

Контрольный экземпляр

- м.р. 1493

Министерство образования Республики Беларусь
Учебно-методическое объединение по естественнонаучному образованию

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь

В.А. Богущ

« 02 » 02 2017 г.

Регистрационный № ТД- 9.62.3 /тип.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Типовая учебная программа по учебной дисциплине
для специальностей:

- 1-31 03 01 Математика (по направлениям)
- (1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность),
- 1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность),
- 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)),
- 1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность));
- 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование,
- 1-31 03 08 Математика и информационные технологии,
- 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

СОГЛАСОВАНО

Председатель
Учебно-методического объединения
по естественнонаучному
образованию

А.Л. Толстик

« 09 » 09 2015 г.

СОГЛАСОВАНО

Начальник Управления высшего
образования Министерства
образования Республики Беларусь

С.А. Касперович

« 17 » 01 2017 г.

СОГЛАСОВАНО

Проректор по научно-методической
работе Государственного
учреждения образования
«Республиканский институт высшей
школы»

И.В. Титович

« 16 » 01 2017 г.

Эксперт-нормоконтролер

О.А. Ветитович

« 8 » 12 2016 г.

Минск 2017

Информация об изменениях размещается на сайтах:

<http://www.nihe.bsu.by>
<http://www.edubelarus.info>

СОСТАВИТЕЛИ:

Александр Львович Гладков – заведующий кафедрой математической кибернетики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Николай Иосифович Юрчук – профессор кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Фёдор Егорович Ломовцев – профессор кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»;

Евгений Константинович Макаров – зав. отделом дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № _____ от _____ 201_ г.)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № _____ от _____ 201_ г.)

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественному образованию
(протокол № _____ от _____ 201_ г.)

Ответственный за редакцию: Фёдор Егорович Ломовцев
Ответственный за выпуск: Александр Львович Гладков

1. Пояснительная записка

Математическая физика является частью общей теории дифференциальных уравнений в частных производных. Она изучает те дифференциальные уравнения, которые возникают в конкретных задачах механики, акустики, теплофизики, гидродинамики, электродинамики, электростатики, электроники и других. Поэтому представляется естественным начать изучение дисциплины «Уравнения математической физики» кратким введением в общую теорию уравнений с частными производными. Предполагается знание студентами таких разделов общей физики, как механика, теплопроводность, гравитация и электростатика, а также некоторых разделов высшей математики. Основные уравнения математической физики относятся к одному из трех важнейших типов уравнений в частных производных: гиперболические, параболические и эллиптические уравнения. Не исключается изложение курса в другом порядке: эллиптические, параболические и гиперболические уравнения.

Цель дисциплины «Уравнения математической физики»: научить студентов владеть основными понятиями теории дифференциальных уравнений с частными производными, методами построения математических моделей различных процессов и явлений естествознания и математическими методами исследования и решения основных краевых задач математической физики.

Образовательная цель: изложение основных принципов постановки краевых задач для гиперболических, эллиптических и параболических уравнений; овладение основными математическими методами решения краевых задач математической физики.

В курсе «Уравнения математической физики» рассматриваются задачи математической физики, приводящие в основном к линейным уравнениям с частными производными второго порядка. В результате изучения данной дисциплины студенты должны получить знания и умения математического моделирования реальных и в первую очередь физических процессов в виде краевых задач для уравнений математической физики. Расположение материала соответствует основным типам уравнений.

Широко используются основные методы математического анализа, линейной алгебры, топологии, линейных дифференциальных и интегральных уравнений и функционального анализа, которые должны быть изложены в предшествующих курсах.

От студентов требуются практические навыки вычисления определенных интегралов, дифференцирования и решения обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе, и краевых задач для этих уравнений. Студенты должны в полной мере владеть аппаратом матричных преобразований и теорией рядов Фурье. В теории рядов Фурье необходимо умение численного интегрирования определенных интегралов. Таким образом, студент обязан владеть основами численных методов интегрирования и дифференцирования, которые используются при

численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся частным случаем линейных уравнений с частными производными. Знание основ линейной алгебры и умение приводить квадратичные формы к каноническому виду являются для этого курса необходимостью. Из функционального анализа желательно знание основ теории разложения по ортогональным системам и спектральной теории компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Развивающая цель: дальнейшее формирование у студентов навыков математического мышления, математического моделирования и умения применять его в конкретных физических задачах.

Методы проведения занятий: лекции, практические и лабораторные занятия. На лекциях и практических занятиях изучаются только аналитические методы постановки, исследования и решения задач математической физики. Лабораторные занятия предполагают использование современных пакетов численного моделирования, исследования и решения задач математической физики на персональных компьютерах.

