Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
______________А.Л. Толстик
«_27_» _07_ ______________201_5_ г.

Регистрационный № УД-_829_/уч.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 08 Математика и информационные технологии

2015г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 08 2013 и учебного плана, утвержденного 30.05.2013, регистрационный № G31-134/уч. по специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Валентин Викентьевич Гороховик, заведующий отделом нелинейного анализа Института математики НАН Беларуси, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси;

Вениамин Григорьевич Кротов, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

СОСТАВИТЕЛИ:

Андрей Владимирович Лебедев, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

Ольга Исааковна Пиндрик, доцент кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой нелинейного анализа и аналитической экономики
(протокол № 12 от 22.05.2015)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 29.06.2015)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время в обществе наблюдается рост интереса и внимания к проблемам теории управления и теории принятия оптимальных решений. Это обусловлено рядом объективных и субъективных факторов.

Научно-технический прогресс, информатизация всех сфер общественной жизни, современные глобальные процессы и проблемы человечества предъявляют новые требования к уровню образованности личности, личностному и профессиональному развитию.

Кардинально меняющиеся социальные параметры общества оказывают непосредственное влияние на все его институты, различные объединения людей, непосредственно на конкретного человека. Уходит в прошлое стиль деятельности, в решающей степени опиравшийся на командно-административные методы работы с людьми. Новые подходы к образованию лишают студентов возможности получить даже самый минимальный набор знаний и навыков, который позволял бы их считать образованными самостоятельно мыслящими гражданами. Происходят существенные изменения в каждом человеке, коллективе и обществе в целом. Неординарные и, в первую очередь, кризисные процессы настоятельно диктуют необходимость овладения будущими специалистами независимо от специальности основами теории управления и теории принятия оптимальных решений.

Основными методами изучения дисциплины «Вариационное исчисление и и методы оптимизации» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Усвоение студентами практических навыков решения различных задач оптимизации происходит на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль усвоения практических навыков осуществляется на практических занятиях в форме проверки домашних заданий, на контрольных работах и зачетах.

Цель дисциплины «Вариационное исчисление и методы

оптимизации»: повышение уровня профессиональной компетентности в решении проблем оптимизации в различных сферах трудовой деятельности.

Образовательная цель: изучение основных методов решения конечномерных задач оптимизации и методов вариационного исчисления.

Развивающая цель: расширение математического кругозора, знакомство с новыми методами доказательств, усвоение новых алгоритмов решения задач оптимизации.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации»:

– ознакомление с основными типами экстремальных задач;

– изучения необходимых и достаточных условий существования решений различных типов экстремальных задач;

– усвоение алгоритмов и методов решения различных экстремальных задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

— теоремы о существовании точек минимума (максимума) для функций на подмножествах метрических пространств;

— необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума функций на абстрактных подмножествах конечномерного векторного пространства;

— основы выпуклого анализа и методы исследования выпуклых задач оптимизации;

— теорию выпуклого и линейного программирования;

— теорию нелинейного программирования;

— основы теории дифференцирования функций и отображений, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах;

— необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального минимума (максимума) дифференцируемых функций, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах;

— теорию простейшей и изопериметрической вариационных задач;

— принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории, а также для задачи оптимального управления с ограничениями на правый конец траектории.

уметь:

— находить точки минимума и максимума для функций, определенных на конечномерных векторных пространствах;

— с помощью дифференциальных критериев выпуклости проверять является ли заданная функция выпуклой или нет;

— использовать условия оптимальности и критерий Куна-Таккера для решения задач выпуклого программирования;

— использовать симплекс-метод для решения задач линейного программирования;

— использовать условия оптимальности первого и второго порядка для решения задач нелинейного программирования;

— дифференцировать интегральные функционалы;

— составлять и решать дифференциальное уравнение Эйлера для простейшей вариационной задачи;

— составлять присоединенное уравнение Якоби и находить сопряженные точки для экстремалей простейшей вариационной задачи;

— использовать необходимое условие Вейерштрасса для исследования допустимых кривых, доставляющих сильный локальный минимум в простейшей вариационной задаче;

— использовать принцип максимума Понтрягина для исследования на оптимальность допустимых управлений в задачах оптимального управления с целевым функционалом терминального типа.

