УДК 519.2

ВАРИОГРАММНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Т. В. ЦЕХОВАЯ[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследованы некоторые свойства семивариограммы внутренне стационарного случайного процесса с конечным моментом второго порядка и непрерывным временем. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы непрерывная функция была семивариограммой. Определены границы центральных доверительных интервалов для семивариограммы действительного стационарного гауссовского случайного процесса. Представленный подход интервального оценивания семивариограммы основан на свойствах χ^2-распределения. Предложенные интервальные оценки более информативны, чем ранее построенные точечные.

Ключевые слова: случайный процесс; внутренняя стационарность; семивариограмма; доверительный интервал.

VARIOGRAM ANALYSIS OF STOCHASTIC PROCESSES

T. V. TSEKHAVAYA[a]

[a]*Belarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus*

Properties of the semivariogram of an intrinsically stationary continuous-time random process with finite second moment are investigated. A necessary and sufficient conditions for a continuous function to be semivariogram are found.

Образец цитирования:
Цеховая Т. В. Вариограммный анализ случайных процессов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 23–27.

For citation:
Tsekhavaya T. V. Variogram analysis of stochastic processes. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 2. P. 23–27 (in Russ.).

Автор:
Татьяна Вячеславовна Цеховая – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики.

Author:
Tatsiana Tsekhavaya, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of probability theory and mathematical statistics, faculty of applied mathematics and computer sciences.
tsekhavaya@bsu.by

Confidence intervals for the semivariogram of Gaussian stationary stochastic process are defined. Properties of χ^2-distribution are used for constructing confidence intervals for semivariogram. The proposed confidence intervals are more informative compared with point estimates of the semivariogram.

Key words: stochastic process; intrinsic stationarity; semivariogram; confidence interval.

Геостатистические методы интерполяции в последнее время получают широкое практическое применение. Ключевым понятием геостатистики является вариограмма – момент второго порядка, характеризующий степень линейной зависимости между составляющими рассматриваемого процесса. В связи с этим актуальны задачи исследования свойств вариограммы, а также построения и изучения оценок этой функции. Настоящая работа является продолжением исследований [1–3] в области вариограммного анализа случайных процессов.

Некоторые свойства семивариограммы

Рассмотрим действительный внутренне стационарный случайный процесс $X(t),\ t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, с математическим ожиданием $E\{X(t)\} = 0$ и вариограммой

$$2\gamma(t-s) = D\{X(t) - X(s)\},$$

где $t,\ s \in \mathbb{R}$; D – символ дисперсии. Функция $\gamma(t)$ называется семивариограммой. Заметим, что $\gamma(0) = 0$; $\gamma(t) = \gamma(-t)$ и $\gamma(t) \geq 0$.

Предположим, что момент второго порядка $E\{X^2(t)\} < \infty$ при любом $t \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$\Psi_{X(t_1),\ \ldots,\ X(t_n)}(z_1, \ldots, z_n) = E\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} z_k X(t_k)\right\} \tag{1}$$

есть характеристическая функция n-го порядка случайного процесса $X(t)$, где $t_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $(z_1, \ldots, z_n)$ – действительный вектор; $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная функция* $\gamma(t),\ t \in \mathbb{R}$, *была семивариограммой некоторого внутренне стационарного случайного процесса* $X(t),\ t \in \mathbb{R}$, с *конечным моментом второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $a > 0$ *функция* $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, *была неотрицательно определена*.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\gamma(t)$ – семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса $X(t)$. Покажем, что для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$ неотрицательно определена. По [3, теорема 1] найдутся вероятностное пространство и заданный на нем действительный гауссовский случайный процесс $Y(t),\ t \in \mathbb{R}$, имеющий $E\{Y(t)\} = 0$ и $D\{Y(t) - Y(s)\} = 2\gamma(t-s)$ при всех $t,\ s \in \mathbb{R}$. Заметим, что процесс $Y(t)$ внутренне стационарен.

