УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
М34

А в т о р ы:
М. В. Дубатовская, А. А. Королева,
С. В. Рогозин, П. П. Староселец

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат физико-математических наук, доцент *С. И. Василец*;
кандидат физико-математических наук, доцент *Л. А. Хвощинская*

Математический анализ : Предел последовательности. Предел
М34 функции. Непрерывность : учеб.-метод. пособие / М. В. Дубатовская [и др.]. – Минск : БГУ, 2010. – 95 с.
ISBN 978-985-518-326-7.

В учебно-методическом пособии изложены основы теории предела. Представлены примеры решения отдельных задач, а также приведены задания для самостоятельной работы.

Для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Математика» и «Механика». Может быть полезно магистрантам и аспирантам.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-518-326-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

В математическом анализе одним из базовых понятий является понятие предела, на основе которого строится дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких вещественных переменных.

Освоение теории предела представляет определенную трудность для студентов, поскольку пропедевтика понятия предела в школьной программе по математике практически отсутствует. Для студентов первого курса новым и трудным является систематическое использование языка современного математического анализа. В связи с этим представляется важным последовательное и подробное изложение основ теории, проиллюстрированное содержательными примерами. Данный материал приведен в основных учебниках по математическому анализу в сжатой форме, поэтому самостоятельное его освоение возможно не для всех студентов.

Цель настоящего учебно-методического пособия – помочь студентам изучить и понять сложный для них теоретический материал, научиться решать задачи по указанным темам и применять методы теории пределов в других разделах математики.

Пособие состоит из трех глав. В первой главе рассматриваются свойства сходящихся числовых последовательностей, устанавливаются базовые принципы теории предела – леммы о вложенных отрезках, о конечном покрытии и о предельной точке. Во второй главе последовательно излагаются основные результаты теории предела функции. В третьей главе приводятся и доказываются свойства непрерывных функций.

Теоретические построения иллюстрируются примерами, дается алгоритм решения некоторых задач. Пособие содержит задачи для самостоятельного решения, а также подборку индивидуальных заданий для студентов.

Рекомендуемый перечень источников, конечно, не может представить все многообразие учебной литературы по данным разделам математического анализа.

В пособии приведен примерный список вопросов учебной программы курса «Математический анализ» по темам «Предел последовательности», «Предел функции», «Непрерывность». Эти вопросы могут быть использованы при подготовке к экзаменам по курсу, а также для самоконтроля.

Глава 1
ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

1.1. Понятие последовательности. Некоторые обозначения

Пусть $X \neq \varnothing$ – произвольное множество (не обязательно числовое).

Определение 1.1. Последовательностью из X называется отображение $f : \mathbf{N} \to X \neq \varnothing$.

Если, в частности, $\varnothing \neq X \subset \mathbf{R}$, т. е. X – числовое множество, то последовательность называется *числовой последовательностью*.

Обозначим через x_n значение функции $f : \mathbf{N} \to X$ в точке n, т. е. положим $x_n = f(n)$. Используя это обозначение, числовую последовательность записывают следующим образом:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

где точками обозначены пропущенные члены. Число x_n называют n-м (читается «энным») членом последовательности. Отметим другие формы записи последовательности:

$$(x_n \mid n \in \mathbf{N}), (x_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n)_{n \in \mathrm{N}}, (x_n), x_n .$$

Изображая на числовой оси точки, координатами которых являются члены последовательности x_n, получим геометрическую интерпретацию последовательности.

1.2. Предел последовательности

Открытой окрестностью точки $a \in \mathbf{R}$ называется произвольный интервал, содержащий эту точку. Окрестности точки a будем обозначать символами $U(a)$, $V(a)$, $W(a)$, $\ldots$. *Симметричной* (*открытой*) *окрестностью точки* a будем называть произвольный интервал $(a - \delta, a + \delta) = U_\delta(a)$ $(\delta > 0)$, для которого точка a является серединой. Этот интервал еще называют δ-*окрестностью точки* a. Любая окрестность точки a

содержит бесконечно много симметричных окрестностей и наоборот. Докажите это свойство.

Дадим два определения предела последовательности.

Определение 1.2. Число $a \in \mathbf{R}$ называется *пределом последовательности* x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число n_ε, что все члены последовательности x_n с номерами n, большими n_ε, удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. В символической форме это определение имеет вид

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon).$$

Это определение называют определением предела на языке «$\varepsilon - n$».

Определение 1.3. Число $a \in \mathbf{R}$ называется *пределом последовательности* x_n, если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует число n_U такое, что для любого $n > n_U$ выполняется условие $x_n \in U(a)$.

Это определение называют определением предела на языке «$U - n$».

Замечание. Без ограничения общности можно считать $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, $n_U \in \mathbf{N}$, так как если неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ $(x_n \in U(a))$ выполняется для любого $n > n'_\varepsilon$ $(n_U \geq n')$, то оно будет выполняться также и для любого $n > n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, где $n_\varepsilon \geq n'_\varepsilon$ $(n_U \geq n')$.

Определения 1.2 и 1.3 равносильны в том смысле, что если число $a \in \mathbf{R}$ является пределом последовательности согласно определению 1.2, то оно является пределом x_n в смысле определения 1.3 и наоборот.

Действительно, пусть a – предел x_n в смысле определения 1.2. Возьмем произвольную окрестность $U(a)$ точки a. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(a) \subset U(a)$. Для этого $\varepsilon > 0$ в силу определения 1.2 найдется число n_ε такое, что для любого $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е. $x_n \in U_\varepsilon(a) \subset U(a)$. Отсюда заключаем, что для любой окрестности $U(a)$ точки a существует число $n_U = n_\varepsilon$ такое, что $x_n \in U(a)$, как только $n > n_U$, т. е. a удовлетворяет условию определения 1.3. Аналогично доказывается обратное. Докажите самостоятельно.

Тот факт, что число a является пределом последовательности x_n, записывается так: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ (читается: «предел x_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a»), или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ («x_n стремится к a при n, стремящемся к бесконечности»), или в краткой форме: $x_n \to a$. Если существует такое число $a \in \mathbf{R}$, что выполняется одно из определений предела последовательности, то последовательность называется *сходящейся* (в $\mathbf{R}$). В противном случае – *расходящейся* (в $\mathbf{R}$).

Упражнение 1.1. Пусть последовательность y_n получена из последовательности x_n изменением или отбрасыванием конечного числа членов. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, или обе последовательности будут расходящимися.

Пример 1.1. $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, или $\dfrac{2}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \ldots, \dfrac{n+1}{n}, \ldots$.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем n_ε такое, чтобы выполнялось неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ для $\forall n > n_\varepsilon$. $|x_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{n} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, в качестве n_ε достаточно взять число $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Пример 1.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n^2} = 0$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство $\left|\dfrac{\sin n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$. Это неравенство выполняется, если

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Таким образом, в качестве n_ε можно взять число $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Пример 1.3. $\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Поскольку $\sqrt[n]{n} > 1$ для любого натурального n, то неравенство $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ равносильно

$$(\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon) \Leftrightarrow n < (1+\varepsilon)^n \Leftrightarrow n < 1 + n \cdot \varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n.$$

Последнее неравенство заведомо выполняется, если

$$n < \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2, \text{ а значит, } n > 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}, n_\varepsilon \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}.$$

Пример 1.4. Последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится.

Предположим противное. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Возьмем $a < \varepsilon < \min\{|1-a|, |1+a|\}$. Разность $|x_n - a|$ равна $|1-a|$ при четных n и равна $|1+a|$ при нечетных n, и поэтому она не может быть меньше ε при $\forall n$. Аналогично устанавливается, что $a = 1$ и $a = -1$ не являются пределами последовательности $x_n = (-1)^n$.

1.3. Простейшие свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. Предел постоянной последовательности.