владеть:

— методами решения основных конечномерных задач оптимизации;

— методами решения вариационных и изопериметрических задач.

Каждая тема позволяет организовать творческую самостоятельную работу студентов, которая будет способствовать становлению специалиста, обладающего значительным творческим потенциалом. Содержание и формы контролируемой самостоятельной работы студентов должны соответствовать целям и задачам подготовки специалистов.

Особое внимание следует обращать на организацию индивидуальной работы студентов под руководством преподавателя. Рекомендуется разработка системы индивидуальных заданий.

В учебной программе по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации» представлены два раздела: раздел «Конечномерные экстремальные задачи» и раздел «Вариационное исчисление».

Учебная программа предназначена для студентов 3 курса (6 семестр) и 4 курса (7 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом на изучение дисциплины отводится всего 250 часов, из них 122 аудиторных часа, в том числе лекционных – 52 часа, практических занятий – 58 часов, УСР – 12 часов:

– в 6 семестре 116 часов, в том числе аудиторных занятий – 68 часов, из них лекции – 34 часа, практические занятия – 28 часов, УСР – 6 часов,

рекомендуемая форма отчетности – зачет;

– в 7 семестре 134 часа, в том числе аудиторных занятий – 54 часа, из них лекции – 18 часов, практические занятия – 30 часов, УСР – 6 часов,

рекомендуемая форма отчетности – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ I «КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ»

Глава 1. Введение

Тема 1.1.
Общая задача оптимизации.
Тема 1.2.
Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах.

Глава 2. Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.

Тема 2.1.
Общая задача оптимизации с ограничениями.
Тема 2.2.
Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
Тема 2.3.
Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
Тема 2.4.
Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.
Тема 2.5.
Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.

Глава 3. Линейное программирование

Тема 3.1.
Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.
Тема 3.2.
Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.
Тема 3.3.
Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод.
Тема 3.4
Теория двойственности.

Глава 4. Выпуклые задачи оптимизации

Тема 4.1.
Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.
Тема 4.2.
Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.
Тема 4.3.
Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна-Таккера.

РАЗДЕЛ II «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Глава 1. Введение.

Тема 1.1.

Задачи оптимизации в бесконечномерных пространствах. Задача о брахистохроне.

Глава 2. Простейшая вариационная задача.

Тема 2.1.

Сильный и слабый экстремумы в простейшей вариационной задаче.

Тема 2.2.

Вариации целевого функционала простейшей вариационной задачи.

Тема 2.3.

Необходимые условия локального минимума в простейшей вариационной задаче.

Тема 2.4.

Достаточное условия слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче**.**

Тема 2.5.

Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума в простейшей вариационной задаче**.**

Тема 2.6.

Достаточное условие сильного локального минимума в простейшей вариационной задаче.

Глава 3. Изопериметрическая вариационная задача.

Тема 3.1.

Локальный минимум в изопериметрической вариационной задаче.

Тема 3.2.

Необходимое условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.

Тема 3.3.

Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.

Глава 4. Вариационные задачи с различными условиями.

Тема 4.1.

Вариационная задача с незакрепленными концами.

Тема 4.2.

Вариационная задача со старшими производными**.**

Глава 5. Задачи оптимального управления

Тема 5.1.

Формулировка задачи оптимального управления**.**

Тема 5.2.

Необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	РАЗДЕЛ I. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ							
	Глава 1. Введение	**4**	**2**					
	Тема 1.1. Общая задача оптимизации.	**2**						
1.1.1.	Предмет курса, история, связь с другими математическими дисциплинами, значение и роль в естествознании, экономических, технических, социальных науках и их приложениях. Основные определения и понятия. Классификация задач оптимизации.	2						
	Тема 1.2. Нахождение минимумов и максимумов функций для задач безусловной оптимизации в конечномерных пространствах	**2**	**1**					
1.2.1.	Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Верхний и нижний пределы числовых последовательностей и функций. Полунепрерывные функции. Теоремы о существовании оптимальных решений	2	1					Проверка индивидуальных заданий
	Глава 2. Принцип множителей Лагранжа в конечномерных пространствах.	**14**	**12**				**2**	
	Тема 2.1. Общая задача оптимизации с ограничениями.	**4**	**2**					
2.1.1	Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по	2	1					Проверка индивидуальных

	направлениям, равномерная дифференцируемость по направлениям, полная производная. Конус допустимых и конус касательных направлений; их основные свойства. Необходимые условия локального минимума первого порядка для дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями..							заданий
2.1.2.	Достаточное условие строгого локального минимума для равномерно дифференцируемых функций в общей задаче оптимизации с ограничениями. Дважды вполне дифференцируемые функции. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек локального минимума в общей задаче оптимизации с ограни-чениями	2	1					
	Тема 2.2. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.	**2**	**2**				**2**	
2.2.1.	Формулировка принципа Лагранжа для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств. Примеры решения задач.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 2.3.Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.	**4**	**4**					
2.3.1.	Формулировка принципа Лагранжа для гладких конечномерных задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Доказательство принципа Лагранжа.	2	2				2	Контрольная работа
2.3.2.	Примеры решения задач.	2	2					
	Тема 2.4. Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств.	**2**	**2**					
2.4.1.	Применение достаточного условия для задач с ограничениями типа равенств.	2	2					
	Тема 2.5. Достаточное условие экстремума для задач со смешан-	**2**	**2**					

	ными ограничениями							
2.5.1	Применение достаточного условия для задач с ограничениями типа равенств и неравенств. Доказательство достаточного условия.	2	2					Контрольная работа
	Глава 3. Линейное программирование	**10**	**8**				**2**	
	Тема 3.1. Задача линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования	**2**	**1**					
3.1.1	Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация. Геометрический метод решения линейных задач для случая функций двух переменных.	2	1					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 3.2.Выпуклые множества, их свойства. Теоремы отделимости.	**2**	**1**					
3.2.1	Выпуклые множества. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости. Опорные гиперплоскости.	2	1					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 3.3. Крайние точки в канонической линейной задаче. Невырожденные задачи. Симплекс-метод	**2**	**4**					
3.1	Крайние точки множества. Невырожденные линейные задачи. Невырожденные линейные задачи.	1	2					
3.2	Начальный опорный план. Метод нахождения начального опорного плана. Симплекс-метод.	1	2					
	Тема 3.4 Теория двойственности	**2**	**2**				**2**	
3.4.1	Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности	2	2				2	Контрольная работа
	Глава 4. Выпуклые задачи оптимизации	**8**	**6**				**2**	
	Тема 4.1. Выпуклые функции. Задача выпуклого программирования.	**4**	**2**					
4.1.1.	Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций. Диффе-	2	1					

	ренциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации.							
4.1.2.	Задача выпуклого программирования. Геометрический критерий оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.	2	1					
	Тема 4.2. Условия оптимальности в задаче выпуклого программирования.	**2**	**2**					
4.2.1.	Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 4.3. Условие Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.	**2**	**2**				**2**	
4.3.1	Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна–Таккера.	2	2				2	Контрольная работа
	Всего за семестр	**34**	**28**				**6**	
	РАЗДЕЛ II. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ							
	Глава 1. Введение.	**2**	**2**					
	Тема 1.1. Задачи оптимизации в бесконечномерных пространствах. Задача о брахистохроне.	**2**	**2**					
1.1.1	Предмет курса, история, связь с другими математическими дисциплинами, значение и роль в естествознании, экономических, технических, социальных науках и их приложениях. Введение в вариационное исчисление. История и значение в развитии бесконечномерного анализа. Задача о брахистохроне.	2	2					
	Глава 2. Простейшая вариационная задача.	**8**	**14**				**2**	
	Тема 2.1. Сильный и слабый экстремумы в простейшей вариационной задаче	**1**	**2**					
2.1.1	Формулировка простейшей вариационной задачи. Определение сильного и слабого локальных	1	2					

