

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖАЮ
Проректор по учебной работе
« 30 » _____ 2017 г.
Регистрационный № _____ /уч.



ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности**

**1-31 03 01 Математика (по направлениям)
Направление специальности 1-31 03 01-03
Математика (экономическая деятельность)**

Утверждена на заседании кафедры
« _____ » _____ 2017 г.
Проректор по учебной работе
« _____ » _____ 2017 г.
Регистрационный № _____ /уч.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 01 Математика (по направлениям)
Направление специальности 1-31 03 01-03
Математика (экономическая деятельность)

2017 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2013 от 30.08.2013 №88 и учебного плана № G31-139/уч. от 30.05. 2013 по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) направление специальности 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

СОСТАВИТЕЛИ:

Радыно Я.В. – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Антоневич А.Б. – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Мазель М.Х. – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Леонов Н.Н. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Радыно ЕМ. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа
протокол № 11 от 27.04.2017

Научно-методическим Советом БГУ
27 июня 2017, протокол №5

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В дисциплине «Дополнительные главы функционального анализа» цикла специальных дисциплин компонента учреждения высшего образования изучаются операторы и функционалы в функциональных пространствах, а также методы, с помощью которых сведения об этих объектах применяются к конкретным задачам.

Среди областей применения функционального анализа можно указать математическую физику, теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, теорию вероятностей, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других направлений. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами, как «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление», «Численные методы».

В данном курсе излагаются свойства операторов и функционалов в нормированных и гильбертовых пространствах. В качестве одного из примеров приложений рассматриваются интегральные уравнения.

Цель дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»: освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Образовательная цель: изложение основ теории линейных операторов и операторных уравнений.

Развивающая цель: формирование у студентов основ современного математического мышления, обучение методам математических, изучение конкретных функционально-аналитических конструкций.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа»:

- изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов;
- изучение ограниченных функционалов;
- изучение компактных операторов и теории Рисса-Шаудера в гильбертовых пространствах;
- изучение альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a, b]$ и $C[a, b]$.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия и результаты теории операторов в нормированных и гильбертовых пространствах;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа.

уметь:

- выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;
- устанавливать свойства операторов в функциональных пространствах;
- применять результаты функционального анализа для решения теорети-

ческих и прикладных задач;

владеть:

- методами доказательств и аналитического исследования операторов и функционалов на ограниченность;
- методами доказательств и аналитического исследования операторов на компактность;
- методами исследования разрешимости и нахождения решения операторных уравнений;
- навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен обладать следующими компетенциями:

- АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.
- АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.
- АК-3. Владеть исследовательскими навыками.
- АК-4. Уметь работать самостоятельно.
- АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью),
- АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.
- АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.
- АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.
- АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.
- СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.
- СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.
- СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.
- СЛК-6. Уметь работать в команде.
- ПК-1. Разрабатывать практические рекомендации по использованию научных исследований, планировать и проводить экспериментальные исследования, исследовать патентоспособность и показатели технического уровня разработок программного обеспечения информационных систем.
- ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию.
- ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой профессиональной деятельности.
- ПК-4. Разрабатывать и тестировать информационные системы, осуществлять защиту приложений и данных.
- ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.
- ПК-6. Использовать и развивать современные информационные технологии и средства автоматизации управленческой деятельности.

- ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.
- ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой.
- ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.
- ПК-13. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.
- ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.
- ПК-22. Работать с научной, технической и патентной литературой.
- ПК-27. Реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности.

Учебная программа предназначена для студентов 3 курса (6 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 132 часа 116 часов, в том числе аудиторных занятий – 68 часов, из них лекционных –34 часа, лабораторные занятия – 28 часов, УСП – 6 часов. Форма отчетности – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Линейные операторы в нормированных пространствах

1.1. Пространство линейных ограниченных операторов

1. Определение и основные свойства. Пространство линейных ограниченных операторов как линейное нормированное пространство. Топологии и виды сходимости в этом пространстве, сходимость по норме и сильная сходимость.