Если все члены последовательности x_n равны постоянному числу a, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

►Зададим $\varepsilon > 0$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ будет $|x_n - a| = 0 < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.◄

Очевидно, что сформулированное свойство справедливо и в том случае, когда члены последовательности равны постоянному числу, начиная с некоторого номера.

Свойство 2. Единственность предела.

Если последовательность x_n имеет предел, то значение этого предела единственно.

►Предположим противное, т. е. что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $a \neq b$. Тогда существуют непересекающиеся окрестности $U(a)$ и $U(b)$ точек a и b соответственно: $U(a) \cap U(b) = \varnothing$ (например, $U(a) = U_\delta(a)$, $U(b) = U_\delta(b)$, с $0 < \delta < \dfrac{|b-a|}{2}$). Возьмем числа n_1, n_2 такие, чтобы выполнялось условие $(\forall n > n_1 \Rightarrow x_n \in U(a)) \wedge (\forall n > n_2 \Rightarrow x_n \in U(b))$.

Такие числа существуют в силу определения 1.3 предела последовательности. Тогда для всех $n > \max\{n_1, n_2\}$ будет иметь место $x_n \in U(a) \cap U(b)$. Но $U(a) \cap U(b) = \varnothing$. Противоречие.◄

Упражнение 1.2. 1) Докажите свойство 2, опираясь на определение 1.2. 2) Истинно ли утверждение: «если две последовательности имеют один и тот же предел, то все их члены, начиная с некоторого номера, совпадают»? Приведите примеры.

Определение 1.4. Последовательность x_n называется *ограниченной сверху*, если $\exists M \in \mathbf{R}$ такое, что $x_n \le M$ для $\forall n \in \mathbf{N}$; *ограниченной снизу*, если $\exists m \in \mathbf{R}$ такое, что $x_n \ge m$ для $\forall n \in \mathbf{N}$; *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. $\exists m, M \in \mathbf{R} : m \le x_n \le M$.

Ограниченность последовательности x_n равносильна существованию числа $C > 0$ такого, что $|x_n| \le C$ для $\forall n \in \mathbf{N}$. Действительно, если такое число $C > 0$ существует, то очевидно, что x_n ограничена ($m = -C$, $M = C$). Если же последовательность x_n ограничена сверху и снизу, то в качестве C достаточно взять $C \ge \max\{|M|, |m|\}$. Заметим, что числа M, m можно всегда подобрать так, чтобы в определении 1.4 имели место строгие неравенства.

Свойство 3. Ограниченность сходящейся последовательности.

Если последовательность сходится, то она ограничена.

►Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Из определения 1.2 следует, что для $\varepsilon = 1$ существует натуральное число n_1 такое, что для $\forall n > n_1$ выполняется соотношение $|x_n - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x_n < a + 1$. Но тогда для $\forall n \in N$ будет $\{x_1, x_2, ..., x_{n_1}, a-1\} \le x_n \le \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_1}, a+1\}$.◄

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена, но она не является сходящейся. Таким образом, ограниченность последовательности есть необходимое (но не достаточное) условие сходимости последовательности.

1.4. Предельный переход и неравенства

Докажем некоторые свойства, связывающие предельный переход и неравенства.

Свойство 1. Если последовательность x_n имеет предел, равный a, и $a < b$, то, начиная с некоторого номера, все члены последовательности x_n меньше b, т. е. $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < b) \Rightarrow (\exists n_b, \forall n > n_b : x_n < b)$.

►Пусть $\varepsilon = b - a > 0$. Тогда $\exists n_b$ такое, что для $\forall n > n_b$ будет $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < b - a \Leftrightarrow a - b < x_n - a < b - a \Rightarrow x_n < b.$◄

Аналогичным образом доказывается, что если $a > b$, то, начиная с некоторого номера, все члены последовательности x_n больше b. Докажите самостоятельно.

Свойство 2. Если последовательность x_n имеет предел, равный a, и, начиная с некоторого номера, все члены последовательности удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$, то $a \ge b$, т. е.

$$\left[(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \wedge (\forall n > n_1 : x_n \ge b)\right] \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} x_n = a \ge b).$$

►Предположим противное: $a < b$. Тогда по свойству 1, начиная с некоторого номера n_b, все члены последовательности удовлетворяют неравенству $x_n < b \ \ \forall n > n_b$, что противоречит условию.◄

Замечание. Строгое неравенство $x_n > b$ в условии свойства 2 не влечет неравенства $a > b$.

Пример 1.5. $x_n = \dfrac{1}{n}$, при этом для любого натурального n выполняется неравенство $x_n > 0$. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Свойство 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и для всех n, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \le y_n$, то $a \le b$.

►Предположим противное: $a > b$. В силу плотности множества $\mathbf{R}$ существует число $C \in \mathbf{R}$ такое, что $a > C > b$. По свойству 1 $(\exists n_1, \forall n > n_1 : x_n > C) \wedge (\exists n_2, \forall n > n_2 : y_n < C)$.

Пусть $x_n \le y_n$ для любых $n > n_3$. Тогда для всех $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$ выполняются одновременно неравенства $x_n > C > y_n$ и $x_n \le y_n$. Противоречие.◄

В случае, когда, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \ge y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \ge b$.

Замечание. Выполнение строгого неравенства $x_n > y_n$ $(x_n < y_n)$ для всех n, начиная с некоторого номера, не влечет выполнение неравенства $a > b$ $(a < b)$.

Пример 1.6. $x_n = 0$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, т. е. $x_n < y_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Свойство 4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и для всех n, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \le z_n \le y_n$. Тогда последовательность z_n сходится и ее предел равен a.

$$\blacktriangleright\ (\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists n_1, \forall n > n_1 : -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon),$$

$$(\lim_{n\to\infty} y_n = a) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists n_2, \forall n > n_2 : -\varepsilon < y_n - a < \varepsilon).$$

Пусть для всех $n > n_3$ выполняется неравенство $x_n \le z_n \le y_n$. Тогда для всех $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$ будет $a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon$. Значит, $\exists \lim_{n\to\infty} z_n = a$.◀

Свойство 4 называют свойством «сжатой» последовательности или леммой «о двух милиционерах».

1.5. Множество $\overline{\mathbf{R}}$

Через $\overline{\mathbf{R}}$ будем обозначать множество, образованное присоединением к множеству вещественных чисел $\mathbf{R}$ двух символов $-\infty$ и $+\infty$, т. е. $\overline{\mathbf{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Будем считать, что символы $-\infty$ и $+\infty$ удовлетворяют условиям:

а) $\forall x \in \mathbf{R}$: $-\infty < x < +\infty$, $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$;

б) если $x \in \mathbf{R}$ и $x > 0$, то $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-x) \cdot (+\infty) = -\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

Выражения $+\infty + (-\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$ не определены.

Множество $\overline{\mathbf{R}}$ называют *расширенной числовой прямой*, символы $+\infty$, $-\infty$ – бесконечными элементами множества $\overline{\mathbf{R}}$ или бесконечными точками расширенной числовой оси. Множество $\{x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x < C, C \in \mathbf{R}\}$ будем называть окрестностью бесконечной точки $-\infty$ и обозначать $\dot{U}(-\infty)$, а множество $\{x \in \mathbf{R} \mid C < x < +\infty, C \in \mathbf{R}\}$ – окрестностью бесконечной точки $+\infty$ и обозначать $\dot{U}(+\infty)$.

1.6. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Суммой, разностью, произведением, частным (отношением) двух последовательностей x_n, y_n будем называть соответственно последовательности $x_n + y_n$, $x_n - y_n$, $x_n \cdot y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ (в последнем случае предполагаем, что $y_n \ne 0\ \ \forall n \in \mathbf{N}$).

Определение 1.5. Последовательность α_n называется бесконечно малой последовательностью (б. м. п.), если ее предел существует и равен нулю.