	экстремумов. Нормированные пространства вектор–функций. Сравнение различных норм. Интегральные функционалы, определенные на нормированных пространствах вектор–функций.							
	Тема 2.2. Вариации целевого функционала простейшей вариационной задачи.	**2**	**4**					
2.2.1	Дифференцирование функций и отображений, определенных на нормированных пространствах. Определения первой и второй вариации Лагранжа. Производные Гато и Фреше.	1	2					
2.2.2	Билинейные функции и отображения. Дифференциальные свойства интегральных функционалов. Общий вид первой и второй вариации интегрального функционала.	1	2					
	Тема 2.3. Необходимые условия локального минимума в простейшей вариационной задаче.	**2**	**2**					
2.3.1	Условия локального минимума первого и второго порядка для функций, определенных на нормированных пространствах. Особенности достаточных условий локального минимума в бесконечномерных пространствах. Теория квадратичных форм на нормированных и гильбертовых пространствах. Необходимые условия первого и второго порядка для локального минимума простейшей вариационной задачи в терминах вариаций целевого функционала.	1	1					
2.3.2	Теория первой вариации. Интегральное и дифференциальное уравнения Эйлера. Условие Вейерштрасса-Эрдмана. Теорема Гильберта. Теория второй вариации. Условия неотрицательности (положительности) квадратичного	1	1					

	интегрального функционала на пространствах вектор-функций. Необходимое условие Лежандра. Необходимое условие Якоби.							
	Тема 2.4. Достаточное условия слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче.	**1**	**2**					
2.4.1	Использование достаточного условия Якоби слабого локального минимума в простейших вариационных задачах.	1	2					
	Тема 2.5. Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума в простейшей вариационной задаче.	**1**	**2**					
2.5.1	Применение необходимого условия Вейерштрасса для проверки допустимой экстремали на наличие на ней экстремума интегрального функционала.	1	2					
	Тема 2.6. Достаточное условие сильного локального минимума в простейшей вариационной задаче.	**1**	**2**				**2**	
2.6.1	Обоснование наличия или отсутствия сильного экстремума с помощью достаточного условия экстремума.	1	2				2	Контрольная работа
	Глава 3. Изопериметрическая вариационная задача.	**3**	**6**				**2**	
3.1.1	**Тема 3.1.** Локальный минимум в изопериметрической вариационной задаче.	**1**	**2**					
3.1.2	Формулировка изопериметрической вариационной задачи. Условия нормальности допустимой кривой.	1	2					
	Тема 3.2. Необходимое условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.	**1**	**2**					
3.2.1	Необходимые условия первого порядка для локального минимума в изопериметрической вариационной задаче.	1	2					
	Тема 3.3. Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.	**1**	**2**				**2**	Контрольная работа
3.3.1	Применение достаточного условия	1	2				2	

	минимума к простейшим изопериметрическим задачам.							
	Глава 4. Вариационные задачи с различными условиями.	**2**	**4**					
	Тема 4.1. Вариационная задача с незакрепленными концами.	**1**	**2**					
4.1.1	Необходимые условия первого порядка для локального минимума в вариационной задаче с незакрепленными концами. Условие трансверсальности.	1	2					
	Тема 4.2. Вариационная задача со старшими производными.	**1**	**2**					
4.2.1	Уравнения Эйлера-Пуассона в вариационной задаче со старшими производными.	1	2					
	Глава 5. Задачи оптимального управления	**3**	**4**				**2**	
	Тема 5.1. Формулировка задачи оптимального управления.	**1**	**2**					
5.1.1	Общее понятие системы управления. Системы управления, заданные обыкновенными дифференциальными уравнениями. Линейные системы управления. Формула Коши. Множество достижимости системы управления.	1	2					
	Тема 5.2. Необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления.	**2**	**2**				**2**	
5.2.1	Задачи оптимального управления как неклассические вариационные задачи. Различные типы целевого функционала в задачах оптимального управления, их эквивалентность. Задача оптимального управления со свободным правым концом траектории. Необходимое условие Эйлера для оптимальных процессов задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории. Игольчатые вариации допустимых процессов (допустимых управлений и допустимых траекторий) в задачах оптимального управления.	1	1					