Рекомендуемые формы аттестации – зачет и экзамен.

В зависимости от потребностей той или иной специальности в рамках этой программы курс «Уравнения математической физики» можно читать на разных уровнях сложности: в классе классических или сильных обобщенных, или слабых обобщенных или других более широких классах решений.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Уравнения математической физики»:

- освоение важнейших понятий теории дифференциальных уравнений с частными производными (классические и обобщенные решения дифференциальных уравнений, решения и квазирешения краевых задач, корректные и условно корректные краевые задачи);
- классификация и приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка;
- постановка краевых задач математической физики, моделирующих нестационарные процессы колебаний струны, мембраны и газа и нестационарные процессы теплообмена, диффузии веществ и сорбции газов;
- постановка краевых задач математической физики, моделирующих процессы электростатики;
- изучение методов решения задачи Коши для гиперболических и параболических уравнений математической физики;
- изучение методов решения смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений математической физики;
- решение задачи Штурма–Лиувилля на собственные функции и собственные значения, возникающей в смешанных задачах для гиперболических и параболических уравнений математической физики;
- изучение методов решения краевых задач для эллиптических уравнений математической физики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия, основные уравнения математической физики и корректные постановки основных краевых задач для этих уравнений;
- методы решения основных краевых задач для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений;

уметь:

- выводить уравнения колебаний струны и теплопроводности и краевые условия, которыми математически моделируются соответствующие процессы и явления в физике, механике, биологии и других науках;
- получать формальные решения основных краевых задач для уравнений математической физики и давать их обоснование;
- использовать персональный компьютер в системе Mathematica для решения краевых задач математической физики.

владеть:

- способами решения краевых задач математической физики, в особенности методом разделения переменных, приводить уравнения математической физики к каноническому виду;
- основными приёмами решения уравнений гиперболического, параболического и эллиптического вида;
- теорией обобщенных функций, преобразованиями Фурье и Лапласа;
- методами Фурье, функций Грина, операторным методом;
- опытом использования математической символики; использования моделей с учётом их иерархической структуры и оценкой пределов применимости полученных результатов;
- опытом аналитического и численного решения основных уравнений математической физики.

Коды формируемых компетенций: АК-1-9; СЛК-2,3, 5,6; ПК-2,3,5,7-9, 13,16,22,27.

Программа дисциплины «Уравнения математической физики» рассчитана максимально на 182 часа, из них аудиторных 106 часов, для специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)» 104 часа, для специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии» 72 часа, примерное распределение по видам занятий: для специальности 1-1 03 01-01 «Математика (научно-производственная деятельность)» лекций – 52 часа, лабораторных работ – 52 часа; для специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» лекций – 54 часа, практических занятий – 52 часа; для специальности 1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)» лекций – 36 часов, лабораторных работ – 36 часов; по специальности 1-31 03 09 «Компьютерная математика и системный анализ» лекций – 52 часа, практических занятий – 54 часа.

Данная дисциплина по специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии» относится к дисциплинам компонента УВО, а для специальности 1-31 03 09 «Компьютерная математика и системный анализ» относится к циклу «Дисциплины и курсы по выбору студента».

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН
для специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)»:
1-31 03 01-01 «Математика (научно-производственная деятельность)»,
1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)»,
1-31 03 01-03 «Математика (экономическая деятельность)»,
1-31 03 01-04 «Математика (научно-конструкторская деятельность)»

№	Наименование разделов, тем	Распределение часов по видам занятий		
		Всего аудитор.	Лекц.	Лабор.
1	2	3	4	5
1	Тема 1. Введение в уравнения математической физики	14	6	8
2	Тема 2. Гиперболические уравнения математической физики	32	16	16
3	Тема 3. Параболические уравнения математической физики	30	16	14
4	Тема 4. Эллиптические уравнения математической физики	28	14	14
	<i>Всего</i>	104	52	52

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН
для специальности 1-31 03 02 «Механика и математическое моделирование»

№	Наименование разделов, тем	Распределение часов по видам занятий		
		Всего аудитор.	Лекц.	Прак.зан.
1	2	3	4	5
1	Тема 1. Введение в уравнения математической физики	14	6	8
2	Тема 2. Гиперболические уравнения математической физики	34	18	16
3	Тема 3. Параболические уравнения математической физики	30	16	14
4	Тема 4. Эллиптические уравнения математической физики	28	14	14
	<i>Всего</i>	106	54	52

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН
для специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии»