Свойство 1. Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

►Пусть α_n, β_n – б. м. п. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения б. м. п. следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, т. е. $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_1, \forall n > n_1$: $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\exists n_2, \forall n > n_2 : |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда для всех $n > n_\varepsilon$ будем иметь

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \pm \beta_n) = 0$.◄

Свойство 2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

►Пусть α_n – б. м. п., β_n – ограниченная последовательность. Тогда найдется $C > 0$ такое, что $|\beta_n| < C$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По числу $\frac{\varepsilon}{C} > 0$ найдем такое n_ε, чтобы для всех $n > n_\varepsilon$ выполнялось неравенство $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{C}$. Следовательно, для всех n, больших n_ε, будет $|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$.◄

Следствие. Произведение бесконечно малой последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Определение 1.6. Если для любого наперед заданного числа $E > 0$ все члены последовательности β_n, начиная с некоторого номера, по модулю больше E, то β_n называется бесконечно большой последовательностью (б. б. п.), в символической форме: (β_n – б. б. п.) $\Leftrightarrow$ ($\forall E > 0, \exists n_E$, $\forall n > n_E : |\beta_n| > E$).

Если последовательность является бесконечно большой, то это кратко записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$.

Если все члены б. б. п. β_n, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), то последовательность называется сходящейся (в $\overline{\mathbf{R}}$) к бесконечному пределу $+\infty\,(-\infty)$. Записывают это так: $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=-\infty$.

Всякая б. б. п. расходится в $\mathbf{R}$. (Докажите.) Сходящаяся в $\mathbf{R}$ последовательность сходится и в $\overline{\mathbf{R}}$, так как ее предел принадлежит множеству $\overline{\mathbf{R}}$.

Пример 1.7. $\beta_n=(-1)^n\cdot n$ – б. б. п., $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot n=\infty$; б. б. п. $\beta_n=\sqrt{n}$ сходится в $\overline{\mathbf{R}}$ к $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$); $\beta_n=-\dfrac{n^2+1}{n+\pi}$ сходится в $\overline{\mathbf{R}}$ к $-\infty$. (Докажите самостоятельно.)

Очевидно, всякая б. б. п. не ограничена. Обратное, вообще говоря, неверно. Последовательность $1;4;1;4^2;1;6^2;1;8^2,\ldots,n^{1+(-1)^n},\ldots$ является неограниченной, однако она не является бесконечно большой. (Докажите самостоятельно.)

Свойство 3. Последовательность $\dfrac{1}{\beta_n}$, где β_n – б. б. п., является бесконечно малой последовательностью.

►Зададим $\forall\varepsilon>0$. Пусть $E=\dfrac{1}{\varepsilon}$. Так как β_n – б. б. п., то $\exists n_E$ такое, что для $\forall n>n_E$ выполняется неравенство $|\beta_n|>E\Leftrightarrow\left|\dfrac{1}{\beta_n}\right|<\dfrac{1}{E}=\varepsilon$.

Тогда для всех $n>n_E$ будет $\left|\dfrac{1}{\beta_n}\right|<\varepsilon$.◄

Упражнение 1.3. Докажите, что отношение ограниченной последовательности к б. б. п. есть б. м. п.

1.7. Предельный переход и арифметические операции

Лемма 1.1. Для того чтобы последовательность x_n сходилась к числу $a\in\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\alpha_n=x_n-a$ была бесконечно малой, т. е. $(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a)\Leftrightarrow(x_n-a=\alpha_n$ – б. м. п.).

Доказательство проведите самостоятельно.

Теорема 1.1. Пусть две последовательности x_n и y_n сходятся в $\mathbf{R}$. Тогда:

а) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

в) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ (если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$).

►Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. По лемме последовательности $\alpha_n = x_n - a$ и $\beta_n = y_n - b$ являются б. м. п.:

а) $x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$. По свойству 1 бесконечно малых последовательностей последовательность $\alpha_n \pm \beta_n$ есть б. м. п. Следовательно, из леммы 1.1 вытекает, что $a \pm b$ является пределом последовательности $x_n \pm y_n$, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $x_n \cdot y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$. Последовательности $a\beta_n$, $b\alpha_n$, $\alpha_n\beta_n$ по свойству 2 бесконечно малых последовательностей являются б. м. п. По свойству 1 бесконечно малых последовательностей последовательность $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ также б. м. п. Отсюда на основании леммы 1.1 заключаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

в) рассмотрим разность

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b+\beta_n} \cdot \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$. На основании свойств 1 и 2 бесконечно малых последовательностей $\left(\alpha_n - \dfrac{a}{b}\beta_n\right)$ есть б. м. п. Покажем, что последовательность $\dfrac{1}{b+\beta_n}$ ограничена. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, то существует n_1 такое, что для всех $n > n_1$ выполняется $\beta_n < \dfrac{|b|}{2}$.

Тогда

$$\left|\frac{1}{b+\beta_n}\right| = \frac{1}{|b+\beta_n|} \le \frac{1}{\big||b| - |\beta_n|\big|} < \frac{1}{|b| - \frac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|}$$

для всех $n > n_1$. Значит, последовательность $\frac{1}{b+\beta_n}$ ограничена. Последовательность $\frac{1}{b+\beta_n}(b\alpha_n - a\beta_n)$ – б. м. п. (свойство 2 бесконечно малых последовательностей). На основании леммы заключаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$. ◀

Следствие. Если $x_n = C$ есть постоянная последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, т. е. постоянную можно выносить за знак предела последовательности.

1.8. Неопределенные выражения

Сформулированная выше теорема, вообще говоря, не верна в $\overline{\mathbf{R}}$, если:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$), то разность этих последовательностей не удовлетворяет теореме;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$), то сумма этих последовательностей не удовлетворяет теореме;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, y_n – б. б. п., то произведение этих последовательностей не удовлетворяет теореме;

г) x_n – б. м. п. (б. б. п.), y_n – б. м. п. (б. б. п.), то отношение этих последовательностей не удовлетворяет теореме.

В этих случаях говорят, что имеет место неопределенность соответственно вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Нахождение пределов в этих случаях называется раскрытием неопределенностей.

Приведем примеры, подтверждающие сказанное выше.

Пример 1.8.

$$x_n = 2n;\ y_n = 2n+1;\ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty;\ \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1.$$

Пример 1.9. $x_n = n$; $y_n = n - (-1)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Последовательность $x_n - y_n = (-1)^n$ расходится.

Пример 1.10.

$$x_n = n + \frac{1}{n^5};\ y_n = 2n;\ \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

$$\text{но } \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(-n + \frac{1}{n^5}\right) = -\infty.$$

Пример 1.11.

$$x_n = (-1)^n n + 2n;\ y_n = 2n;\ \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty.$$

Выше приведены примеры раскрытия неопределенности вида $\infty - \infty$. Приведите аналогичные примеры для случая неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Из других неопределенных выражений отметим следующие: 0^0, ∞^0, 1^∞. В некоторых случаях их можно свести к ранее рассмотренным типам.

Пример 1.12. Последовательность $x_n = n^{1/n}$ представляет собой неопределенное выражение вида ∞^0. С помощью основного логарифмического тождества она может быть представлена в виде $x_n = e^{y_n}$, где $y_n = \frac{\ln n}{n}$ – неопределенное выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$.

1.9. Монотонные последовательности. Число e

Определение 1.7. Последовательность x_n называется:

возрастающей, если $x_{n'} > x_{n''}$ при любых натуральных $n' > n''$;

неубывающей, если $x_{n'} \ge x_{n''}$ при любых натуральных $n' > n''$;

убывающей, если $x_{n'} < x_{n''}$ при любых натуральных $n' > n''$;

невозрастающей, если $x_{n'} \le x_{n''}$ при любых натуральных $n' > n''$.