5.2.2	Принцип максимума Понтрягина — необходимое условие оптимальности процессов в нелинейных задачах оптимального управления. Достаточность принципа максимума Понтрягина в линейных задачах оптимального управления. Задача оптимального управления с ограничениями на правый конец траектории. Принцип максимума и условие трансверсальности в задаче оптимального управления с ограничениями на правый конец траектории.	1	1				2	Контрольная работа
	Всего за семестр	**18**	**30**				**6**	
	Всего	**52**	**58**				**12**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Список литературы

Основная литература

1. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие. – Москва: Наука, 1984.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. 2-ое издание. – Минск: Изд–во БГУ, 1981.
3. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – Москва: КомКнига, 2006.
4. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Москва: Изд-во МГУ, 1989.
5. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. – Минск: 2006.

Дополнительная литература

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. Учебное пособие. – Москва: Наука, 1981.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1980.
3. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 2005.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – Москва: Наука, 1974.
5. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. – Москва: Наука, 1986. – (Библиотечка “Квант”. Вып. 56).
6. Эльстер К.–Х. и др. Введение в нелинейное программирование.– Москва: Наука, 1985.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

РАЗДЕЛ I. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Классификация задач оптимизации.
2. Необходимые условия экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации. Достаточное условие экстремума в конечномерной задаче безусловной оптимизации.
3. Верхний и нижний пределы числовых последовательностей и функций. Полунепрерывные функции.
4. Теоремы о существовании оптимальных решений
5. Локальный и глобальный минимумы. Дифференцируемость по направлениям, равномерная дифференцируемость по направлениям, полная производная.
6. Конус допустимых и конус касательных направлений; их основные свойства.
7. Необходимые условия локального минимума первого порядка для дифференцируемых и равномерно дифференцируемых по направлениям функций в задаче оптимизации с ограничениями.
8. Достаточное условие строгого локального минимума для равномерно дифференцируемых функций в общей задаче оптимизации с ограничениями.
9. Дважды вполне дифференцируемые функции.
10. Необходимые, а также достаточные условия второго порядка для точек локального минимума в общей задаче оптимизации с ограничениями.
11. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств.
12. Принцип Лагранжа для задач с ограничениями типа равенств и неравенств.
13. Достаточное условие экстремума для задач с ограничениями типа равенств
14. Достаточное условие экстремума для задач со смешанными ограничениями.
15. Формулировка задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация.
16. Выпуклые множества и их основные свойства.
17. Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости.
18. Опорные гиперплоскости. Крайние точки множества.
19. Линейное программирование. Примеры задач. Основные определения и свойства. Точки экстремума в задаче линейного программирования.
20. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для замкнутого множества.
21. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделяющей гиперплоскости для произвольного (не обязательно замкнутого) множества.
22. Отделяющая, опорная гиперплоскость. Теорема об отделении двух множеств.
23. Выпуклый конус. Теорема об опорной гиперплоскости к выпуклому конусу.
24. Двойственный, бидвойственный конусы. Их свойства.
25. Выпуклые линейные комбинации, выпуклая оболочка.

Невырожденные линейные задачи. Начальный опорный план.

