

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

А.Л. Толстик

2015 г.

Регистрационный № Д-820 /уч.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности**

**1-31 03 01 Математика (по направлениям)**

**Направление специальности 1-31 03 01-03**

**Математика (экономическая деятельность)**

2015г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01 -2013 и учебного плана, утвержденного 30.05.2013, регистрационный № G31-139/уч. по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) направление специальности 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность).

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Виктор Иванович Бахтин**, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Андрей Владимирович Лебедев**, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Ольга Исаковна Пиндрик**, доцент кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой нелинейного анализа и аналитической экономики  
(протокол № 12 от 22.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета  
Белорусского государственного университета  
(протокол № 6 от 26.05.2015)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время методы исследования операций широко применяются в самых различных областях человеческой деятельности. В нашей стране теоретическим и практическим применениям методов исследования операций придается исключительно большое значение, о чем свидетельствует значительное количество публикаций по этим вопросам.

Исследование операций как самостоятельное научное направление возникло из потребностей наилучшей организации боевых действий, а также прогнозирования их исхода при принятии командованием различных решений. С помощью методов исследования операций можно планировать стратегические и тактические операции, в частности, в условиях неполного знания о состоянии вооруженных сил противника.

Математические методы этой науки первоначально использовались при проектировании авиационных, ракетных и космических комплексов. Основу математического аппарата проектирования составляют линейное и нелинейное программирование, способы принятия решений, теория массового обслуживания и теория игр.

После второй мировой войны методы исследования операций получили широкое применение при перспективном и текущем планировании научно-исследовательских работ, проектировании различных объектов, управлении производственными и технологическими процессами, прогнозировании развития отдельных отраслей промышленности и сельского хозяйства. Особенно часто к ним обращаются при решении задач распределения трудовых ресурсов и запасов, назначения сроков профилактического ремонта оборудования, выбора средств транспортировки грузов, составления графиков перевозок, размещения новых заводов и складов, сбора информации в автоматизированных системах управления и целого ряда других. Следует отметить, что при решении таких задач наряду со строгим математическим аппаратом программирования, теории графов, потоков в сетях и оптимального управления применяются эвристические методы, основанные на интуиции разработчиков.

Основными методами изучения дисциплины «Исследования операций» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентам практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, а также на контрольных работах и зачетах.

### **Цель учебной дисциплины**

Основной целью учебной дисциплины «Исследование операций» является повышение уровня профессиональной компетентности в исследовании проблем

оптимизации сложной организационной деятельности и разрешении конфликтных ситуаций в социальных и производственных структурах.

**Образовательная цель:** изложение методов разработки алгоритмов оптимизации в задачах управления сложными технологическими процессами.

**Развивающая цель:** формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, построение математических моделей сложных технологических процессов и изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

**Основные задачи,** решаемые в рамках изучения дисциплины «Исследование операций»:

- анализ оптимизационных алгоритмов задач исследования операций;
- практическое использование алгоритмов при моделировании сложных технологических процессов.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

**знать:**

- основные понятия и теоремы теории графов и теории игр;
- основные понятия и теоремы динамического программирования и теории расписаний.

**уметь:**

- применять теорию графов и теорию игр для решения практических задач;

- составлять сетевые модели;

- пользоваться методами динамического программирования;

**владеть:**

- методами решения экстремальных задач теории графов;

- методами исследования сетевых моделей.

Учебная программа предназначена для студентов 3 курса (6 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 144 часа, в том числе аудиторных занятий – 68 часа, из них лекции – 34 часов, лабораторные занятия – 28 часов, УСП – 6 часов. Рекомендуемая форма отчетности – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## **Введение**

Предмет исследования операций, содержание курса исследования операций.

## **Раздел 1. Экстремальные задачи на графах**

### **Тема 1.1.**

Примеры экстремальных задач на графах:

### **Тема 1.2.**

Неориентированные графы.