Последовательности, удовлетворяющие любому из перечисленных выше условий, называются *монотонными*. Возрастающие (убывающие) последовательности называются *строго монотонными* (монотонными «в строгом смысле»). Невозрастающие (неубывающие) последовательности называются монотонными «в широком смысле». Монотонные последовательности обладают рядом замечательных свойств.

Теорема 1.2 (о пределе монотонной последовательности). Всякая неубывающая (невозрастающая) монотонная последовательность x_n, ограниченная сверху (снизу), сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n\in\mathbf{N}\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n\in\mathbf{N}\}$).

►Пусть последовательность x_n не убывает. Тогда по условию теоремы множество $\{x_n \mid n\in\mathbf{N}\}$ ограничено сверху. Значит, $\exists \sup\{x_n \mid n\in\mathbf{N}\} = a\in\mathbf{R}$. Зададим $\varepsilon>0$. Из свойств точной верхней границы следует: 1) $x_n < a+\varepsilon$ для $\forall n>n_\varepsilon$, 2) $\exists n_\varepsilon$ такое, что $x_{n_\varepsilon} > a-\varepsilon$. Но тогда для любых $n>n_\varepsilon$ будет $x_n \ge x_{n_\varepsilon} > a-\varepsilon$, так как последовательность неубывающая. Следовательно, $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a|<\varepsilon$ при $\forall n>n_\varepsilon$. Отсюда заключаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ◄

Для случая невозрастающей последовательности теорема доказывается аналогичным образом.

Упражнение 1.3. Если неубывающая (невозрастающая) последовательность не ограничена сверху (снизу), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$). Докажите самостоятельно.

Пример 1.13. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и покажем, что она сходится. По формуле бинома Ньютона

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right);$$

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Так как $1-\frac{m}{n}<1-\frac{m}{n+1}$ для $m=1, 2, ..., n-1$, то члены x_n меньше соответствующих членов x_{n+1}, т. е. $x_n < x_{n+1}$. Кроме того, правая часть в представлении x_{n+1} имеет на одно (последнее) положительное слагаемое больше, чем правая часть в представлении x_n. Так как

$$\left(1-\frac{m}{n}\right)<1,\ \frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}\ (n\in\mathbf{N}),$$

то $$x_n<2+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=2+1-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Это показывает, что последовательность x_n монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме о пределе монотонной последовательности заключаем, что $\exists\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Этот предел принято обозначать буквой e. Можно доказать, что e иррационально и $e=2{,}71828182845904...$. Логарифмы с основанием e называются натуральными. Здесь мы раскрыли неопределенность вида 1^∞.

Пример 1.14. Доказать, что последовательность $x_1=3$, $x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$ сходится.

Докажем, используя метод математической индукции, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству $3\leq x_n<4$.

Очевидно, что x_1 удовлетворяет неравенству. Предположим, что оценка выполнена для x_n. Докажем, что она выполнена и для x_{n+1}: $3<\sqrt{15}\leq\sqrt{12+x_n}<\sqrt{16}=4$. Отсюда следует, что $\forall n\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство $(x_n-4)(x_n+3)<0\Leftrightarrow x_n^2-x_n-12<0\Leftrightarrow x_n^2<x_n+12$. Отсюда следует, что $x_n<\sqrt{12+x_n}=x_{n+1}$. Таким образом, последовательность x_n возрастает. Поскольку она ограничена, то имеет конечный предел. Обозначим его a. Перейдем к пределу при $n\to\infty$ в равенстве $x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$. Имеем $a=\sqrt{12+a}$. Отсюда $a=4$.

1.10. Некоторые свойства числовых множеств

Рассмотрим одно следствие из теоремы о пределе монотонной последовательности.

Лемма 1.2 (о вложенных отрезках – принцип вложенных отрезков Кантора). Пусть дана бесконечная последовательность вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq ... \supseteq [a_n, b_n] \supseteq ...$, где $a_n < b_n$. Если последовательность длин этих отрезков $(b_n - a_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю, то существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам (рис. 1.1).

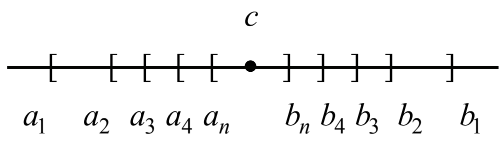

Рис. 1.1

Как геометрический факт мы принимали ранее эту лемму за аксиому. В анализе она может быть доказана на основании предыдущих результатов.

►Пусть $m < n$. Тогда

$$([a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]) \Leftrightarrow (a_m \le a_n < b_n \le b_m) \Rightarrow (a_m \le a_n) \wedge (b_n \le b_m).$$

Поэтому также выполняется соотношение $(a_m \le b_n) \wedge (a_n \le b_m)$. Таким образом, неубывающая последовательность a_n ограничена сверху числом b_m (m – любое), а невозрастающая последовательность b_m ограничена снизу числом a_n (n – любое). Следовательно, по теореме о пределе монотонной последовательности существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c = \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = d = \inf\{b_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, причем $a_n \le c$, $b_n \ge d$ для $n \in \mathbf{N}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = d - c = 0$ (по условию леммы), то $d = c$.

Докажем единственность.

От противного. Пусть существует еще одна точка $c' \ne c$ (считаем для определенности, что $c' > c$), принадлежащая всем отрезкам. Тогда для $\forall n \in \mathbf{N}$ будет $a_n \le c < c' \le b_n$. Отсюда $c' - c \le b_n - a_n$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получим, что $c' - c \le 0$. Но $c' - c > 0$. Противоречие. ◄

Истинна ли лемма о вложенных отрезках, если вместо отрезков взять интервалы (полуинтервалы)? Приведите примеры.

Рассмотрим функцию f, определенную на некотором множестве I, значениями которой являются подмножества множества E, т. е. $f : \alpha \in I \to X_\alpha \subset E$. Совокупность $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ называется семейством подмножеств множества E с индексом по множеству I.

Определение 1.8. Семейство $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ называется покрытием множества X (или покрывает X), если $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$. Подпокрытием данного покрытия называется покрытие множества X, образованное из подмножеств этого покрытия.

Лемма 1.3 (о конечном покрытии – принцип компактности Гейне – Бореля – Лебега). Любое покрытие отрезка $[a, b]$ бесконечным множеством интервалов содержит конечное число интервалов, покрывающих $[a, b]$, т. е. содержит конечное подпокрытие.

►Предположим противное, т. е. что существует такое покрытие отрезка $[a, b]$ бесконечным множеством интервалов, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия этого отрезка. Будем рассматривать это покрытие. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Из образовавшихся отрезков хотя бы для одного не существует конечного подпокрытия. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из отрезков, для которого не существует конечного подпокрытия. Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из отрезков, для которого не существует конечного подпокрытия. Этот процесс будем продолжать неограниченно. Тогда получим последовательность вложенных отрезков

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_{n-1},b_{n-1}] \supset \ldots .$$

Очевидно, длина n-го отрезка $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. По построению для $\forall n \in \mathbf{N}$ не существует конечного подпокрытия отрезка $[a_n, b_n]$. По лемме о вложенных отрезках заключаем, что существует число $c \in \mathbf{R}$ такое, что $c \in [a_n, b_n]$ при $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c.$ Так как $c \in [a_n, b_n]$, то существует интервал (α, β), принадлежащий рассматриваемому покрытию отрезка $[a, b]$, такой, что $c \in (\alpha, \beta)$. В силу того что $a_n \to c$ и $b_n \to c$ при $n \to \infty$, заключаем:

$(\exists n_c \in \mathbf{N}, \forall n > n_c : [a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta))$, т. е. отрезок $[a_n, b_n]$ покрыт одним интервалом (α, β).

