

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

« 24 »



Толстик  
2015 г.

Регистрационный № 101/836 /уч.

**Экономико-математические модели**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности**

**1-31 03 01 Математика (по направлениям)  
Направление специальности 1-31 03 01-03  
Математика (экономическая деятельность)**

2015г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2013 и учебного плана, регистрационный № G31-139/уч. по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) направление специальности 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Петр Петрович Забрейко**, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой нелинейного анализа и аналитической экономики  
(протокол № 12 от 22.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета  
Белорусского государственного университета  
(протокол № 6 от 26.05.2015)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

За последние 50 лет математические методы проникли во многие науки, которые казались весьма далекими от возможного использования математики. В частности, математика стала одним из важнейших факторов в различных областях экономики. В настоящее время хорошо подготовленный экономист должен владеть многими методами современной математики, включая и такие абстрактные, как алгебра, функциональный анализ, топология и др. В частности, именно линейная алгебра и функциональный анализ позволили строить и исследовать новые типы моделей экономики. Без изучения этих экономико-математических моделей теперь не обойтись ни специалисту в области экономической теории, ни хозяйственному руководителю предприятия, ответственному за выбор решений, ни плановым органам, имеющим дело с экономикой в масштабах всей страны. В настоящее время экономико-математические модели – это практический аппарат для анализа экономических процессов.

Курс «Экономико-математические модели» посвящен основным статическим моделям экономики – одному из наиболее значимых и широко используемых разделов математической экономики. Этот курс должен служить основой для понимания реальных экономических процессов и исследования возможности эффективного управления этими процессами и др. О значимости этого курса свидетельствует значительное количество публикаций по этим вопросам в серьезных математических и экономических журналах, огромное количество монографий. В этой связи, излагается ряд новых математических понятий и результатов играющих существенную роль в математической экономике.

Практические навыки использования полученных на лекциях теоретических значений прививаются студентам в процессе решения ими различных задач и упражнений на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов, для которой в программе предусмотрены специальные часы. В ходе самостоятельной работы студенты выполняют индивидуальные задания по наиболее важным темам.

В процессе реализации программы особое место должна занимать организация учебно-исследовательской работы студентов. Эта работа должна органично включаться в учебный процесс в сочетании со всеми видами учебных занятий.

Каждая тема позволяет организовать творческую самостоятельную работу студентов, которая будет способствовать становлению специалиста, обладающего значительным творческим потенциалом. Содержание и формы контролируемой самостоятельной работы студентов должны соответствовать целям и задачам подготовки специалистов.

**Цель учебной дисциплины** "Экономико-математические модели" – повышение уровня профессиональной компетентности, дать возможность студентам познакомиться с основными статическими моделями, используемыми в современной математической экономике, в первую очередь, с классической моделью Леонтьева и ее многочисленными обобщениями – как известно, именно модель Леонтьева к настоящему времени наиболее изучена и именно она

позволяет достаточно эффективно определять рентабельность как небольших предприятий, так и больших экономических комплексов.

**Образовательная цель** — овладение студентами наиболее общими понятиями и методами, применяемыми при математическом моделировании экономических задач, связанных с рациональным выбором.

**Развивающая цель** — формирование у студентов основ математического мышления, овладение методами математического моделирования экономических явлений и процессов, а также умения интерпретировать результаты исследования математических моделей с экономической точки зрения.

**Основные задачи**, решаемые в рамках изучения дисциплины «Экономико-математические модели»: подготовка квалифицированных специалистов, владеющих теоретическими основами и методами математического моделирования практических задач экономики.