Положим, что $Z(s) = e^{-i\sqrt{a}\,Y(s)}$, и вычислим корреляционную функцию этого процесса. По определению корреляционной функции комплексного случайного процесса имеем

$$R_Z^0(s, s+t) = E\left\{Z(s)\overline{Z(s+t)}\right\} = E\left\{e^{i\sqrt{a}(Y(s+t) - Y(s))}\right\}. \tag{2}$$

С учетом (1) и свойств процесса $Y(t)$ правая часть (2) для любого $t \in \mathbb{R}$, очевидно, равна

$$\Psi_{Y(s+t) - Y(s)}\left(\sqrt{a}\right) = e^{-\frac{a}{2}D\{Y(s+t) - Y(s)\}} = e^{-a\gamma(t)},\ \ a > 0.$$

Таким образом, для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, является характеристической. Следовательно, согласно теореме Бохнера – Хинчина [4, с. 305] $e^{-a\gamma(t)}$ – неотрицательно определенная функция.

Достаточность. Пусть $e^{-a\gamma(t)}$, $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$, – неотрицательно определенная функция. Тогда по теореме Бохнера – Хинчина эта функция характеристическая. Дальнейшее доказательство данной теоремы повторяет доказательство достаточности теоремы 1 [1].

Следствие. *Пусть $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – семивариограмма внутренне стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию $E\{X^2(t)\} < \infty$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $a > 0$ функция $e^{-a\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, есть корреляционная функция некоторого случайного процесса.*

Теорема 2. *В случае непрерывности семивариограммы $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, внутренне стационарного случайного процесса $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$,* с *конечным моментом второго порядка эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\gamma(t)$ – условно отрицательно определенная функция;

2) $e^{-a\gamma(t)}$ – неотрицательно определенная функция для любого $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 1 настоящей работы и из [1, теорема 1].

Полученные результаты будут использованы в дальнейшем для статистического анализа случайных процессов в частотной области, в частности для поиска спектральных представлений внутренне стационарных случайных процессов и их семивариограмм.

Интервальное оценивание семивариограммы

Рассмотрим действительный стационарный гауссовский случайный процесс $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, с нулевым математическим ожиданием и неизвестной семивариограммой $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Нетрудно видеть, что при фиксированных $t, h \in \mathbb{Z}$ величина

$$\{Y(t+h) - Y(t)\}^2 = 2\gamma(h)\chi_1^2,$$

где χ_1^2 – случайная величина, распределенная по закону χ^2 с одной степенью свободы. Следовательно,

$$E\{Y(t+h) - Y(t)\}^2 = 2\gamma(h);\ D\{Y(t+h) - Y(t)\}^2 = 2\{2\gamma(h)\}^2.$$

Пусть $Y(1), \ldots, Y(n)$ – n последовательных отсчетов процесса $Y(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. В качестве оценки семивариограммы рассмотрим статистику вида

$$\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{t=1}^{n-h} \left(Y(t+h) - Y(t)\right)^2,\ h = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Положим, $\tilde{\gamma}(-h) = \tilde{\gamma}(h)$, $h = 0, 1, \ldots, n-1$, и $\tilde{\gamma}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

Выражения для математического ожидания и дисперсии оценки семивариограммы $\tilde{\gamma}(h)$ были получены в [2] и имеют вид

$$E\{\tilde{\gamma}(h)\} = \gamma(h);$$

$$D\{\tilde{\gamma}(h)\} = \frac{1}{2(n-h)^2} \sum_{s,t=1}^{n-h} \{\gamma(s-t+h) + \gamma(s-t-h) - 2\gamma(s-t)\}^2,$$

где функция $\gamma(h)$ – семивариограмма рассматриваемого случайного процесса.

В [2] найдено также предельное распределение статистики (3) и на основе нормальной аппроксимации распределения $\tilde{\gamma}(h)$ построен центральный доверительный интервал для семивариограммы $\gamma(h)$.

Как известно [5; 6], случайная величина χ^2 применяется для приближения случайной величины, принимающей только положительные значения. В частности, в задачах аппроксимации распределений сглаженных оценок спектральных плотностей χ^2-распределение занимает центральное место [5]. В настоящей статье рассмотрим подход, основанный на χ^2-приближении к распределению оценки семивариограммы $\tilde{\gamma}(h)$ вида (3). Здесь и далее будем предполагать, что h выбирается фиксированным: $h = 0, 1, \ldots, n-1$.