По построению отрезок $[a_n, b_n]$ нельзя покрыть конечным числом интервалов из рассматриваемого покрытия. Полученное противоречие доказывает лемму. ◄

Истинна ли лемма в случае интервала (a, b)? Можно ли в условиях леммы множество интервалов заменить множеством отрезков? Приведите примеры.

Определение 1.9. Точка $c \in E$ называется внутренней точкой множества E, если множеству E принадлежит некоторая окрестность $U(c)$ этой точки.

Множество, все точки которого внутренние, называется открытым. Простейшим примером открытого множества является интервал.

Покрытие $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ множества X называется открытым, если все X_α являются открытыми множествами.

Множество X называется компактным, если из каждого открытого покрытия X можно выделить хотя бы одно конечное подпокрытие.

Из теоремы Гейне – Бореля – Лебега вытекает, что отрезок $[a, b]$ есть компактное множество. Докажите, что (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ не являются компактными множествами.

Определение 1.10. Точка называется предельной точкой множества X, если в любой ее окрестности содержится хотя бы одна точка этого множества, отличная от c.

Пример 1.15. $X = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbf{N} \right\}$. Точка $c = 0$ является предельной точкой этого множества, причем $c = 0 \notin X$.

Предельными точками множества $X = (a, b)$ являются все точки отрезка $[a, b]$. (Докажите самостоятельно.)

Докажите, что если c есть предельная точка множества X, то в любой окрестности $U(c)$ содержится бесконечно много различных точек множества X.

Упражнение 1.4. Пусть c – предельная точка множества X. Докажите, что существует последовательность x_n $(x_n \in X)$ точек, отличных от c, сходящаяся к c.

Лемма 1.4 (о предельной точке – принцип предельной точки Больцано – Вейерштрасса). Для каждого бесконечного числового множества X существует, по крайней мере, одна предельная точка.

►Так как X – ограниченное множество, то существуют числа $a, b \in \mathbf{R}$ такие, что $X \subset [a, b]$. Покажем, что, по крайней мере, одна точка отрезка $[a, b]$ является предельной для X.

От противного. Предположим, что ни одна из точек отрезка $[a, b]$ не является предельной для X. Тогда для каждой точки x отрезка $[a, b]$ можно указать окрестность $U(x)$, в которой или не содержится ни одной точки множества X, или содержится конечное их число. (Почему?) Для любой точки x, $a \leq x \leq b$, зафиксируем окрестность $U(x)$ в $\mathbf{R}$. Рассмотрим множество этих окрестностей $\{U(x) | a \leq x \leq b\}$. Очевидно, что оно образует покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме о конечном покрытии существует конечное подпокрытие $\{U(x_1), U(x_2), ..., U(x_n)\}$ отрезка $[a, b]$.

Имеем $X \subset [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} U(x_k) \Rightarrow X \subset \bigcup_{k=1}^{n} U(x_k)$. Поскольку в каждом интервале $U(x_k)$ содержится не более конечного числа точек множества X, то и объединение $\bigcup_{k=1}^{n} U(x_k)$ содержит не более конечного числа точек множества X.

Следовательно, X – конечное множество. Противоречие. ◄

Определение 1.11. Точка $c \in X$ называется изолированной точкой множества X, если существует ее окрестность, не содержащая ни одной точки этого множества, кроме самой точки c.

Точка c называется граничной точкой множества X, если в любой ее окрестности имеются точки как принадлежащие X, так и не принадлежащие X. Например, точки a и b являются граничными для множества $[a, b)$. (Почему?) Заметим, что граничные точки могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству X.

Замкнутым называется множество, содержащее все свои предельные точки. Отметим без доказательства, что всякое ограниченное замкнутое множество компактно в $\mathbf{R}$.

Отсюда следует, что любое конечное множество является компактным множеством.

1.11. Подпоследовательности. Критерий Коши

Пусть $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ – возрастающая функция, т. е. $f : k \in \mathbf{N} \to n_k \in \mathbf{N}$, причем если $k < k_1$, то $f(k) < f(k_1)$ или $n_k < n_{k_1}$.

Пусть x_n – некоторая числовая последовательность. Последовательность $y_k = x_{n_k}$ $(k \in \mathbf{N})$ называется подпоследовательностью последовательности x_n. Например, подпоследовательностью последовательности натуральных чисел будут простые числа, взятые в порядке возрастания.

Лемма 1.5. Если последовательность x_n сходится к числу $a \in \mathbf{R}$, то и любая ее подпоследовательность x_{n_k} сходится к a.

► $(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon)$.

Возьмем k_0 настолько большим, чтобы было $n_{k_0} > n_\varepsilon$. Тогда для $\forall k > k_0$ будет $n_k > n_{k_0} > n_\varepsilon$. Отсюда $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, т. е. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. ◄

Упражнение 1.5. Если любая подпоследовательность x_{n_k} последовательности x_n сходится к числу $a \in \mathbf{R}$, то $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите.

Докажите, что лемма 1.5 верна в случае, когда последовательность x_n сходится в $\overline{\mathbf{R}}$ к $+\infty$ (или $-\infty$).

Лемма 1.6. Из всякой ограниченной последовательности x_n можно выделить сходящуюся в $\mathbf{R}$ подпоследовательность.

► Если множество $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ содержит конечное число различных чисел, то хотя бы одно из них (пусть b) повторяется в последовательности x_n бесконечно много раз. Отбрасывая члены последовательности, отличные от b, получим подпоследовательность $x_{n_k} = b\ (k \in \mathbf{N})$, сходящуюся к b.

Пусть теперь множество $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ содержит бесконечное множество различных чисел. Поскольку множество $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ ограничено, то по принципу Больцано – Вейерштрасса существует предельная точка $a \in \mathbf{R}$ этого множества. Поэтому $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cap \dot{U}_{\frac{1}{k}}(a)$ содержит бесконечное множество различных членов последовательности x_n при $\forall k \in \mathbf{N}$. Пусть x_{n_1} – некоторый член последовательности x_n, содержащийся в $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cap \dot{U}_1(a)$. Так как $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cap \dot{U}_{\frac{1}{2}}(a)$ содержит бесконечное множество различных членов последовательности, то можно выбрать такой член последовательности $x_{n_2} \in \{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cap \dot{U}_{\frac{1}{2}}(a)$, что $x_{n_1} \neq x_{n_2}$, $n_2 > n_1$. Аналогично в множестве $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cap \dot{U}_{\frac{1}{3}}(a)$ можно выбрать член последовательности x_{n_3}, отличный от x_{n_1} и x_{n_2}, и такой, что $n_3 > n_2 > n_1$. Поступая так при $\forall k \in \mathbf{N}$, получим подпоследовательность x_{n_k}, члены которой удовлетворяют неравенству $|x_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$ (по построению). Очевидно, x_{n_k} сходится к a. ◄

Упражнение 1.6. Докажите, что всякая последовательность содержит сходящуюся в $\overline{\mathbf{R}}$ подпоследовательность.

Определение 1.12. Последовательность x_n называется фундаментальной, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует число n_ε такое, что для всех $n, m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Фундаментальные последовательности называют также последовательностями Коши. Сформулируем и докажем необходимый и достаточный признак (критерий) сходимости последовательности.

Теорема 1.3 (критерий Коши сходимости числовой последовательности). Числовая последовательность сходится в $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

► Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbf{R}$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и по числу $\dfrac{\varepsilon}{2}$ найдем n_ε так, чтобы для любого $n > n_\varepsilon$ и любого $m > n_\varepsilon$ было $\left(|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} \wedge |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. Тогда для любых $n, m > n_\varepsilon$ будем иметь $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Это и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть x_n – фундаментальная последовательность. Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbf{R}$. Покажем, что последовательность x_n ограничена. Действительно, задав $\varepsilon = 1$, найдем число n_1, что для $\forall n, m > n_1$ будет $|x_n - x_m| < 1$. Возьмем $m = n_1 + 1$. Тогда для $\forall n > n_1$ имеем $x_{n_1+1} - 1 < x_n < 1 + x_{n_1+1}$. Следовательно,

$$\min\{x_1, x_2, ..., x_{n_1}, x_{n_1+1} - 1\} \le x_n \le \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_1}, x_{n_1+1} + 1\}$$

для $\forall n \in \mathbf{N}$, т. е. последовательность x_n ограничена. По лемме 1.6 существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к некоторому $a \in \mathbf{R}$.