В результате изучения дисциплины обучаемый должен **знать:**

- классическую модель Леонтьева;
- основные факты теории неотрицательных матриц;
- основные используемые на практике численные методы анализа модели Леонтьева;

**уметь:**

- составлять математические модели по экономическим данным технологические матрицы;
- проверять продуктивность технологических матриц, оценивать эффективность соответствующих моделей; определять положительные и неотрицательные собственные векторы технологических матриц;
- вычислять или оценивать основные характеристики технологических матриц;

**владеть:**

- методами математического моделирования экономических задач

Учебная программа предназначена для студентов 3 курса (5, 6 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 148 часов, в том числе аудиторных занятий – 70 часов, из них лекции – 36 часов, лабораторных – 26, УСП – 8 часов:

- в 5 семестре 58 часов, в том числе аудиторных занятий – 36 часов, из них лекции – 22 часов, лабораторные занятия – 10 часов, УСП – 4 часов, рекомендуемая форма отчетности – зачет;
- в 6 семестре 90 часов, в том числе аудиторных занятий – 34 часов, из них лекции – 14 часов, лабораторные занятия – 16 часов, УСП – 4 часа, рекомендуемая форма отчетности – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## РАЗДЕЛ I ТЕОРИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

### Тема 1. Экономика и математика

Математика и экономика. Пространство благ; основные структуры конечномерного пространства  $R^n$  с экономической точки зрения. Координаты в "экономических" пространствах; "допустимые" замены переменных. Дуальное пространство с экономической точки зрения. Вещественные и комплексные пространства. Время в экономике. Дискретное и непрерывное время. Общая схема экономических отношений. Производители и потребители. Рынки. Статические и динамические модели в экономике.

### Тема 2. Открытая модель Леонтьева ее продуктивность

Открытая модель Леонтьева. Уравнение Леонтьева. Производственная матрица. Экономический смысл элементов, строк и столбцов производственной матрицы. Неразложимые и разложимые матрицы. Экономический смысл. Продуктивные открытые модели Леонтьева. Условия продуктивности. Спектральный радиус, его основные свойства и вычисление. Ряд Неймана.

Объемы производства и потребления. Издержки производства. Прямые и косвенные, суммарные издержки. Основные теоремы об издержках производства в случае неразложимой технологической матрицы и в общем случае.

### Тема 3. Неотрицательные матрицы и спектральный радиус

Положительные и неотрицательные матрицы, граф неотрицательной матрицы. Спектральный радиус матрицы. Различные формулы для спектрального радиуса: ряд Неймана, формула Гельфанда, связь спектрального радиуса с эквивалентными нормами

### Тема 4. Теоремы Перрона-Фробениуса

Спектральные свойства положительных матриц. Существование положительного собственного вектора и положительность спектрального радиуса. Минимаксные формулы для спектрального радиуса положительной матрицы. Неразложимые и разложимые матрицы и их спектральные свойства. Булевы матрицы и их приложения к теории неотрицательных матриц.

## РАЗДЕЛ II ОСНОВЫ ЭКОНОСТАТИКИ

### Тема 1. Примитивные и импримитивные матрицы

Примитивные матрицы. Спектральные свойства примитивных матриц. Теорема Виландта. Признаки импримитивности неотрицательных матриц. Острые матрицы и оценки коэффициентов остроты матриц. Импримитивные матрицы и их спектральные свойства. Теорема об итерациях неразложимых матриц.

### Тема 2. Оценки спектрального радиуса и их экономические приложения

Неотрицательные собственные векторы неразложимых и разложимых матриц; главные собственные. Вычисление главных собственных векторов. Булевы матрицы и их приложения в теории неотрицательных матриц. Итерации разложимых неотрицательных матриц.

### Тема 3. Теоремы о возмущениях равновесия

Феномен Хикса в открытой модели Леонтьева. Случаи неразложимой и разложимых матриц. Феномен Самуэльсона в открытой модели Леонтьева для неразложимых и разложимых матриц.

### Тема 4. Итерационные методы исследования модели Леонтьева

Пространство Биркгофа-Гильберта. Теорема о полноте пространства Биркгофа-Гильберта и теорема Биркгофа. Вычислении положительного собственного вектора. Спектральный зазор положительных матриц. Осцилляция и теорема Островского.