26. Графический метод решения задач линейного программирования.
27. Симлекс-метод.
28. Метод искусственного базиса (w-задача).
29. Двойственная задача линейного программирования. Теорема двойственности.
30. Выпуклые функции и их простейшие свойства. Непрерывность выпуклых функций.
31. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
32. Непрерывность выпуклых функций. Дифференциальные свойства выпуклых функций. Дифференциальные критерии выпуклости функций.
33. Критерий оптимальности решений выпуклой задачи оптимизации.
34. Задача выпуклого программирования. Геометрический критерий оптимальности решений в задаче выпуклого программирования.
35. Условия оптимальности для решений задачи выпуклого программирования.
36. Условие регулярности Слейтера и критерий оптимальности Куна-Таккера.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ
РАЗДЕЛ II «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

37. Задача о брахистохроне.
38. Формулировка простейшей вариационной задачи. Определение сильного и слабого локальных экстремумов.
39. Нормированные пространства вектор-функций. Сравнение различных норм.
40. Интегральные функционалы, определенные на нормированных пространствах вектор-функций.
41. Дифференцирование функций и отображений, определенных на нормированных пространствах. Определения первой и второй вариации Лагранжа. Производные Гато и Фреше.
42. Дифференциальные свойства интегральных функционалов. Общий вид первой и второй вариации интегрального функционала.
43. Условия локального минимума первого и второго порядка для функций, определенных на нормированных пространствах. Особенности достаточных условий локального минимума в бесконечномерных пространствах.
44. Необходимые условия первого и второго порядка для локального минимума простейшей вариационной задачи в терминах вариаций целевого функционала**.**
45. Теория первой вариации. Интегральное и дифференциальное уравнения Эйлера.
46. Условие Вейерштрасса-Эрдмана.
47. Теорема Гильберта.
48. Теория второй вариации. Условия неотрицательности (положительности) квадратичного интегрального функционала на пространствах вектор-

функций.
49. Необходимое условие Лежандра.
50. Необходимое условие Якоби.
51. Достаточное условие Якоби слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче.
52. Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума в простейшей вариационной задаче без доказательства).
53. Формулировка изопериметрической вариационной задачи. Условия нормальности допустимой кривой.
54. Необходимые условия первого порядка для локального минимума в изопериметрической вариационной задаче.
55. Достаточное условие минимума в изопериметрической вариационной задаче.
56. Необходимые условия первого порядка для локального минимума в вариационной задаче с незакрепленными концами. Условие трансверсальности.
57. Уравнения Эйлера-Пуассона в вариационной задаче со старшими производными.
58. Задачи оптимального управления как неклассические вариационные задачи. Различные типы целевого функционала в задачах оптимального управления, их эквивалентность.
59. Необходимое условие Эйлера для оптимальных процессов задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории.
60. Игольчатые вариации допустимых процессов (допустимых управлений и допустимых траекторий) в задачах оптимального управления.
61. Принцип максимума Понтрягина — необходимое условие оптимальности процессов в нелинейных задачах оптимального управления.
62. Задача оптимального управления с ограничениями на правый конец траектории.
63. Принцип максимума и условие трансверсальности в задаче оптимального управления с ограничениями на правый конец траектории.

ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ДЛЯ РАЗДЕЛА I «КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ»

1. Экстремумы функций одной переменной
2. Доказательство неравенств
3. Экстремумы функций нескольких переменных
4. Производная по направлению: определение, контрпримеры
5. Производная по направления.
6. Конус допустимых направлений. Необходимые условия экстремума КДН.
7. В-дифференцируемость, полная дифференцируемость. Необходимые условия экстремума через В-дифференцируемость и ККН.
8. Линейное программирование: составление задач, графический метод решения.
9. Линейное программирование: графический метод решения с параметром, метод исключения переменных
10. УСР: симплекс-метод.
11. Выпуклые функции, выпуклые множества
12. Выпуклые задачи: теорема Куна-Такера
13. Гладкие задачи с ограничениями типа равенств. Метод множителей Лагранжа.
14. Гладкие задачи с ограничениями типа неравенств.
15. Смешанные гладкие задачи.
16. Доказательство неравенств.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Математический анализ	Теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (прот. № 12 от 22.05.2015)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
на _____/_____ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № ____ от ________ 20_ г.)

Заведующий кафедрой

_______________________ ________________ __________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_______________________ ________________ ___________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)