### **Тема 1.3.**

Эйлеровы циклы.

### **Тема 1.4.**

Леса и деревья.

### **Тема 1.5.**

Ориентированные графы. Алгоритмы Дейкстры и Флойда.

### **Тема 1.6.**

Сети, потоки, разрезы

### **Тема 1.7.**

Сети с ограниченными пропускными способностями дуг и допустимые потоки.

### **Тема 1.8.**

Задача о нахождении допустимого потока максимальной мощности. Алгоритм Форда-Фалкерсона.

### **Тема 1.9.**

Задача о построении потока минимальной стоимости. Критерий оптимальности.

### **Тема 1.10.**

Алгоритмы Басакера-Гоуэна и Клейна.

### **Тема 1.11.**

Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.

### **Тема 1.12.**

Календарное планирование.

## **Раздел II. Теория игр**

### **Тема 2.1.**

Элементарные понятия теории игр. Матричные и биматричные игры.

### **Тема 2.2.**

Отношения предпочтения и оптимумы.

### **Тема 2.3.**

Несущественные игры.

### **Тема 2.4.**

Седловые точки и цена игры.

### **Тема 2.5.**

Правила принятия решений. Теоремы о неподвижной точке.

**Тема 2.6.**

Канонические правила принятия решений и равновесия по Нэшу.

**Тема 2.7.**

Смешанные расширения конечных игр.

**Тема 2.8.**

Методы поиска седловых точек и равновесий по Нэшу в смешанных расширениях.

**Тема 2.9.**

Смешанные расширения бесконечных игр.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<b>Раздел 1. Экстремальные задачи на графах</b>	<b>22</b>			<b>18</b>		<b>4</b>	
	<b>Тема 1.1. Примеры экстремальных задач на графах</b>	<b>2</b>			<b>2</b>			
1.1.1.	История возникновения экстремальных задач теории графов.	1			1			
1.1.2.	Задача о Кенигсбергских мостах, задача о четырех красках	1			1			
	<b>Тема 1.2. Неориентированные графы.</b>	<b>2</b>			<b>2</b>			
1.2.1.	Псевдо- и мультиграфы, смежные и инцидентные вершины и ребра, степень вершины. Лемма о четности числа вершин с нечетной степенью. Маршруты, цепи, простые цепи, циклы. Выделение из маршрута простой цепи с теми же концами. Лемма о существовании цикла. Связные графы, подграфы. Разбиение графа на связные компоненты.	1			1			Проверка индивидуальных заданий
1.2.2.	Лемма о существовании цикла. Связные графы, подграфы. Разбиение графа на связные компоненты.	1			1			
	<b>Тема 1.3. Эйлеровы циклы</b>	<b>1</b>			<b>1</b>			
1.3.1.	Критерий существования эйлерова цикла. Алгоритм построения эйлерова цикла.	1			1			Проверка индивидуальных заданий
1.4.1.	<b>Тема 1.4. Леса и деревья.</b>	<b>2</b>			<b>1</b>			
	Критерии графа быть деревом. Остовное дерево. Задача о построении остовного дерева минимального веса. Алгоритм Прима, его корректность. Алгоритм Краскала	2			1			Проверка индивидуальных заданий