Теорема Бауэра. Геометрический смысл теорем Биркгофа, Островского и Бауэра. Оценки спектрального зазора. Теорема Красносельского-Соболева. Достаточные признаки примитивности матриц. Острые матрицы

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Количество аудиторных часов |                      |                     |                      |      | Количество часов по | Формы контроля знаний           |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------|---------------------|----------------------|------|---------------------|---------------------------------|
|                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | лекции                      | практические занятия | семинарские занятия | лабораторные занятия | Иное |                     |                                 |
| 1                   | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3                           | 4                    | 5                   | 6                    | 7    | 8                   | 9                               |
|                     | <b>РАЗДЕЛ I ТЕОРИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>22</b>                   |                      |                     | <b>10</b>            |      | <b>4</b>            |                                 |
|                     | <b>Тема 1. Экономика и математика</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>4</b>                    |                      |                     | <b>1</b>             |      |                     |                                 |
| 1.1.                | Математика и экономика. Пространство благ; основные структуры конечномерного пространства $R^n$ с экономической точки зрения. Координаты в "экономических" пространствах; "допустимые" замены переменных. Дуальное пространство с экономической точки зрения.                                                                                      | 2                           |                      |                     |                      |      |                     |                                 |
| 1.2                 | Вещественные и комплексные пространства. Время в экономике. Дискретное и непрерывное время. Общая схема экономических отношений. Производители и потребители. Рынки. Статические и динамические модели в экономике.                                                                                                                                | 2                           |                      |                     | 1                    |      |                     |                                 |
|                     | <b>Тема 2. Открытая модель Леонтьева ее продуктивность</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>6</b>                    |                      |                     | <b>3</b>             |      |                     |                                 |
| 2.1                 | Открытая модель Леонтьева. Уравнение Леонтьева. Производственная матрица. Экономический смысл элементов, строк и столбцов производственной матрицы. Неразложимые и разложимые матрицы. Экономический смысл.                                                                                                                                        | 2                           |                      |                     | 1                    |      |                     |                                 |
| 2.2                 | Продуктивные открытые модели Леонтьева. Условия продуктивности. Спектральный радиус, его основные свойства и вычисление. Ряд Неймана. Объемы производства и потребления. Издержки производства. Прямые и косвенные, суммарные издержки. Основные теоремы об издержках производства в случае неразложимой технологической матрицы и в общем случае. | 2                           |                      |                     | 1                    |      |                     | Проверка индивидуальных заданий |
| 2.3                 | Феномен Хикса в открытой модели Леонтьева. Случаи неразложимой и разложимых матриц.                                                                                                                                                                                                                                                                | 2                           |                      |                     | 1                    |      |                     |                                 |