№	Наименование разделов, тем	Распределение часов по видам занятий		
		Всего аудитор.	Лекц.	Лабор.
1	2	3	4	5
1	Тема 1. Введение в уравнения математической физики	12	4	8
2	Тема 2. Гиперболические уравнения математической физики	24	14	10
3	Тема 3. Параболические уравнения математической физики	20	10	10
4	Тема 4. Эллиптические уравнения математической физики	16	8	8
	<i>Всего</i>	72	36	36

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН
для специальности 1-31 03 09 «Компьютерная математика и системный анализ»

№	Наименование разделов, тем	Распределение часов по видам занятий		
		Всего аудитор.	Лекц.	Пр.зан.
1	2	3	4	5
1	Тема 1. Введение в уравнения математической физики	14	6	8
2	Тема 2. Гиперболические уравнения математической физики	32	16	16
3	Тема 3. Параболические уравнения математической физики	32	16	16
4	Тема 4. Эллиптические уравнения математической физики	28	14	14
	<i>Всего</i>	106	52	54

3. Содержание учебного материала

Тема 1. Введение в уравнения математической физики

Основные понятия курса уравнений математической физики. Постановка краевых задач. Корректные и некорректные краевые задачи. Пример Адамара. Теорема Коши-Ковалевской. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка. Классификация уравнений в частных производных высших порядков. Характеристики уравнений. Характеристический конус.

Тема 2. Гиперболические уравнения математической физики

Вывод уравнения поперечных колебаний струны. Вывод уравнения поперечных колебаний мембраны. Постановка краевых задач. Решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний струны методом характеристик. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны методом Дюамеля. Формула Даламбера. Обобщенная задача Коши. Формула Римана. Задача Гурса. Решение задачи Коши в пространстве методом усреднения. Формула Пуассона-Кирхгофа. Принцип Гюйгенса. Решение задачи Коши на плоскости методом спуска. Формула Пуассона. Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при первых косых производных в граничных условиях методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. Общая формальная схема метода разделения переменных решения смешанных задач для гиперболических уравнений. Обоснование метода разделения переменных в случае классических и обобщенных решений.

Тема 3. Параболические уравнения математической физики

Вывод уравнения теплопроводности. Постановка краевых задач. Теорема о максимальном и минимальном значениях решений уравнения теплопроводности. Корректность первой смешанной задачи и задачи Коши для уравнения теплопроводности. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом преобразования Фурье. Фундаментальное решение. Формулы Пуассона. Общая формальная схема метода разделения переменных решения смешанных задач для параболических уравнений. Функция источника. Обоснование метода разделения переменных в случае классических и обобщенных решений.

Тема 4. Эллиптические уравнения математической физики

Интегральные формулы Грина. Свойства гармонических функций. О единственности решений задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. Решение задачи Дирихле и задачи Неймана для уравнения Пуассона методом функций Грина. Метод фиктивных зарядов построения функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре и круге методом функций Грина. Интегралы Пуассона. Общая формальная схема метода разделения переменных решения краевых задач для уравнения Пуассона. Обоснование метода разделения переменных в случае классических и обобщенных решений. Теорема Лиувилля. Поведение производных гармонических функций на бесконечности.

4. Информационно-методическая часть

4.1. Рекомендуемые темы контрольных работ

1. Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными.
2. Решение линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя переменными.
3. Математическое моделирование процессов колебаний, акустики, распространения тепла и электростатики краевыми задачами для уравнений математической физики.
4. Решение обобщенных задач Коши для линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными методом характеристик.
5. Решение обобщенных задач Коши для линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными методом Римана.
6. Решение задачи Гурса для линейных гиперболических уравнений второго порядка методом характеристик.
7. Решение задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений.
8. Решение смешанных задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка методом разделения переменных.
9. Задача Коши для линейных параболических уравнений второго порядка.
10. Решение смешанных задач для линейных параболических уравнений второго порядка методом разделения переменных.

11. Построение функций Грина для уравнения Лапласа в простейших областях.
12. Решение простейших краевых задач для уравнения Лапласа методом функций Грина.
13. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона методом разделения переменных.

4.2. Рекомендуемые темы для самостоятельной работы

1. Решение простейших дифференциальных уравнений с использованием систем компьютерной математики.
2. Разработка алгоритмов для классификации уравнений с частными производными и их реализация в системе компьютерной математики.
3. Разработка алгоритмов для приведения к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Реализация алгоритмов в системе компьютерной математики.
4. Решение задачи Коши для волнового уравнения. Графическое изображение решения.
5. Смешанная задача для уравнения малых поперечных колебаний струны. Суммирование рядов в системе “*Mathematica*”.
6. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Метод конечных разностей. Реализация вычислительных алгоритмов в системе “*Mathematica*”.
7. Смешанная задача для уравнения теплопроводности. Метод конечных разностей. Реализация вычислительных алгоритмов в системе “*Mathematica*”.
8. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона с использованием систем компьютерной математики.
9. Гармонические функции. Визуализация принципа максимума в системе компьютерной математики.

