Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе

_______________ А.Л. Толстик
«27» 07 2015 г.

Регистрационный № УД-830/уч.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

2015г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02-2013 и учебного плана, утвержденного 30.05.2013, регистрационный № G31-136/уч. по специальности 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

СОСТАВИТЕЛИ:
Бахтин Виктор Иванович, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.
Лебедев Андрей Владимирович, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.
Пиндрик Ольга Исааковна, доцент кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:
Кафедрой нелинейного анализа и аналитической экономики
(протокол № 12 от 22.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 26.05.2015)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Усложнение технологий научно-производственных процессов и их широкого взаимопроникновения, а также необходимость повышения качества обслуживания в различных сферах жизнедеятельности людей приводят к необходимости определения и применения наилучших (оптимальных) методов организации и управления этими процессами. Именно по этой причине в обществе наблюдается рост интереса и внимания к проблемам теории управления и теории принятия оптимальных решений. Для решения таких проблем и применяются методы оптимизации. Поэтому изучение различных разделов дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» является весьма существенной частью образования всякого грамотного специалиста, работающего как в области науки и производства, так и в сферах экономики и обслуживания.

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» является неотъемлемой частью современных знаний. Для изучения студентами данного курса необходимы знания понятий и фактов следующих дисциплин типового учебного плана: “Математический анализ» (сходимость последовательностей, непрерывность и дифференцирование функций нескольких переменных, теорема о неявной функции, теорема Вейерштрасса).

Основными методами изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентам практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, а также на контрольных работах и зачетах.

Цель учебной дисциплины

Основной целью учебной дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» – повышение уровня профессиональной компетентности в решении проблем оптимизации в различных сферах трудовой деятельности.

Образовательная цель: изложение методов разработки алгоритмов оптимизации в задачах управления сложными технологическими процессами.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, построение математических моделей сложных технологических процессов и изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации»: состоят в обучении методам решения экстремальных задач в конечномерных пространствах, а также в привитии навыков составления математических моделей, которые наилучшим образом соответствуют конкретной прикладной задаче и имеют строгие математические решения.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

— теоремы о существовании точек минимума (максимума) для функций на подмножествах конечномерных пространств;

— необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума (максимума) функций на подмножествах конечномерных пространств;

— основы выпуклого анализа и методы исследования выпуклых задач оптимизации;

— теорию выпуклого и линейного программирования;

— теорию нелинейного программирования.

уметь:

— находить точки минимума и максимума для функций, определенных на конечномерных пространствах;

— строить модели экстремальных задач в конечномерных пространствах;

— с помощью дифференциальных критериев выпуклости проверять, является ли заданная функция выпуклой;

— использовать условия оптимальности и критерий Куна-Таккера для решения задач выпуклого программирования;

— использовать симплекс-метод для решения задач линейного программирования;

— использовать условия оптимальности первого и второго порядка для решения задач нелинейного программирования.

владеть:

— навыками описания математической модели прикладной задачи, а также ее решения методом множителей Лагранжа, симплекс-методом (в случае задачи линейного программирования) и используя результаты теории выпуклого программирования (если задача является выпуклой).

Учебная программа предназначена для студентов 3 курса (6 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 108 часов, в том числе аудиторных занятий – 68 часов, из них лекции –34 часа, практические занятия – 28 часов, УСР – 6 часов. Рекомендуемая форма отчетности – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение

Тема 1.1.
Общая задача оптимизации.
Тема 1.2.
Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах.

Раздел 2. Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.

Тема 2.1.
Общая задача оптимизации с ограничениями.
Тема 2.2.
Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
Тема 2.3.
Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
Тема 2.4.
Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.
Тема 2.5.
Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.

Раздел 3. Линейное программирование

Тема 3.1.
Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
Тема 3.2.
Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.
Тема 3.3.
Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод.
Тема 3.4
Теория двойственности.

