

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

« 25 » _____ А.Л. Толстик 2015 г.

Регистрационный № _____ 825 /уч.



ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности**

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

2015г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 09 - 2013 и учебного плана, утвержденного 30.05.2013, регистрационный № G31-137/уч. по специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

СОСТАВИТЕЛИ:

Алехно Егор Александрович, доцент кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Лебедев Андрей Владимирович, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой нелинейного анализа и аналитической экономики
(протокол № 12 от 22.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета
Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 26.05.2015)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время методы исследования операций широко применяются в самых различных областях человеческой деятельности. В нашей стране теоретическим и практическим применениям методов исследования операций придается исключительно большое значение, о чем свидетельствует значительное количество публикаций по этим вопросам.

Исследование операций как самостоятельное научное направление возникло из потребностей наилучшей организации боевых действий, а также прогнозирования их исхода при принятии командованием различных решений. С помощью методов исследования операций можно планировать стратегические и тактические операции, в частности, в условиях неполного знания о состоянии вооруженных сил противника.

Математические методы этой науки первоначально использовались при проектировании авиационных, ракетных и космических комплексов. Основу математического аппарата проектирования составляют линейное и нелинейное программирование, способы принятия решений, теория массового обслуживания и теория игр.

После второй мировой войны методы исследования операций получили широкое применение при перспективном и текущем планировании научно-исследовательских работ, проектировании различных объектов, управлении производственными и технологическими процессами, прогнозировании развития отдельных отраслей промышленности и сельского хозяйства. Особенно часто к ним обращаются при решении задач распределения трудовых ресурсов и запасов, назначения сроков профилактического ремонта оборудования, выбора средств транспортировки грузов, составления графиков перевозок, размещения новых заводов и складов, сбора информации в автоматизированных системах управления и целого ряда других. Следует отметить, что при решении таких задач наряду со строгим математическим аппаратом программирования, теории графов, потоков в сетях и оптимального управления применяются эвристические методы, основанные на интуиции разработчиков.

Основными методами изучения дисциплины «Исследования операций» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентам практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, а также на контрольных работах и зачетах.

Цель учебной дисциплины

Основной целью учебной дисциплины «Исследование операций» является повышение уровня профессиональной компетентности в исследовании проблем

оптимизации сложной организационной деятельности и разрешении конфликтных ситуаций в социальных и производственных структурах.

Образовательная цель: изложение методов разработки алгоритмов оптимизации в задачах управления сложными технологическими процессами.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, построение математических моделей сложных технологических процессов и изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Исследование операций»:

- анализ оптимизационных алгоритмов задач исследования операций;
- практическое использование алгоритмов при моделировании сложных технологических процессов.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия и теоремы теории графов и теории игр;
- основные понятия и теоремы динамического программирования и теории расписаний.

уметь:

- применять теорию графов и теорию игр для решения практических задач;
- составлять сетевые модели;
- пользоваться методами динамического программирования;

владеть:

- методами решения экстремальных задач теории графов;
- методами исследования сетевых моделей.

Учебная программа предназначена для студентов 4 курса (7 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 62 часов, в том числе аудиторных занятий – 36 часов, из них лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 14 часов, УСП – 4 часа. Рекомендуемая форма отчетности – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Введение

Предмет исследования операций, содержание курса исследования операций.

Раздел 1. Экстремальные задачи на графах

Тема 1.1.

Примеры экстремальных задач на графах:

Тема 1.2.

Неориентированные графы.

Тема 1.3.

Эйлеровы циклы.

Тема 1.4.

Леса и деревья.

Тема 1.5.

Ориентированные графы. Алгоритмы Дейкстры и Флойда.

Тема 1.6.

Сети, потоки, разрезы

Тема 1.7.

Сети с ограниченными пропускными способностями дуг и допустимые потоки.

Тема 1.8.

Задача о нахождении допустимого потока максимальной мощности. Алгоритм Форда–Фалкерсона.

Тема 1.9.

Задача о построении потока минимальной стоимости. Критерий оптимальности.

Тема 1.10.

Алгоритмы Басакера–Гоуэна и Клейна.

Тема 1.11.

Задача коммивояжера. Алгоритм Литгла.

Тема 1.12.

Календарное планирование.

Раздел II. Теория игр

Тема 2.1.