Зададим число $\varepsilon > 0$ и по числу $\dfrac{\varepsilon}{2}$ найдем числа k_ε и n_ε такие, чтобы выполнялись неравенства $|x_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall k > k_\varepsilon$ и $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall n, m > n_\varepsilon$. Это можно сделать, так как подпоследовательность x_{n_k} сходится к a, а последовательность x_n фундаментальная. Пусть теперь $n > n_\varepsilon$ и $n_k > \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$. Тогда

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\text{т. е. } (\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n > n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} x_n = a). \blacktriangleleft$$

П р и м е р 1.16. Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2!} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Воспользуемся критерием Коши:

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin m}{2^m}\right| <$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} + \ldots = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon;$$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > -\log_2 \varepsilon.$$

Если в качестве n_ε взять число $-\log_2 \varepsilon$, то для $\forall n, m > n_\varepsilon$ будет иметь место неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$, и, значит, по критерию Коши существует в $\mathbf{R}$ предел рассматриваемой последовательности. Критерий Коши, однако, не дает ответа на вопрос о значении этого предела.

1.12. Верхний и нижний пределы последовательности

Пусть x_n – произвольная последовательность, а x_{n_k} – некоторая ее подпоследовательность. Если x_{n_k} сходится в $\overline{\mathbf{R}}$, то предел ее будем называть частичным пределом последовательности x_n. Рассмотрим теперь совокупность всех подпоследовательностей x_{n_k} последовательности x_n, сходящихся в $\overline{\mathbf{R}}$. Множество всех частичных пределов обозначим A.

Легко показать, что любая последовательность имеет, по крайней мере, один частичный предел, конечный или бесконечный. Действительно, если последовательность x_n не ограничена сверху, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $+\infty$. (Докажите.) Следовательно, $+\infty$ будет ее частичным пределом. Если же последовательность не ограничена снизу, то ее частичным пределом будет $-\infty$. (Докажите самостоятельно.) Ограниченная последовательность имеет, по крайней мере, один конечный частичный предел. Отсюда заключаем, что множество $A \neq \varnothing$. Следовательно, $\exists \sup A \in \overline{\mathbf{R}}$, $\exists \inf A \in \overline{\mathbf{R}}$.

Определение 1.13. Верхним пределом последовательности x_n называется $\sup A$, обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$; нижним пределом последовательности называется $\inf A$, обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Лемма 1.7. Для любой последовательности существуют единственный верхний и единственный нижний пределы, и они связаны неравенством

$$-\infty \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le +\infty .$$

Доказательство вытекает из того, что множество частичных пределов не пусто и из единственности верхней и нижней граней числового множества, а также из неравенства $\inf A \le \sup A$.

Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 1.4. Последовательность x_n сходится в $\overline{\mathbf{R}}$ тогда и только тогда, когда

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n .$$

► Пусть

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n .$$

Покажем, что тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbf{R}} .$$

От противного. Если x_n не сходится в $\overline{\mathbf{R}}$, то существуют, по крайней мере, две подпоследовательности x'_{n_k} и x''_{n_k}, сходящиеся к двум различным пределам

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} \neq \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} .$$

Пусть

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} < \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} .$$

Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \lim_{k\to\infty} x'_{n_k} < \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n ,$$

что противоречит условию теоремы. Необходимость докажите самостоятельно. ◄

Пример 1.17. Последовательность $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ расходится, ибо $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

Задачи к главе 1

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}+3^{n+3}}{2^n+3^n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$, $(a>0)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}\right)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}-1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}\right)$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1})$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n-1)})$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a_1)(n+a_2)}-n)$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)}-n)$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$;

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$;

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{9}-1}$;

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$;

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2n}}$;

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$;

26) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-\lg n}{n-3,5}$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)^n$;

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^n$;

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{n^2}$;

30) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$;

31) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$;

32) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-2}{1+2+\ldots+n}$;

33) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^3}$;

34) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

2. Используя критерий Коши, докажите, что расходятся последовательности:

$$x_n=(0,2)^{(-1)^n},\ x_n=\frac{n\cos\pi n-1}{2n},\ x_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^2}.$$

3. Существует ли n, для которого $\sqrt[n]{n}<1,001$; $\sqrt{n^2+n}-n<0,5$?

4. Выясните, существуют ли наибольший и наименьший члены последовательностей:

$$x_n = \frac{n^2}{3^n};\ x_n = n + 3\sin\frac{\pi n}{2}.$$

5. Существует ли ограниченная последовательность, не имеющая наименьшего и наибольшего члена?

6. Докажите, что все члены последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, начиная с некоторого номера, лежат на отрезке $[2,7; 2,8]$.

7. Найдите n_ε такое, чтобы при $\forall n > n_\varepsilon$ выполнялись неравенства:

$$\frac{2}{n!} < 0,01;\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < 0,1.$$

8. Сформулируйте, что значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$.

9. Найдите величину дроби

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}} = \alpha.$$

10. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0\ \ (a>1)$.

11. Покажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right| = \frac{1}{2}$.

12. Установите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ (на языке «$\varepsilon - n$»).

13. Найдите предел последовательности

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots,\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}},\ \ldots .$$

14. Докажите, что монотонная последовательность сходится, если сходится какая-либо ее подпоследовательность.

15. Всегда ли сумма монотонных последовательностей монотонна?

16. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a$. Найдите необходимое и достаточное условие сходимости последовательности x_n.

17. Сформулируйте на языке «$\text{E} - n$» утверждение «последовательность не является бесконечно большой».

18. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

19. Последовательность $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$ расходится. Докажите.

20. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

21. Пользуясь критерием Коши, докажите, что последовательность

$$x_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$$

сходится в $\mathbf{R}$.

22. Найдите $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, если

$$x_n = -n[2+(-1)^n]; \quad x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2};$$

$$x_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots.$$

23. Докажите, что

$$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n.$$

24. Говорят, последовательность x_n имеет ограниченное изменение, если $\exists c > 0$ такое, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < c \ (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Докажите, что последовательность с ограниченным изменением сходится. Обратное, вообще говоря, неверно. Приведите примеры.

25. Если α_n – б. м. п., то $\dfrac{1}{\alpha_n}$ – б. б. п. Докажите.

ГЛАВА 2
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

2.1. Различные определения предела функции и их равносильность

Проколотой окрестностью $\dot{U}(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$ называется любая окрестность $U(a)$ точки a, из которой исключена сама эта точка. Проколотые окрестности точки a обладают двумя важнейшими свойствами:

а) $\dot{U}(a) \neq \varnothing$ (окрестность – непустое множество);

б) $\forall \dot{U}_1(a), \forall \dot{U}_2(a), \exists \dot{U}(a) : \dot{U}(a) \subset \dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a)$ (пересечение любых двух окрестностей содержит проколотую окрестность).

Далее в этой главе будем считать, что рассматриваемые функции определены в некоторой окрестности $W(a)$ точки a, за исключением, быть может, точки a.

Определение 2.1. Число A называется пределом функции f при x, стремящемся к a, если для каждой окрестности $V(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, образ которой содержится в $V(A)$, т. е. $\forall V(A), \exists \dot{U}(a) : f(\dot{U}(a)) \subset V(A)$ (определение предела на языке окрестностей).