	и его корректность.						
	<b>Тема 1.5. Ориентированные графы. Алгоритмы Дейкстры и Флойда.</b>	2			2		
1.5.1.	Маршруты, цепи, циклы, пути, контуры. Выделение из ориентированного маршрута пути с теми же концами. Задача о нахождении кратчайшего пути между двумя заданными вершинами. Алгоритм Дейкстры, его корректность. Задача о поиске всех кратчайших путей в графе.	1			1		Проверка индивидуальных заданий
	Алгоритм Флойда, его корректность. Нахождение циклов отрицательной длины. Задача об узких местах.	1			1		
	<b>Тема 1.6. Сети, потоки, разрезы</b>	2			2		
1.6.1.	Сети, источники, стоки, полюса. Дивергенция, поток, циркуляция. Мощность потока. Разрез, дивергенция на разрезе. Лемма о совпадении мощности потока с его дивергенцией на разрезе.	1			1		Проверка индивидуальных заданий
1.6.2.	Элементарные потоки. Теоремы о разложении положительных циркуляций и потоков на элементарные циркуляции и потоки.	1			1		
	<b>Тема 1.7. Сети с ограниченными пропускными способностями дуг и допустимые потоки.</b>	2			1		
1.7.1.	Пропускная способность разреза. Лемма о мощности потока и пропускной способности разреза. Увеличивающие элементарные цепи и потоки. Теорема Форда–Фалкерсона (критерий максимальной мощности потока).	2			1		Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 1.8. Задача о нахождении допустимого потока максимальной мощности. Алгоритм Форда–Фалкерсона.</b>	2			1	2	
1.8.1.	Конечность данного алгоритма для сетей с рациональными про-	2			1	2	Контрольная работа



	пускными способностями дуг.						
	<b>Тема 1.9. Задача о построении потока минимальной стоимости. Критерий оптимальности.</b>	2			1		
	Графы модифицированных стоимостей. Взаимосвязи между допустимыми потоками в исходной сети и в графе модифицированных стоимостей. Критерий оптимальности допустимого потока.	2			1		Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 1.10. Алгоритмы Басакера–Гоуэна и Клейна.</b>	2			1		
	Алгоритм Басакера–Гоуэна для построения потока минимальной стоимости среди потоков заданной мощности. Теорема о его корректности.	2			1		Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 1.11. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.</b>	2			2		
1.11.1.	Гамильтоновы циклы. Метод ветвей и границ. Алгоритм Литтла: операции приведения и стягивания матрицы расстояний, константы приведения и штрафы, оценки длин гамильтоновых циклов, исключение частичных циклов.	2			2		Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 1.12. Календарное планирование</b>	2			2	2	
1.12.1.	Постановка задачи, основные этапы решения. Построение сетевой модели, ранжирование, нахождение критических путей. Критерий пути быть критическим. Свободный резерв времени, полный резерв времени. Построение календарного графика работ и распределения трудовых ресурсов. Оптимизация календарного графика.	2			2	2	Контрольная работа
	<b>Раздел II. Теория игр</b>	12			10	2	
	<b>Тема 2.1. Элементарные понятия теории игр. Матричные и биматричные игры.</b>	1			1		
2.1.1.	Стратегии, исходы, функции вы-	1			1		

	игрыша, игры в нормальной форме, игры двух лиц, игры с нулевой суммой.						
	<b>Тема 2.2. Отношения предпочтения и оптимумы.</b>	<b>1</b>			<b>1</b>		
2.2.1.	Доминирующие и недоминируемые стратегии, их существование. Условия эквивалентности недоминируемых стратегий. Гарантированный выигрыш, осторожные стратегии. Существование недоминируемых осторожных стратегий. Оптимальность по Парето и существование оптимумов по Парето.	1			1		Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 2.3. Несущественные игры.</b>	<b>1</b>			<b>1</b>		
2.3.1.	Оптимумы по Парето и осторожные стратегии в них. Игра двух лиц с нулевой суммой. Нижняя и верхняя цена игры, связь между ними. Цена игры. Взаимосвязь между играми, имеющими цену, и несущественными играми.	1			1		Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 2.4. Седловые точки и цена игры.</b>	<b>2</b>			<b>1</b>		
2.4.1.	Взаимозаменяемость седловых точек. Теорема Фон Неймана о минимаксе.	1			1		Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 2.5. Правила принятия решений. Теоремы о неподвижной точке.</b>	<b>1</b>			<b>1</b>		
2.5.1.	Согласованные стратегии. Теоремы Боля–Брауэра и Какутани о неподвижной точке.	1			1		
	<b>Тема 2.6. Канонические правила принятия решений и равновесия по Нэшу.</b>	<b>1</b>			<b>1</b>		
2.6.1.	Теорема Нэша. Взаимоотношения между равновесиями по Нэшу, равновесиями в недоминируемых стратегиях, равновесиями в осторожных стратегиях, оптимумами по Парето. Индивидуально рациональные исходы.	1			1		Проверка индивидуальных заданий