Элементарные понятия теории игр. Матричные и биматричные игры.

Тема 2.2.

Отношения предпочтения и оптимумы.

Тема 2.3.

Несущественные игры.

Тема 2.4.

Седловые точки и цена игры.

Тема 2.5.

Правила принятия решений. Теоремы о неподвижной точке.

Тема 2.6.

Канонические правила принятия решений и равновесия по Нэшу.

Тема 2.7.

Смешанные расширения конечных игр.

Тема 2.8.

Методы поиска седловых точек и равновесий по Нэшу в смешанных расширениях.

Тема 2.9.

Смешанные расширения бесконечных игр.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Раздел 1. Экстремальные задачи на графах	12	8					
	Тема 1.1. Примеры экстремальных задач на графах	0,5						
1.1.1.	История возникновения экстремальных задач теории графов. Задача о Кенигсбергских мостах, задача о четырех красках							
	Тема 1.2. Неориентированные графы.	0,5	0,5					
1.2.1.	Псевдо- и мультиграфы, смежные и инцидентные вершины и ребра, степень вершины. Лемма о четности числа вершин с нечетной степенью. Маршруты, цепи, простые цепи, циклы. Выделение из маршрута простой цепи с теми же концами. Лемма о существовании цикла. Связные графы, подграфы. Разбиение графа на связные компоненты.	0,5	0,5					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.3. Эйлеровы циклы	0,5	0,5					
1.3.1.	Критерий существования эйлерова цикла. Алгоритм построения эйлерова цикла.	0,5	0,5					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.4. Леса и деревья.	0,5	0,5					
1.4.1	Критерии графа быть деревом. Остовное дерево. Задача о построении остовного дерева минимального веса. Алгоритм Прима, его корректность. Алгоритм Краскала и его корректность.	0,5	0,5					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.5. Ориентированные графы. Алгоритмы Дijkstra и	1	0,5					

	Флойда.						
1.5.1.	Маршруты, цепи, циклы, пути, контуры. Выделение из ориентированного маршрута пути с теми же концами. Задача о нахождении кратчайшего пути между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры, его корректность. Задача о поиске всех кратчайших путей в графе. Алгоритм Флойда, его корректность. Нахождение циклов отрицательной длины. Задача об узких местах.	1	0,5				Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.6. Сети, потоки, разрезы	2	0,5				
1.6.1.	Сети, источники, стоки, полюса. Дивергенция, поток, циркуляция. Мощность потока. Разрез, дивергенция на разрезе. Лемма о совпадении мощности потока с его дивергенцией на разрезе. Элементарные потоки. Теоремы о разложении положительных циркуляций и потоков на элементарные циркуляции и потоки.	2	0,5				Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.7. Сети с ограниченными пропускными способностями дуг и допустимые потоки.	1	0,5				
1.7.1.	Пропускная способность разреза. Лемма о мощности потока и пропускной способности разреза. Увеличивающие элементарные цепи и потоки. Теорема Форда–Фалкерсона (критерий максимальности потока).	1	0,5				Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.8. Задача о нахождении допустимого потока максимальной мощности. Алгоритм Форда–Фалкерсона.	1	2				
1.8.1.	Допустимый поток. Алгоритм Форда-Фалкерсона. Конечность данного алгоритма для сетей с рациональными пропускными способностями дуг.	1	2				Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.9. Задача о построении	1	1				

	потока минимальной стоимости. Критерий оптимальности.							
	Графы модифицированных стоимостей. Взаимосвязи между допустимыми потоками в исходной сети и в графе модифицированных стоимостей. Критерий оптимальности допустимого потока.	1	1					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.10. Алгоритмы Басакера–Гоуэна и Клейна.	1	0,5					
	Алгоритм Басакера–Гоуэна для построения потока минимальной стоимости среди потоков заданной мощности. Теорема о его корректности.	1	0,5					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.11. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.	2	1					
1.11.1.	Гамильтоновы циклы. Метод ветвей и границ. Алгоритм Литтла: операции приведения и стягивания матрицы расстояний, константы приведения и штрафы, оценки длин гамильтоновых циклов, исключение частичных циклов.	2	1					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 1.12. Календарное планирование	1	1					
1.12.1.	Постановка задачи, основные этапы решения. Построение сетевой модели, ранжирование, нахождение критических путей. Критерий пути быть критическим. Свободный резерв времени, полный резерв времени. Построение календарного графика работ и распределения трудовых ресурсов. Оптимизация календарного графика.	1	1					Контрольная работа
	Раздел II. Теория игр	6	6				2	
	Тема 2.1. Элементарные понятия теории игр.	0,5	0,5					