Раздел 4. Выпуклые задачи оптимизации

Тема 4.1.
Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.
Тема 4.2.
Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.
Тема 4.3.
Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна-Таккера.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Раздел 1. Введение	**4**	**2**					
	Тема 1.1. Общая задача оптимизации.	**2**						
1.1.1.	Предмет курса, история, связь с другими математическими дисциплинами, значение и роль в естествознании, экономических, технических, социальных науках и их приложениях. Основные определения и понятия. Классификация задач оптимизации.	2						
	Тема 1.2. Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах	**2**	**2**					
1.2.1.	Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Верхний и нижний пределы числовых последовательностей и функций. Полунепрерывные функции. Теоремы о существовании оптимальных решений	2	2					Проверка индивидуальных заданий
	Раздел 2. Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.	**14**	**12**				**2**	
	Тема 2.1. Общая задача оптимизации с ограничениями.	**4**	**3**					
2.1.1	Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по направлениям, равномерная дифференцируемость по направлениям, полная производная. Конус допу-	2	1					Проверка индивидуальных заданий

	стимых и конус касательных направлений; их основные свойства. Необходимые условия локального минимума первого порядка для дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями.							
2.1.2.	Достаточное условие строгого локального минимума для равномерно дифференцируемых функций в общей задаче оптимизации с ограничениями. Дважды вполне дифференцируемые функции. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек локального минимума в общей задаче оптимизации с ограничениями	2	2					
	Тема 2.2. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.	**2**	**2**					
2.2.1.	Формулировка принципа Лагранжа для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств. Примеры решения задач.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 2.3.Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.	**4**	**3**					
2.3.1.	Формулировка принципа Лагранжа для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Доказательство принципа Лагранжа.	2	1					Проверка индивидуальных заданий
2.3.2.	Примеры решения задач.	2	2					
	Тема 2.4. Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.	**2**	**2**					
2.4.1.	Применение достаточного условия для задач с ограничениями типа равенств.	2	2					
	Тема 2.5. Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями	**2**	**2**					
2.5.1	Применение достаточного условия для задач с ограничениями типа	2	2					Контрольная работа

	равенств и неравенств. Доказательство достаточного условия.							
	Раздел 3. Линейное программирование	**10**	**8**				**2**	
	Тема 3.1. Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования	**2**	**2**					
3.1.1	Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация. Геометрический метод решения линейных задач для случая функций двух переменных.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 3.2. Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.	**2**	**1**					
3.2.1	Выпуклые множества. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости. Опорные гиперплоскости.	2	1					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 3.3. Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод	**4**	**4**					
3.1	Крайние точки множества. Невырожденные линейные задачи. Невырожденные линейные задачи.	2	2					
3.2	Начальный опорный план. Метод нахождения начального опорного плана.	2	2					
	Тема 3.4 Теория двойственности	**2**	**1**				**2**	
3.4.1	Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности	2	1				2	Контрольная работа
	Раздел 4. Выпуклые задачи оптимизации	**6**	**6**				**2**	
	Тема 4.1. Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.	**2**	**2**					
4.1.1.	Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций. Непре-	2	1					

	рывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации. Задача выпуклого программирования. Геометрический критерий оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.							
	Тема 4.2. Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.	**2**	**2**					
4.2.1.	Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 4.3. Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна-Таккера.	**2**	**2**				**2**	
4.3.1	Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна-Таккера.	2	2				2	Контрольная работа
	Всего по курсу	**34**	**28**				**6**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Список литературы

Основная литература

1. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие. – Москва: Наука, 1984.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. 2-ое издание. – Минск: Изд–во БГУ, 1981.
3. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – Москва: КомКнига, 2006.
4. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Москва: Изд–во МГУ, 1989.
5. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. – Минск: 2006.