2. Полнота и примеры. Условие полноты пространства операторов. Примеры пространств операторов, порождаемых пространствами $L_p[a, b]$, l_p и $C[a, b]$. Различные топологии и виды сходимости в этих пространствах операторов.

1.2. Обратные операторы

1. Основные понятия. Левый и правый обратный операторы. Связь с существованием и единственностью решений уравнений. Обратный оператор. Непрерывно обратимые операторы.

2. Существование и применения. Обратимость оператора, близкого к единичному оператору. Открытость множества обратимых операторов. Теорема Банаха об обратном операторе. Использование обратных операторов для решения линейных уравнений 2-го рода. Ряд Неймана.

Тема 2. Непрерывные линейные функционалы и сопряженные операторы

2.1. Непрерывные линейные функционалы

1. Основные понятия и общий вид в гильбертовом пространстве. Определение непрерывного линейного функционала на нормированном пространстве. Примеры непрерывных линейных функционалов на конечномерных пространствах, на пространствах $L_p[T, m]$, $L_p[a, b]$, l_p и $C[a, b]$. Теорема Ф. Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Примеры для пространств $L_2[T, m]$, $L_2[a, b]$, и l_2 .

2. Вопросы существования и общий вид в пространствах интегрируемых и непрерывных функций. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала. Неединственность продолжения. Примеры различных продолжений. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространствах $L_p[T, m]$, $L_p[a, b]$, l_p и $C[a, b]$.

2.2. Сопряженные операторы.

1. Общая теория. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Ограниченность оператора, сопряженного к ограниченному оператору. Равенство норм. Замыкание образа линейного ограниченного

оператора. Связь существования и единственности решения исходного и сопряженного уравнений. Условие ограниченной обратимости оператора.

2. Примеры. Сопряженные операторы в конечномерном пространстве. Сопряженные операторы для матричных операторов в гильбертовых нормированных пространствах общего вида и пространствах l_p . Сопряженные операторы для интегральных операторов, операторов замены переменной и умножения на функцию в пространствах $L_p[T, m]$. Сопряженные интегральные уравнения.

2.3. Топологии в исходном и сопряженном пространстве.

1. Общая теория. Слабая сходимость. Рефлексивность. Критерий рефлексивности. Сопряженные операторы в рефлексивных пространствах. *-слабая сходимость. Компактность в *-слабой топологии замкнутого шара в сопряженном пространстве.

2. Конкретные функциональные пространства. Конкретные рефлексивные пространства: конечномерные пространства, пространство $L_p[T, m]$ и его частные случаи – $L_p[a, b]$ и l_p . Сопряженные операторы в этих пространствах. Конкретные нерефлексивные пространства – $C[a, b]$ и c_0 . Несовпадение слабой и *-слабой сходимости в этих пространствах.

Тема 3. Компактные операторы

3.1. Общая теория компактных операторов

1. Основные понятия. Определения и основные свойства компактных операторов. Некоторые виды и важные примеры компактных операторов в общих гильбертовых и банаховых пространствах и в конкретных пространствах – $L_p[T, m]$, $L_p[a, b]$, l_p и $C[a, b]$.

2. Операторы конечного ранга и интегральные операторы. Операторы конечного ранга в гильбертовых и банаховых пространствах. Примеры операторов конечного ранга в пространствах $L_p[a, b]$, l_p и $C[a, b]$. Компактность интегральных операторов в пространствах $L_p[a, b]$ и $C[a, b]$.

3.2. Уравнения с компактными операторами

1. Основы теории. Уравнения с компактными операторами. Основные особенности. Прикладные задачи, приводящие к уравнениям с компактными операторами. Теория Рисса – Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.