|            |                                                                                                                                                                                                                                                               |           |  |  |           |          |                         |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|--|--|-----------|----------|-------------------------|
|            | Феномен Самуэльсона в открытой модели Леонтьева для неразложимых и разложимых матриц. Затраты внешних ресурсов. Цены и равновесие в открытой модели Леонтьева. Равновесная и неравновесные экономики. Обзор условий продуктивности открытой модели Леонтьева. |           |  |  |           |          |                         |
|            | <b>Тема 3. Неотрицательные матрицы и спектральный радиус</b>                                                                                                                                                                                                  | <b>6</b>  |  |  | <b>3</b>  | <b>2</b> |                         |
| 3.1        | Положительные и неотрицательные матрицы, граф неотрицательной матрицы.                                                                                                                                                                                        | 2         |  |  | 1         |          |                         |
| 3.2        | Спектральный радиус матрицы, различные формулы для спектрального радиуса: ряд Неймана, формула Гельфанда, связь спектрального радиуса с эквивалентными нормами                                                                                                | 2         |  |  | 1         |          |                         |
| 3.3        | Основные свойства спектрального радиуса. Основная теорема о продуктивности.                                                                                                                                                                                   | 2         |  |  | 1         |          |                         |
|            | <b>Тема 4. Теремы Перрона-Фробениуса</b>                                                                                                                                                                                                                      | <b>6</b>  |  |  | <b>3</b>  | <b>2</b> |                         |
| 4.1.       | Спектральные свойства положительных матриц. Существование положительного собственного вектора и положительность спектрального радиуса.                                                                                                                        | 2         |  |  | 1         |          |                         |
| 4.2        | Минимаксные формулы для спектрального радиуса положительной матрицы. Неразложимые и разложимые матрицы и их спектральные свойства                                                                                                                             | 2         |  |  | 1         |          |                         |
| 4.3        | Булевы матрицы и их приложения к теории неотрицательных матриц.                                                                                                                                                                                               | 2         |  |  | 1         |          |                         |
|            | <b>Всего за семестр</b>                                                                                                                                                                                                                                       | <b>22</b> |  |  | <b>10</b> | <b>4</b> |                         |
|            | <b>РАЗДЕЛ II ОСНОВЫ ЭКОНОСТАТИКИ</b>                                                                                                                                                                                                                          | <b>14</b> |  |  | <b>16</b> | <b>4</b> |                         |
|            | <b>Тема 1. Примитивные и импримитивные матрицы</b>                                                                                                                                                                                                            | <b>2</b>  |  |  | <b>4</b>  | <b>2</b> |                         |
| 2.1.<br>1  | Примитивные матрицы. Спектральные свойства примитивных матриц. Теорема Виландта. Признаки импримитивности неотрицательных матриц.                                                                                                                             | 1         |  |  | 2         |          |                         |
| 2.1.<br>2  | Острые матрицы и оценки коэффициентов остроты матриц. Импримитивные матрицы и их спектральные свойства. Теорема об итерациях неразложимых матриц.                                                                                                             | 1         |  |  | 2         |          |                         |
|            | <b>Тема 2. Оценки спектрального радиуса и их экономические приложения</b>                                                                                                                                                                                     | <b>4</b>  |  |  | <b>4</b>  |          |                         |
| 2.2.<br>1. | Неотрицательные собственные векторы неразложимых и разложимых матриц;                                                                                                                                                                                         | 2         |  |  | 2         |          | Проверка индивидуальных |

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |    |  |  |    |   |                                 |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|--|--|----|---|---------------------------------|
|            | главные собственные. Вычисление главных собственных векторов. Булевы матрицы и их приложения к теории неотрицательных матриц. Итерации разложимых неотрицательных матриц.                                                                                                       |    |  |  |    |   | заданий                         |
| 2.2.<br>2  | Теоремы об оценках сверху и снизу спектрального радиуса неотрицательных матриц. Теорема Хокинса–Саймона и ее экономический смысл.                                                                                                                                               | 2  |  |  | 2  |   |                                 |
|            | <b>Тема 3.</b> Теоремы о возмущениях равновесия                                                                                                                                                                                                                                 | 4  |  |  | 4  |   |                                 |
| 2.3.<br>1. | Феномен Хикса в открытой модели Леонтьева. Случаи неразложимой и разложимых матриц                                                                                                                                                                                              | 2  |  |  | 2  |   |                                 |
| 2.3.<br>2  | Феномен Самуэльсона в открытой модели Леонтьева для неразложимых и разложимых матриц.                                                                                                                                                                                           | 4  |  |  | 2  |   |                                 |
|            | <b>Тема 4.</b> Итерационные методы исследования модели Леонтьева                                                                                                                                                                                                                | 4  |  |  | 4  | 2 |                                 |
| 2.4.<br>1  | Пространство Биркгофа-Гильберта. Теорема о полноте пространства Биркгофа-Гильберта и теорема Биркгофа.. Вычислении положительного собственного вектора.                                                                                                                         | 2  |  |  | 2  |   | Проверка индивидуальных заданий |
| 2.4.<br>2  | Спектральный зазор положительных матриц. Осцилляция и теорема Островского. Теорема Бауэра. Геометрический смысл теорем Биркгофа, Островского и Бауэра. Оценки спектрального зазора. Теорема Красносельского–Соболева. Достаточные признаки примитивности матриц. Острые матрицы | 2  |  |  | 2  |   |                                 |
|            | <b>Всего за семестр</b>                                                                                                                                                                                                                                                         | 14 |  |  | 16 | 4 |                                 |
|            | <b>Всего за семестр</b>                                                                                                                                                                                                                                                         | 36 |  |  | 26 | 8 |                                 |