Дополнительная литература

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. Учебное пособие. – Москва: Наука, 1981.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1980.
3. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 2005.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – Москва: Наука, 1974.
5. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. – Москва: Наука, 1986. – (Библиотечка “Квант”. Вып. 56).
6. Эльстер К.–Х. и др. Введение в нелинейное программирование. – Москва: Наука, 1985.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Классификация задач оптимизации.
2. Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации.
3. Верхний и нижний пределы числовых последовательностей и функций. Полунепрерывные функции.
4. Теоремы о существовании оптимальных решений
5. Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по направлениям, равномерная дифференцируемость по направлениям, полная производная.
6. Конус допустимых и конус касательных направлений; их основные свойства.
7. Необходимые условия локального минимума первого порядка для дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями.
8. Достаточное условие строгого локального минимума для равномерно дифференцируемых функций в общей задаче оптимизации с ограничениями.
9. Дважды вполне дифференцируемые функции.
10. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек локального минимума в общей задаче оптимизации с ограничениями.
11. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
12. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
13. Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств
14. Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.
15. Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация.
16. Выпуклые множества и их основные свойства.
17. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости.
18. Опорные гиперплоскости. Крайние точки множества.
19. Линейное программирование. Примеры задач. Основные определения и свойства. Точки экстремума в задаче линейного программирования.
20. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для замкнутого множества.
21. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для произвольного (не обязательно замкнутого) множества.
22. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделении двух множеств.
23. Выпуклый конус. Теорема об опорной гиперплоскости к выпуклому конусу.
24. Двойственный, бидвойственный конусы. Их свойства.
25. Выпуклые линейные комбинации, выпуклая оболочка.

Невырожденные линейные задачи. Начальный опорный план.

26. Графический метод решения задач линейного программирования.
27. Симлекс-метод.
28. Метод искусственного базиса (w-задача).
29. Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности.
30. Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций.
31. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
32. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
33. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации.
34. Задача выпуклого программирования. Геометрический критерий оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.
35. Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.
36. Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна-Таккера.

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Экстремумы функций одной переменной
2. Доказательство неравенств
3. Экстремумы функций нескольких переменных
4. Производная по направлению: определение, контрпримеры
5. Производная по направления.
6. Конус допустимых направлений. Необходимые условия экстремума КДН.
7. B-дифференцируемость, полная дифференцируемость. Необходимые условия экстремума через B-дифференцируемость и ККН.
8. Линейное программирование: составление задач, графический метод решения.
9. Линейное программирование: графический метод решения с параметром, метод исключения переменных
10. УСР: симплекс-метод.
11. Выпуклые функции, выпуклые множества
12. Выпуклые задачи: теорема Куна-Такера
13. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств. Метод множителей Лагранжа.
14. Гладкие задачи с ограничениями типа неравенств.
15. Смешанные гладкие задачи.
16. Доказательство неравенств.

ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Контрольная работа №1

Вариант №

1. Решить методом Лагранжа

$$\begin{cases} xy(8-x-y) \to \text{extr}, \\ x+y \le 15, \\ x \ge 1, \quad y \ge 1. \end{cases}$$

2. Решить задачу симплекс-методом, найдя начальный опорный план при помощи метода искусственного базиса:

$$\begin{cases} z = -2x_1 + 4x_2 \to \max, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 4, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Контрольная работа №2

Вариант №

1. Используя геометрические построения, решить задачу ЛП:

$$z = ax_1 + 2x_2 \to \text{extr}, \quad a \in \mathbb{R}, \qquad \Omega = \begin{cases} x_2 - x_1 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}.$$

2. Решить задачу симплекс-методом, найдя начальный опорный план при помощи метода искусственного базиса:

$$z = -2x_1 + 5x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0. \end{cases}.$$

3. Построить двойственную задачу:

$$z = 3x_1 - 5x_2 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_4 \ge 3 \\ 8x_1 - 4x_3 + 2x_4 \le -2 \\ x_3 \ge 0 \\ x_4 \le 0. \end{cases}.$$

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Математический анализ	Теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (прот. № 12 от 22.05.2015)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
на _____/_____ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры (протокол № ____ от ________ 20_ г.)

Заведующий кафедрой

_______________________ ________________ __________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_______________________ ________________ ___________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)