2. Конкретные пространства и применения. Примеры уравнений с компактными операторами в конкретных гильбертовых пространствах $L_2[T, m]$, $L_2[a, b]$ и l_2 . Применение теории Рисса – Шаудера к уравнениям с компактными операторами в гильбертовых пространствах $L_2[a, b]$ и l_2 .

3.3. Интегральные уравнения Фредгольма

1. Пространства интегрируемых функций. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространстве $L_2[T, m]$. Частные случаи –

системы алгебраических уравнений в конечномерном пространстве и пространстве l_2 , интегральные уравнения в пространстве $L_2[a, b]$ и $C[a, b]$.

2. Пространства интегрируемых функций и условия применимости. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространстве $C[a, b]$. Условия на ядро интегрального оператора, обеспечивающие выполнение альтернативы Фредгольма. Уравнения типа свертки.

Тема 4. Операторы в гильбертовых пространствах

4.1. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах

1. Основные понятия и примеры. Определение сопряженных и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Основные свойства. Примеры самосопряженных операторов в пространствах C^n , $L_2[T, t]$, $L_2[a, b]$ и l_2 .

2. Нормы самосопряженных операторов. Квадратичная и билинейная формы самосопряженного оператора. Собственные значения самосопряженных операторов. Связь нормы самосопряженного оператора с квадратичной формой и собственными значениями.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Тема 1. Линейные операторы в нормированных пространствах	8			8		2	
1.1	Пространство линейных ограниченных операторов 1. Определение и основные свойства.	2			2			Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
	2. Полнота и примеры.	2			2			Проверка индивидуальных заданий
1.2	Обратные операторы 1. Основные понятия	2			2			Проверка индивидуальных заданий
	2. Существование и применения..	2			2		2	Проверка индивидуальных заданий
2	Тема 2. Непрерывные линейные функционалы и сопряженные операторы	12			10		2	
2.1	Непрерывные линейные функционалы 1. Основные понятия и общий вид в гильбертовом пространстве.	2			2			Проверка индивидуальных заданий
	2. Вопросы существования и общий вид в пространствах интегрируемых и непрерывных функций.	2			2			Проверка индивидуальных заданий
2.2	Сопряженные операторы 1. Общая теория.	2			2			Проверка индивидуальных заданий
	2.Примеры.	2			2		2	Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
2.3	Топологии в исходном и сопряженном пространстве 1. Общая теория..	2						Опрос
	2. Конкретные функциональные пространства.	2			2			Проверка индивидуальных заданий
3	Тема 3. Компактные операторы	12			8			
3.1	Общая теория компактных операторов 1. Основные понятия.	2						Опрос
	2. Операторы конечного ранга и интегральные операторы.	2			2			Проверка индивидуальных заданий
3.2	Уравнения с компактными операторами 1. Основы теории.	2			2			Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их

							устной защитой
	2. Конкретные пространства и применения.	2			2		Проверка индивидуальных заданий
3.3	Интегральные уравнения Фредгольма 1. Пространства интегрируемых функций.	2					Опрос
	2. Пространства интегрируемых функций и условия применимости.	2			2		Отчёты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой
4.	Тема 4. Операторы в гильбертовых пространствах	2			2	2	
4.1	Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах 1. Основные понятия и примеры.	2			2	2	контрольная работа
	Всего за 6 семестр	34			28	6	
	Всего по курсу	34			28	6	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Список литературы

Основная литература:

1. Антоневи́ч А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006.
2. Антоневи́ч А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2011.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2004.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.

Дополнительная литература:

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ю., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. Киев, Выща школа, 1990.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневи́ч А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов – это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий – на лекциях, практических и семинарских занятиях, при выполнении лабораторных работ.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания – на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.
3. В библиотеке, дома, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. Внеаудиторная самостоятельная работа;
2. Аудиторная самостоятельная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя;
3. Творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

Виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов разнообразны: подготовка и написание рефератов, докладов, очерков и других письменных работ на заданные темы.