	<b>Тема 2.7. Смешанные расширения конечных игр.</b>	<b>1</b>			<b>1</b>			
2.7.1.	Существование седловой точки и цены в смешанном расширении матричной игры. Существование равновесий по Нэшу в смешанном расширении биматричной игры.	1			1			Проверка индивидуальных заданий
	<b>Тема 2.8. Методы поиска седловых точек и равновесий по Нэшу в смешанных расширениях</b>	<b>2</b>			<b>2</b>			
2.8.1.	Методы поиска седловых точек в смешанных расширениях матричных игр и равновесий по Нэшу в смешанных расширениях биматричных игр.	1			1			
	<b>Тема 2.9. Смешанные расширения бесконечных игр.</b>	<b>2</b>			<b>1</b>		<b>2</b>	
2.9.1.	Теорема о существовании равновесий по Нэшу в смешанном расширении бесконечных игр	1			1		2	Контрольная работа
	<b>Всего по курсу</b>	<b>34</b>			<b>28</b>		<b>6</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Полный конспект лекций доступен по адресу  
<http://elib.bsu.by/handle/123456789/12990>.

### Список литературы

#### Основная литература

1. Бахтин В.И., Коваленок А.П., Лебедев А.В., Лысенко Ю.В. Исследование операций. – Минск, БГУ, 2003
2. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. 1977.
3. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. 1974.

#### Дополнительная литература

1. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. 1974.
2. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. 1966.
3. Харари Ф. Теория графов. 1973.
4. Оре О. Теория графов. 1980.
5. Мулен Р. Теория игр и экономические приложения. 1979.
6. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. 1970.
7. Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. 1961.
8. Оуэн Г. Теория игр. 1971.
9. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М., Высшая школа, 1998.

## РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Графы. Маршруты, цепи, циклы, связные компоненты.
2. Три леммы о неориентированных графах.
3. Эйлеровы графы. Теорема Эйлера.
4. Алгоритм построения эйлерова цикла.
5. Деревья и их свойства.
6. Остовные деревья. Алгоритм Прима и его обоснование.
7. Алгоритм Краскала и его обоснование.
8. Ориентированные графы, маршруты, цепи, пути, циклы, контуры.
9. Алгоритм Дейкстры и его обоснование.
10. Алгоритм Флойда и его обоснование.
11. Нахождение контуров отрицательной длины.
12. Сети, потоки, разрезы. Леммы о дивергенции и мощности потока.
13. Элементарные потоки. Разложение циркуляции на элементарные потоки.
14. Разложение потока на элементарные потоки.
15. Допустимые потоки. Лемма о мощности допустимого потока.
16. Увеличивающие цепи и теорема Форда-Фалкерсона.
17. Алгоритм Форда-Фалкерсона.
18. Потоки минимальной стоимости. Действия над потоками в исходной сети и в графе модифицированных стоимостей.
19. Критерий оптимальности допустимого потока.
20. Алгоритм Басакера-Гоуэна и его обоснование.
21. Алгоритм Клейна.
22. Метод ветвей и границ.
23. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла.
24. Сетевое планирование. Работы, события, алгоритм построения сетевой модели, ранжирование событий.
25. Минимальный и максимальный сроки наступления событий, их свойства. Критический путь. Свободный и полный резерв времени.
26. Игры (бескоалиционные, матричные, биматричные).
27. Доминирующие и недоминируемые стратегии. Их существование.
28. Осторожные стратегии и их существование. Гарантированный выигрыш.
29. Оптимальные по Парето исходы, их существование.
30. Несущественные игры, их свойства.
31. Игра двух лиц с нулевой суммой. Нижняя и верхняя цена игры. Связь цены игры с несущественностью.
32. Цена игры и седловые точки. Свойства седловых точек.
33. Теорема фон Нойманна.
34. Правила принятия решений и равновесия. Теоремы о неподвижной точке.
35. Канонические правила принятия решений. Равновесия по Нэшу и теорема Нэша.
36. Смешанные расширения конечных игр. Равновесия в них.
37. Смешанные расширения бесконечных игр.

# ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

## Контрольная работа №1

1. Найти кратчайшие пути от вершины S до всех остальных вершин.
2. Построить максимальный поток и указать минимальный разрез в сети.
3. Построить поток мощности  $m$  минимальной стоимости с помощью алгоритма Клейна. Доказать, что стоимость минимальна.
4. Докажите, что положительный поток положительной мощности можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и вдоль путей, идущих от источника к стоку (считая, что в сети один источник и один сток)

## Контрольная работа №2

### ВАРИАНТ № 1

1. Найти все решения задачи коммивояжера, определяемой матрицей стоимостей

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 7 & 5 & 7 \\ 4 & \infty & 5 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 5 & \infty & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

2. Построить сетевую модель, найти критический путь и построить график распределения трудовых ресурсов.

№	Каким работам предшествует	Сроки выполнения	Потребность в рабочей силе
1	2	9	6
2	—	5	9
3	6, 10, 11	7	4
4	3, 5	5	7
5	6, 11	6	5
6	2	7	5
7	6, 10, 11	8	4
8	6, 10, 11	5	3
9	1, 8	3	8
10	2	9	3
11	—	8	8

3. В условиях предыдущей задачи
  - а) оптимизировать распределение трудовых ресурсов;
  - б) составить оптимальный график работ, при котором потребность в рабочей силе не превосходит 17.
4. Доказать, что если мощность потока  $f$  в сети положительна, то его можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль контуров и путей, ведущих из  $s$  в  $t$ .

## Контрольная работа №3

### ВАРИАНТ

Задача 1. Найти решение игры

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Задача 2. Найти множество недоминируемых стратегий игрока  $A$ , если множество его стратегий  $X = [-4, 0]$ , множество стратегий игрока  $B$  есть  $Y = \{0, 1\}$ , а функция выигрыша игрока  $A$  есть

$$u_A(x, y) = 10y \cos x + 5(1 - y) \sin x.$$

Задача 3. Найти равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях в биматричной игре

$$\begin{bmatrix} (2; 2) & (5; 1) \\ (9; 3) & (4; 4) \end{bmatrix}$$

Задача 4. Дана биматричная игра. Найти: а) равновесия по Нэшу в чистых стратегиях; б) равновесия по Парето; в) осторожные стратегии каждого игрока; г) недоминируемые стратегии каждого игрока. Вычислить минимальные гарантированные выигрыши каждого игрока.

$$\begin{bmatrix} (5; 7) & (5; 4) & (6; 5) \\ (5; 3) & (2; 4) & (4; 3) \\ (3; 3) & (8; 5) & (3; 2) \end{bmatrix}$$

Задача 5. Задана игра двух лиц  $G = (X, Y, u_1, u_2)$ , где  $X, Y$  — компактные множества и функции  $u_1, u_2$  непрерывны. Будут ли замкнуты множества  $ND_i$  недоминируемых стратегий  $i$ -го игрока?





ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ  
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ  
на \_\_\_\_/\_\_\_\_ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
(протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

(степень, звание)

\_\_\_\_\_

(подпись)

\_\_\_\_\_

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

\_\_\_\_\_

(степень, звание)

\_\_\_\_\_

(подпись)

\_\_\_\_\_

(И.О.Фамилия)