	Матричные и биматричные игры.							
2.1.1.	Стратегии, исходы, функции выигрыша, игры в нормальной форме, игры двух лиц, игры с нулевой суммой.	0,5	0,5					
	Тема 2.2. Отношения предпочтения и оптимумы.	0,5	0,5					
2.2.1.	Доминирующие и недоминируемые стратегии, их существование. Условия эквивалентности недоминируемых стратегий. Гарантированный выигрыш, осторожные стратегии. Существование недоминируемых осторожных стратегий. Оптимальность по Парето и существование оптимумов по Парето.	0,5	0,5					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 2.3. Несущественные игры.	0,5	1					
2.3.1.	Оптимумы по Парето и осторожные стратегии в них. Игра двух лиц с нулевой суммой. Нижняя и верхняя цена игры, связь между ними. Цена игры. Взаимосвязь между играми, имеющими цену, и несущественными играми.	0,5	1					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 2.4. Седловые точки и цена игры.	0,5	1					
2.4.1.	Взаимозаменяемость седловых точек. Теорема Фон Неймана о минимаксе.	0,5	1					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 2.5. Правила принятия решений. Теоремы о неподвижной точке.	1						
2.5.1.	Согласованные стратегии. Теоремы Боля–Брауэра и Какутани о неподвижной точке.	1						
	Тема 2.6. Канонические правила принятия решений и равновесия по Нэшу.	1	1					
2.6.1.	Теорема Нэша. Взаимоотношения	1	0,5					Проверка

	между равновесиями по Нэшу, равновесиями в недоминируемых стратегиях, равновесиями в осторожных стратегиях, оптимумами по Парето. Индивидуально рациональные исходы.							индивидуальных заданий
	Тема 2.7. Смешанные расширения конечных игр.	0,5	1					
2.7.1.	Существование седловой точки и цены в смешанном расширении матричной игры. Существование равновесий по Нэшу в смешанном расширении биматричной игры.	0,5	1					Проверка индивидуальных заданий
	Тема 2.8. Методы поиска седловых точек и равновесий по Нэшу в смешанных расширениях	1	1					
2.8.1.	Методы поиска седловых точек в смешанных расширениях матричных игр и равновесий по Нэшу в смешанных расширениях биматричных игр.	1	1					
	Тема 2.9. Смешанные расширения бесконечных игр.	0,5						
2.9.1.	Теорема о существовании равновесий по Нэшу в смешанном расширении бесконечных игр	0,5						Контрольная работа
	Всего по курсу	18	14				4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Полный конспект лекций доступен по адресу

<http://elib.bsu.by/handle/123456789/12990>.

Список литературы

Основная литература

1. Бахтин В.И., Коваленок А.П., Лебедев А.В., Лысенко Ю.В. Исследование операций. – Минск, БГУ, 2003
2. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. 1977.
3. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. 1974.

Дополнительная литература

1. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. 1974.
2. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. 1966.
3. Харари Ф. Теория графов. 1973.
4. Оре О. Теория графов. 1980.
5. Мулен Р. Теория игр и экономические приложения. 1979.
6. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. 1970.
7. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. 1961.
8. Оуэн Г. Теория игр. 1971.
9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., Высшая школа, 1998.