Определение 2.2. Если $\forall \varepsilon > 0$ существует такая проколотая окрестность $\dot{U}_\varepsilon(a)$ точки a, что для $\forall x$ из $\dot{U}_\varepsilon(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то число A называется пределом функции f при $x \to a$.

Определение 2.3. Число A называется пределом функции f при $x \to a$, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, имеет место соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$ (определение предела на языке «$\varepsilon - \delta$»).

Определение 2.4. Если для любой последовательности x_n ($x_n \in \dot{W}(a)$ при $\forall n \in \mathbf{N}$), сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу A, то A называется пределом функции f при $x \to a$. (Определение предела на языке последовательностей.)

Тот факт, что число A является пределом функции f при $x \to a$, записывают так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $f(x) \to A$ при $x \to a$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$.

Равносильность первых трех определений вытекает из того, что в любой проколотой окрестности точки содержится симметричная проколотая окрестность и наоборот.

Докажем, что определение 2.4 равносильно остальным. Для этого покажем, что если число A является пределом функции f при $x \to a$ согласно определению 2.3, то оно является также пределом в смысле определения 2.4, и наоборот. Пусть для $\forall \varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любых x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Возьмем любую последовательность x_n $(x_n \in W(a), \forall n \in \mathbf{N})$, сходящуюся к a, и покажем, что последовательность значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу A. Подберем $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ так, чтобы было $|x_n - a| < \delta$ для $\forall n > n_\varepsilon$. Тогда для $\forall n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, т. е. последовательность значений функции сходится к A.

Справедливо и обратное. Докажем от противного. Пусть A не является пределом функции в смысле определения 2.3. Это значит, что $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ существует x_δ, удовлетворяющее неравенству $0 < |x_\delta - a| < \delta$, для которого $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$. Возьмем последовательность $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Тогда для каждого δ_n существует x_{δ_n} такое, что $|f(x_{\delta_n}) - A| \geq \varepsilon_0$. Так как $0 < |x_{\delta_n} - a| < \delta_n = \dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n \to a} x_{\delta_n} = a$ по свойству сжатой последовательности (свойство 4, подраздел 1.4). В то же время последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ не сходится к числу A. Противоречие.

Пример 2.1. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Действительно, $\left|x \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| \cdot \left|\sin\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftarrow |x| < \varepsilon$.

Возьмем $\delta = \varepsilon$, Тогда из определения вытекает, что нуль является пределом функции $x \cdot \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$. Сама функция в точке $x = 0$ не определена.

Пример 2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

$$|\cos x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \cos x < \varepsilon \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\sin\frac{x}{2}\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \Leftrightarrow \sin\frac{|x|}{2} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \Leftrightarrow |x| < 2\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$\left(\text{считаем, что } |x| < \frac{\pi}{2}\right)$. Полагая $\delta = 2\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, получим, что при $0 < x < \delta$ будет $|\cos x - 1| < \varepsilon$.

Пример 2.3. Докажем, что не существует $\lim\sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Воспользуемся определением предела на языке последовательностей. Возьмем две последовательности $x_n' = \frac{1}{\pi n}$ и $x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, сходящиеся к нулю. Последовательности значений функции $\sin\frac{1}{x_n'} = 0$, $\sin\frac{1}{x_n''} = 1$ сходятся соответственно к 0 и 1.

Следовательно, эта функция не может иметь предела при $x \to 0$.

Пример 2.4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$. Возьмем окрестность $V(4) = (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$ и найдем $\dot{U}(2)$ такую, чтобы ее образ при отображении $\frac{x^2-4}{x-2}$ содержался в $V(4)$. Рассмотрим неравенства $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon \ (x \in \dot{U}(2))$.

Отсюда видно, что за $\dot{U}(2)$ достаточно взять $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)\setminus\{2\}$. Из определения 2.3 следует утверждение. Отметим, что сама функция в данном случае не определена при $x = 2$.

Пример 2.5. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

Используем определение 2.3.
Оценим

$$|\sin x - 1| = |1-\sin x| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| \le 2\cdot 1\cdot\left|\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right| = \left|x-\frac{\pi}{2}\right|.$$

Если выбрать $\delta=\varepsilon$, то из неравенства $0<\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$ следует неравенство $|\sin x - 1|<\varepsilon$. Таким образом, $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta=\varepsilon$, $\forall x: 0<\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |\sin x - 1|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

Пример 2.6. Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2-100x+3000} = 0$.

Выберем удобную для дальнейших оценок окрестность точки $+\infty$ – луч $x>200$. Тогда для $x>200$ имеем $x^2-100x+3000 > x(x-100) > \dfrac{x^2}{2}$. Тогда $\left|\dfrac{x\sin x}{x^2-100x+3000}-0\right| < \dfrac{x}{\frac{x^2}{2}} = \dfrac{2}{x}$. Если $\Delta=\max\left\{200, \dfrac{2}{\varepsilon}\right\}$, то из неравенства $x>\Delta$ следует $\left|\dfrac{x\sin x}{x^2-100x+3000}\right|<\varepsilon$. Значит,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-100x+3000} = 0.$$

2.2. Общие свойства пределов

Свойство 1. Если в некоторой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a $f(x)\equiv A\in\mathbf{R}$, то предел ее при $x\to a$ существует и равен числу A.

► $f[\dot{U}(a)] = \{A\}\subset V(A)$ для любой окрестности $V(A)$ точки A. Из определения получаем: $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. ◄

Свойство 2. Если функция f имеет предел при $x \to a$, то значение этого предела единственно.

► Предположим противное. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_2$, $A_1 \neq A_2$.

Возьмем $V(A_1), V(A_2)$ – две непересекающиеся окрестности. Согласно определению существуют $\dot{U}_1(a)$ и $\dot{U}_2(a)$ такие, что $f[\dot{U}_1(a)] \subset V(A_1)$, $f[\dot{U}_2(a)] \subset V(A_2)$.

Возьмем теперь проколотую окрестность $\dot{U}(a) \subset \dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a)$. Тогда $\varnothing \neq f[\dot{U}(a)] \subset V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$. Противоречие. ◄

Функция $f: X \to \mathbf{R}$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $\{f(x) \mid x \in X\}$ значений функции. Функция f, ограниченная сверху и снизу на множестве X, называется ограниченной на X. Ограниченность функции f на множестве X равносильна существованию числа $C > 0$ такого, что $|f(x)| \leq C$ для $\forall x \in X$. Докажите.

Функция f называется финально ограниченной при $x \to a$, если существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, в которой она ограничена, т. е. $(\exists \dot{U}(a), \exists C \in \mathbf{R}, \forall x \in \dot{U}(a) : |f(x)| \leq C)$.

Понятия ограниченной функции и финальной ограниченности различны. Первое характеризует поведение функции на всем множестве, на котором она определена, второе – в некоторой окрестности точки. Например, функция $y = x^{-1}$ не ограничена на $(0, 1]$, но финально ограничена при $x \to a \in (0, 1]$. Докажите самостоятельно.

Свойство 3. Если существует предел функции f при $x \to a$, то f финально ограничена при $x \to a$.

► Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}$. Тогда для $\varepsilon = 1$ существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, в которой выполняется неравенство $|f(x) - A| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x) - A < 1 \Leftrightarrow A - 1 < f(x) < A + 1$. ◄

Утверждение, обратное утверждению свойства 3, вообще говоря, не верно. Приведите примеры.