Аудиторная самостоятельная работа может реализовываться при проведении практических занятий, семинаров, выполнении лабораторного практикума и во время чтения лекций.

При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории необходимо контролировать усвоение материала основной массой студентов путем проведения экспресс-опросов по конкретным темам.

На практических и семинарских занятиях различные виды самостоятельной работы студентов позволяют сделать процесс обучения более интересным и поднять активность значительной части студентов в группе.

На практических занятиях нужно не менее 1 часа из двух (50% времени) отводить на самостоятельное решение задач. Практические занятия целесообразно строить следующим образом: 1. Вводное слово преподавателя (цели занятия, основные вопросы, которые должны быть рассмотрены). 2. Беглый опрос. 3. Решение 1-2 типовых задач. 4. Самостоятельное решение задач. 5. Разбор ти-

повых ошибок при решении (в конце текущего занятия или в начале следующего).

Результативность самостоятельной работы студентов во многом определяется наличием активных методов ее контроля. Существуют следующие виды контроля:

- входной контроль знаний и умений студентов при начале изучения очередной дисциплины;
- текущий контроль, то есть регулярное отслеживание уровня усвоения материала на лекциях, практических и лабораторных занятиях;
- промежуточный контроль по окончании изучения раздела или модуля курса;
- самоконтроль, осуществляемый студентом в процессе изучения дисциплины при подготовке к контрольным мероприятиям;
- итоговый контроль по дисциплине в виде зачета или экзамена;
- контроль остаточных знаний и умений спустя определенное время после завершения изучения дисциплины.

ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Организация управляемой самостоятельной работы по учебной дисциплине «Дополнительные главы функционального анализа» осуществляется в соответствии с Положением о самостоятельной работе студентов (курсантов, слушателей) от 06.04.2015 года.

Управляемая самостоятельная работа студентов организуется в следующих формах:

1. Самостоятельное изучение студентами по литературе отдельных вопросов теории, которые на лекциях не излагаются, излагаются частично или в общих чертах.
2. Выполнение письменных индивидуальных заданий.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 1. Линейные операторы в нормированных пространствах

1. Найти или оценить сверху норму заданного оператора.
2. Записать оператор, обратный к заданному, с использованием ряда Неймана. Вычислить первые два члена ряда.
3. Решить заданное уравнение с использованием обратного оператора.

Тема 2. Линейные непрерывные функционалы

1. Построить два различных продолжения на все пространство линейного непрерывного функционала, заданного на подпространстве.
2. Определить, задает ли предложенная формула линейный непрерывный функционал на заданном пространстве.
3. Найти оператор, сопряженный к заданному.

Тема 3. Компактные операторы

1. Определить, является ли компактным заданный оператор в пространстве $L_2[a, b]$.
2. Определить, является ли компактным заданный оператор в пространстве непрерывных функций.
3. Определить для заданного оператора, какой из случаев альтернативы Фредгольма для него выполняется.

Тема 4. Операторы в гильбертовых пространствах

1. Вычислить норму заданного самосопряженного оператора непосредственно и с помощью собственных значений.
2. Построить спектральное разложение компактного самосопряженного оператора в пространстве $L_2[a, b]$.
3. Построить спектральное разложение компактного самосопряженного оператора в пространстве l_2 .

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СРЕДСТВ ДИАГНОСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Контроль освоения практических навыков осуществляется в форме проверки индивидуальных заданий. По итогам семестра проводится зачет.

Методика формирования итоговой оценки

Итоговая оценка формируется на основе 3-ех документов:

1. Правила проведения аттестации (Постановление №53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе БГУ (ред. 2015 г.).
3. Критерии оценки студентов (10 баллов).

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на ____ / ____ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № ____ от _____ 20 г.)

Заведующий кафедрой

доктор физ.-мат наук, профессор _____ А.В. Лебедев

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

канд. физ.-мат. наук, доцент _____ Д.Г. Медведев