Согласно [5] распределение статистики (3) может быть аппроксимировано распределением случайной величины $c\chi_m^2$, где c – константа; χ_m^2 – случайная величина, имеющая χ^2-распределение с m степенями свободы. Найдем параметры c и m методом моментов. Для этого приравняем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $c\chi_m^2$ к математическому ожиданию и дисперсии оценки $\tilde{\gamma}(h)$ семивариограммы. Предполагается, что моменты первого и второго порядков оценки семивариограммы известны. Тогда имеем

$$E\{\tilde{\gamma}(h)\} = cm;\ D\{\tilde{\gamma}(h)\} = 2c^2m.$$

Решая эти уравнения относительно c и m, получим

$$m = \frac{2\left(E\{\tilde{\gamma}(h)\}\right)^2}{D\{\tilde{\gamma}(h)\}};\ c = \frac{E\{\tilde{\gamma}(h)\}}{m}.$$

Принимая во внимание несмещенность оценки (3), запишем выражения для параметров аппроксимирующего распределения χ^2 в виде

$$\hat{m} = \frac{2(\gamma(h))^2}{D\{\tilde{\gamma}(h)\}};\ \hat{c} = \frac{\gamma(h)}{\hat{m}}.$$

Таким образом, величина $\dfrac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)}$ имеет χ^2-распределение с $\hat{m}$ степенями свободы. Построим для нее доверительный интервал с коэффициентом доверия $(1-\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0{,}5$. Согласно [6] имеем

$$P\left\{\chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} < \chi_{\hat{m}}^2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = 1-\varepsilon;$$

$$P\left\{\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} \le \chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = P\left\{\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\gamma(h)} \ge \chi_{\hat{m}}^2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} = \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\chi_{\hat{m}}^2(\alpha) = F_{\chi_{\hat{m}}^2}^{-1}(\alpha)$ – квантиль уровня α распределения χ^2 с $\hat{m}$ степенями свободы, $\alpha \in (0, 1)$.

Отсюда вытекает, что интервал

$$\left(\frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\chi_{\hat{m}}^2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)},\ \frac{\hat{m}\tilde{\gamma}(h)}{\chi_{\hat{m}}^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)$$

с доверительной вероятностью $(1-\varepsilon)$ является центральным доверительным интервалом для неизвестной семивариограммы $\gamma(h)$, $h = 0, 1, \ldots, n-1$.

Отметим, что при достаточно больших $\hat{m}$ доверительный интервал для семивариограммы $\gamma(h)$ может быть построен с помощью нормальной аппроксимации распределения $\tilde{\gamma}(h)$ [2].

Построение доверительных интервалов – одна из основных задач процесса оценивания. Представленные в настоящей работе результаты позволяют получить не только точечные оценки семивариограммы, но и охарактеризовать их точность посредством доверительных интервалов с заданной доверительной вероятностью.

Библиографические ссылки

1. *Цеховая Т. В.* Свойства вариограммы внутренне стационарных случайных процессов // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения : материалы Междунар. науч. конф. (Минск, 22 апр. 2004 г.). Минск, 2004. С. 181–186.

2. *Цеховая Т. В.* Асимптотическое распределение оценки семивариограммы гауссовского случайного процесса // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 1. С. 89–95.

3. *Цеховая Т. В.* Свойства внутренне стационарных случайных процессов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 28–33.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М., 1989.
5. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения : в 2 т. М., 1971. Т. 1.
6. Справочник по прикладной статистике : в 2 т. / под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана ; пер. с англ. Ю. Н. Тюрина. М., 1989. Т. 1: Финансы и статистика.

References

1. Tsekhavaya T. V. [The properties of the variogram of intrinsically stationary random processes]. *Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya statistika i ikh prilozheniya* : proc. Int. sci. of conf. (Minsk, 22 April, 2004). Minsk, 2004. P. 181–186 (in Russ.).
2. Tsekhavaya T. V. Asymptotic distribution of the semivariogram estimator of Gaussian stochastic process. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fizika. Matematika. Informatika.* 2015. No. 1. P. 89–95 (in Russ.).
3. Tsekhavaya T. V. Properties of the intrinsically stationary stochastic processes. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 28–33 (in Russ.).
4. Shiryaev A. N. [Probability]. Moscow, 1989 (in Russ.).
5. Djenkins G., Vatts D. [Spectral analysis and its applications] : in 2 vol. Moscow. 1971. Vol. 1 (in Russ.).
6. Lloyd E., Lederman Yu. (eds). Spravochnik po prikladnoy statistike [Handbook of applicable mathematics] : in 2 vol. Moscow, 1989. Vol. 1: Finansy i statistika (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 17.01.2017.
Received by editorial board 17.01.2017.