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Список литературы

1. Аллен Р. Математическая экономия. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. — 600 с.
2. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. — Москва: Издательство Московского университета, 1980. — 200 с.
3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. — Москва: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 294 с.
4. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления (Справочно-математическая библиотека).} — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 320 с.
5. Гантмахер Ф.Р.} {it Теория матриц}. — Москва: Наука, Физматгиз, 1966. — 548 с.
6. Dorfman R., Samuelson P.A., Solow R.M. Linear Programming and Economic Analysis. - New York Toronto London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958. — 525 с.
7. Забрейко П.П.it Математические Основы Экономики. — Лекции, 2002, 1-54.
8. Забрейко П.П., Шевелевич К.В. Теоремы Хикса и Ле-Шателье—Самуэльсона для разложимых неотрицательных матриц. — Доклады НАН Беларуси, (2002), No 3, с. 30-34.
9. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — Москва: Прогресс, 1975. — 608 с.
10. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — Мир, 1964. — 839 с.
11. Кун Г.У., Таккер А.У. Линейные неравенства и смежные вопросы. — М.: Издательство иностранной литературы, 1959. — 470 с.
- 12.Ланкастер К. Математическая экономика. — Москва: Советское Радио, 1972. — 464 с.
13. Сюдсетер К., А., Берк П. Справочник по математике для экономистов. Санкт-Петербург: Экономическая школа. Санкт-Петербургский государственный университет экономики и Финансов. Высшая школа экономики, 2000. 1-230
14. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989, — 656 с.
15. Эрроу К.Д., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. — М.: Издательство иностранной литературы, 1962. — 333 с.

## ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ И ЭКЗАМЕНУ

1. Дать определение примитивных матриц.
2. Спектральные свойства примитивных матриц.
3. Теорема Виландта.
4. Признаки импримитивности неотрицательных матриц.
5. Острые матрицы и оценки коэффициентов остроты матриц.
6. Импримитивные матрицы и их спектральные свойства.
7. Теорема об итерациях неразложимых матриц.
8. Неотрицательные собственные векторы неразложимых и разложимых матриц; главные собственные.
9. Вычисление главных собственных векторов.
10. Булевы матрицы и их приложения в теории неотрицательных матриц. Итерации разложимых неотрицательных матриц.
11. Теоремы об оценках сверху и снизу спектрального радиуса неотрицательных матриц.
12. Теорема Хокинса–Саймона и ее экономический смысл.
13. Феномен Хикса в открытой модели Леонтьева. Случаи неразложимой и разложимых матриц.
14. Феномен Самуэльсона в открытой модели Леонтьева для неразложимых и разложимых матриц.
15. Пространство Биркгофа–Гильберта.
16. Знать формулировки теорем о полноте пространства Биркгофа–Гильберта и теорема Биркгофа.
17. Вычислении положительного собственного вектора.
18. Спектральный зазор положительных матриц.
19. Геометрический смысл теорем Биркгофа, Островского и Бауэра.
20. Оценки спектрального зазора. Теорема Красносельского–Соболева.
21. Достаточные признаки примитивности матриц. Острые матрицы

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ  
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ  
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

[illegible]

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ  
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на \_\_\_\_/\_\_\_\_ учебный год

| №п | Дополнения и изменения | Основание |
|----|------------------------|-----------|
|    |                        |           |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
(протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_  
(степень, звание)

\_\_\_\_\_  
(подпись)

\_\_\_\_\_  
(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

\_\_\_\_\_  
(степень, звание)

\_\_\_\_\_  
(подпись)

\_\_\_\_\_  
(И.О.Фамилия)