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Графы. Маршруты, цепи, циклы, связные компоненты.
2. Три леммы о неориентированных графах.
3. Эйлеровы графы. Теорема Эйлера.
4. Алгоритм построения эйлерова цикла.
5. Деревья и их свойства.
6. Остовные деревья. Алгоритм Прима и его обоснование.
7. Алгоритм Краскала и его обоснование.
8. Ориентированные графы, маршруты, цепи, пути, циклы, контуры.
9. Алгоритм Дейкстры и его обоснование.
10. Алгоритм Флойда и его обоснование.
11. Нахождение контуров отрицательной длины.
12. Сети, потоки, разрезы. Леммы о дивергенции и мощности потока.
13. Элементарные потоки. Разложение циркуляции на элементарные потоки.
14. Разложение потока на элементарные потоки.
15. Допустимые потоки. Лемма о мощности допустимого потока.
16. Увеличивающие цепи и теорема Форда–Фалкерсона.
17. Алгоритм Форда–Фалкерсона.
18. Потоки минимальной стоимости. Действия над потоками в исходной сети и в графе модифицированных стоимостей.
19. Критерий оптимальности допустимого потока.
20. Алгоритм Басакера–Гоуэна и его обоснование.
21. Алгоритм Клейна.
22. Метод ветвей и границ.
23. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.
24. Сетевое планирование. Работы, события, алгоритм построения сетевой модели, ранжирование событий.
25. Минимальный и максимальный сроки наступления событий, их свойства. Критический путь. Свободный и полный резерв времени.
26. Игры (бескоалиционные, матричные, биматричные).
27. Доминирующие и недоминируемые стратегии. Их существование.
28. Осторожные стратегии и их существование. Гарантированный выигрыш.
29. Оптимальные по Парето исходы, их существование.
30. Несущественные игры, их свойства.
31. Игра двух лиц с нулевой суммой. Нижняя и верхняя цена игры. Связь цены игры с несущественностью.
32. Цена игры и седловые точки. Свойства седловых точек.
33. Теорема фон Нойманна.
34. Правила принятия решений и равновесия. Теоремы о неподвижной точке.
35. Канонические правила принятия решений. Равновесия по Нэшу и теорема Нэша.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №1

1. Найти кратчайшие пути от вершины S до всех остальных вершин.
2. Построить максимальный поток и указать минимальный разрез в сети.
3. Построить поток мощности m минимальной стоимости с помощью алгоритма Клейна. Доказать, что стоимость минимальна.
4. Докажите, что положительный поток положительной мощности можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и вдоль путей, идущих от источника к стоку (считая, что в сети один источник и один сток)

Контрольная работа №2

ВАРИАНТ № 1

1. Найти все решения задачи коммивояжера, определяемой матрицей стоимостей

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 4 & \infty & 5 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 5 & \infty & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

2. Построить сетевую модель, найти критический путь и построить график распределения трудовых ресурсов.

№	Каким работам предшествует	Сроки выполнения	Потребность в рабочей силе
1	2	9	6
2	—	5	9
3	6, 10, 11	7	4
4	3, 5	5	7
5	6, 11	6	5
6	2	7	5
7	6, 10, 11	8	4
8	6, 10, 11	5	3
9	1, 8	3	8
10	2	9	3
11	—	8	8

3. В условиях предыдущей задачи
 - а) оптимизировать распределение трудовых ресурсов;
 - б) составить оптимальный график работ, при котором потребность в рабочей силе не превосходит 17.
4. Доказать, что если мощность потока f в сети положительна, то его можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и путей, ведущих из s в t .

Контрольная работа №3

ВАРИАНТ

Задача 1. Найти решение игры

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Задача 2. Найти множество недоминируемых стратегий игрока A , если множество его стратегий $X = [-4, 0]$, множество стратегий игрока B есть $Y = \{0, 1\}$, а функция выигрыша игрока A есть

$$u_A(x, y) = 10y \cos x + 5(1 - y) \sin x.$$

Задача 3. Найти равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях в биматричной игре

$$\begin{bmatrix} (2; 2) & (5; 1) \\ (9; 3) & (4; 4) \end{bmatrix}$$

Задача 4. Дана биматричная игра. Найти: а) равновесия по Нэшу в чистых стратегиях; б) равновесия по Парето; в) осторожные стратегии каждого игрока; г) недоминируемые стратегии каждого игрока. Вычислить минимальные гарантированные выигрыши каждого игрока.

$$\begin{bmatrix} (5; 7) & (5; 4) & (6; 5) \\ (5; 3) & (2; 4) & (4; 3) \\ (3; 3) & (8; 5) & (3; 2) \end{bmatrix}$$

Задача 5. Задана игра двух лиц $G = (X, Y, u_1, u_2)$, где X, Y — компактные множества и функции u_1, u_2 непрерывны. Будут ли замкнуты множества ND_i недоминируемых стратегий i -го игрока?

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
на ____/____ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № ____ от _____ 20_ г.)

Заведующий кафедрой

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)