4.3. Рекомендуемые темы проектов

1. Характер гладкости решений уравнений гиперболического типа.
2. Задача Коши и задача Гурса.
3. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов.
4. Функция Грина оператора Лапласа.
5. Задача Штурма – Лиувилля.
6. Метод потенциалов.
7. Вариационные методы.
8. Метод интегральных преобразований.
9. Метод конечных разностей.

10. Некоторые некорректно поставленные задачи.
11. Метод разделения переменных.
12. Метод функций Грина.
13. Цилиндрические функции.
14. Сферические функции.

4.4. Рекомендуемая литература

Основная

1. Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1977. 312 с.
2. Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. 576 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2004. 798 с.
4. Корзюк В.И. Уравнения математической физики. Минск, 2011. 459 с.
5. Ломовцев Ф.Е. Уравнения математической физики. Сборник задач. Минск, 2009. 131 с.
6. Сборник задач по уравнениям математической физики (под редакцией Владимиров В.С.). М., 1982. 256 с.

Дополнительная

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1982. 336 с.
2. Будако Б.Н., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М., 1980. 686 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 2003. 399 с.
4. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., 1971. 416 с.
5. Кулешов А.А. Уравнения математической физики в системе *Mathematica*. Учебное пособие. Мн., 2004. 300 с.
6. Кулешов А.А., Чесалин В.И., Юрчук Н.И. “Уравнения математической физики”. Лабораторный практикум для студентов механико-математического факультета БГУ. Мн., 2005. 29 с.
7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983. 442 с.
8. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1966. 281 с.
9. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., 1992. 432 с.
10. Сборник задач по уравнениям математической физики (под редакцией Бицадзе А.В.). М., 1985. 310 с.

Диагностика компетенций студента

С целью текущего контроля формируемых компетенций студента рекомендуется проведение контрольных работ (как правило, по одной контрольной работе на тему, 2-4 контрольные работы в семестр), коллоквиумов (как правило, по одному коллоквиуму на тему, 2-4 коллоквиума в семестр) и домашних работ. По итогам каждого семестра проводится зачет и/или экзамен.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине

Самостоятельная работа студентов – это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов, как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем или в его отсутствие.

Самостоятельная работа реализуется:

1. В процессе аудиторных занятий на лекциях, практических и семинарских занятиях, при выполнении лабораторных работ.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания: на консультациях, при ликвидации задолженностей, в процессе выполнения индивидуальных заданий творческого характера и т.д.
3. В библиотеке, по месту жительства, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. Внеаудиторная самостоятельная работа;
2. Аудиторная самостоятельная работа под руководством преподавателя;
3. Научно-исследовательская работа.

Виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов разнообразны: подготовка и написание рефератов, докладов, очерков и других письменных работ на заданные темы.

Аудиторная самостоятельная работа может реализовываться при проведении практических занятий, семинаров, выполнении лабораторного практикума и во время чтения лекций.

При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории необходимо контролировать усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам.

На практических и семинарских занятиях различные виды самостоятельной работы студентов позволяют сделать процесс обучения более интересным и поднять активность значительной части студентов в группе.

На практических занятиях нужно не менее 1 часа из двух (50% времени) отводить на самостоятельное решение задач. Практические занятия целесообразно строить следующим образом: 1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены). 2. Беглый опрос. 3. Решение 1-2 типовых задач. 4. Самостоятельное решение задач. 5. Разбор типовых ошибок при решении (в конце текущего занятия или в начале следующего).

Результативность самостоятельной работы студентов во многом определяется наличием активных методов ее контроля. Существуют следующие виды контроля:

- входной контроль знаний и умений студентов при начале изучения очередной дисциплины;
- текущий контроль, то есть регулярное отслеживание уровня усвоения материала на лекциях, практических и лабораторных занятиях;
- промежуточный контроль по окончании изучения раздела или модуля курса;
- самоконтроль, осуществляемый студентом в процессе изучения дисциплины при подготовке к контрольным мероприятиям;
- итоговый контроль по дисциплине в виде зачета и/или экзамена;
- контроль остаточных знаний и умений спустя определенное время после завершения изучения дисциплины.