиях является прстейшим.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был предложен метод для исследования выходящих потоков систем с неограниченным числом приборов. Он был применен для системы SM|GI|∞. В результате, мы получили, что в условиях растущего времени обслуживания выходящий поток является простейшим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005.
2. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.
3. *Назаров А. А., Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.