2.3. Критерий Коши существования предела функции

Теорема 2.1 (критерий Коши существования предела функции в точке). Пусть $f: X \to \mathbf{R}$, x_0 – предельная точка множества X. Функция f имеет предел при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \, \forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow | f(x') - f(x'') | < \varepsilon.$$

► Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда для $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow$ $\Rightarrow | f(x) - A | < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда для произвольной пары точек

$$x', x'' \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow | f(x') - f(x'') | = | (f(x') - A) - (f(x'') - A) | \leq$$

$$\leq | f(x') - A | + | f(x'') - A | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, условие Коши выполняется.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть функция f удовлетворяет условию Коши. Зафиксируем $\varepsilon = 1$ и найдем

$$\delta_1 : \forall x', x'' \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0) \cap X \Rightarrow \; | f(x') - f(x'') | < 1.$$

Далее зафиксируем $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и найдем

$$\delta_2 : \forall x', x'' \in \dot{V}_{\delta_2}(x_0) \cap X \Rightarrow \left| f(x') - f(x'') \right| < \frac{1}{2}.$$

Очевидно, $\dot{U}_{\delta_1}(x_0) \cap \dot{V}_{\delta_2}(x_0)$ является непустой проколотой окрестностью точки x_0, следовательно, имеет непустое пересечение с множеством X. Обозначим $\dot{U}_{\delta_2}(x_0) = \dot{U}_{\delta_1}(x_0) \cap \dot{V}_{\delta_2}(x_0)$. Тогда $\dot{U}_{\delta_2}(x_0) \subseteq \dot{U}_{\delta_1}(x_0)$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность вложенных проколотых окрестностей

$$\dot{U}_{\delta_1}(x_0) \supseteq \dot{U}_{\delta_2}(x_0) \supseteq \ldots \supseteq \dot{V}_{\delta_n}(x_0) \supseteq \ldots.$$

Таким образом, любая точка, попавшая в окрестность с некоторым номером, принадлежит по построению любой окрестности с большим номером. Выберем по одному элементу из каждой окрестности $x \in \dot{U}_{\delta_n}(x_0)$. Тогда

$$\forall m, n \in \mathbf{N},\ |f(x_n) - f(x_m)| < \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}.$$

Это означает, что последовательность $(f(x_n))$ является фундаментальной, следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Пусть теперь ε – произвольное число, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда найдется число вида $\frac{1}{2n}$ такое, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$. По этому числу найдем соответствующее $\delta_{2n}^{(1)} : \forall x', x'' \in \dot{U}_{\delta_{2n}^{(1)}}(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2n}$.

С другой стороны, $\exists \delta_{2n}^{(2)} : \forall x_{2n} \in \dot{U}_{\delta_{2n}^{(2)}}(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x_{2n}) - A| < \frac{1}{2n}$.

Рассмотрим произвольное $x \in \dot{U}_{\delta_{2n}^{(1)}}(x_0) \cap \dot{U}_{\delta_{2n}^{(2)}}(x_0) \cap X$. Тогда, полагая $x'' = x_{2n}$, имеем $|f(x) - A| \le |f(x) - f(x_{2n})| + |f(x_{2n}) - A| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} < \varepsilon$. ◄

Замечание 2.1. Критерий Коши допускает равносильную формулировку через понятие колебания функции на множестве.

Определение 2.5. Пусть $f : X \to \mathbf{R}$. *Колебанием функции* f на множестве $M \subseteq X$ называется следующая величина:

$$\omega(f, M) := \sup_{x_1, x_2 \in M} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Если в неравенстве в условии Коши взять супремум по всем $x_1, x_2 \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X$, то получим следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{U}_\delta(x_0) : \omega(f, \dot{U}_\delta(x_0) \cap X) \le \varepsilon.$$

Таким образом, критерий Коши допускает следующую равносильную формулировку:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{U}_\delta(x_0) : \omega(f, \dot{U}_\delta(x_0) \cap X) \le \varepsilon.$$

Критерий Коши в такой формулировке удобно использовать, чтобы доказать, что предел не существует.

П р и м е р 2.7. Докажем, что не существует $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$. Колебание в любой проколотой окрестности точки $x_0=0$: $\omega(\operatorname{sgn}, \dot{U}(0))=2$. Таким образом, не существует конечного предела. Поскольку функция sgn ограничена на области определения, то не существует и бесконечного предела.

2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой (б. м.) при $x\to a$, если предел ее при $x\to a$ существует и равен нулю, т. е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Например, функция $x\sin\dfrac{1}{x}$ есть б. м. при $x\to 0$.

Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ ($+\infty$ или $-\infty$), если для $\forall E>0$ существует окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, в которой выполняется неравенство $|\beta(x)|>E$ ($\beta(x)>E$ или $\beta(x)<-E$). Например, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{|x|}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{|\sin x|}=-\infty$.

Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой (б. б.) при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$ ($+\infty$ или $-\infty$).

Заметим, что одна и та же функция может быть и б. м. и б. б. при стремлении x к различным точкам. Например, функция $\dfrac{x-1}{x+1}$ является б. м. при $x\to 1$ и б. б. при $x\to -1$.

Докажем некоторые свойства бесконечно малых функций.

Свойство 1. Сумма двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

► Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – б. м. функции при $x\to a$. Из определения предела следует, что для $\forall\varepsilon>0$ существуют окрестности $\dot{U}_1(a)$ и $\dot{U}_2(a)$ такие, что для $\forall x \in \dot{U}_1(a)$, $\forall x \in \dot{U}_2(a)$ выполняются соответственно неравенства $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $\forall x \in \dot{U}(a) \subset \dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a)$ будет $|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x \to a}[\alpha(x) + \beta(x)] = 0$. ◄

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Приведите примеры.

Свойство 2. Произведение бесконечно малой функции на финально ограниченную при $x \to a$ есть бесконечно малая функция.

► Так как $\beta(x)$ финально ограничена, то $\exists C > 0$ и окрестность $\dot{U}_1(a)$ точки a такая, что $|\beta(x)| < C$ для $\forall x \in \dot{U}_1(a)$.

$$(\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \dot{U}_2(a), \forall x \in \dot{U}_2(a) : |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \right).$$

Возьмем $\dot{U}(a) \subset \dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a)$. Тогда для $\forall x \in \dot{U}(a)$ будет $|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$. ◄

С л е д с т в и е. Произведение двух бесконечно малых функций при $x \to a$ есть бесконечно малая функция.

Свойство 3. Если $\beta(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ – бесконечно малая при $x \to a$.

► Так как $\beta(x)$ – б. б. функция при $x \to a$, то для любого числа $E = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ существует такая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, что для $\forall x \in \dot{U}(a)$ имеет место неравенство $|\beta(x)| > E \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\beta(x)} \right| < \frac{1}{E} = \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\beta(x)} = 0$. ◄

Если $\alpha(x)$ – б. м. при $x \to a$ и отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ – б. б. при $x \to a$. Докажите.

Заметим, что б. б. функция при $x \to a$ является неограниченной в любой окрестности точки a. Обратное, вообще говоря, неверно. Приведите пример функции, неограниченной в окрестности точки a, которая не является бесконечно большой.

2.5. Арифметические операции над функциями, имеющими предел

Лемма 2.1. Для того чтобы число A было пределом функции f при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \to a$.

►Необходимость.

$$(\lim_{x\to a} f(x) = A) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, 0 < |x-a| < \delta : |f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon).$$

Отсюда $\exists \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если $\alpha(x)$ – б. м. функция при $x \to a$, то

$$(\lim_{x\to a} f(x) = A) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, 0 < |x-a| < \delta : |\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Значит, $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. ◄

Теорема 2.2. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbf{R}$.

Тогда:

а) $\exists \lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

б) $\exists \lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;

в) $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ (если $B \neq 0$).

► Пусть $\alpha(x) = f(x) - A$, $\beta(x) = g(x) - B$. По лемме 2.1 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – б. м. функции при $x \to a$:

а) $f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + (\alpha(x) \pm \beta(x))$. Так как $[\alpha(x) \pm \beta(x)]$ – б. м. функции при $x \to a$, то $\exists \lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

б) $f(x) \cdot g(x) = [A + \alpha(x)] \cdot [B + \beta(x)] = A \cdot B + [A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \beta(x) \cdot \beta(x)]$.

Выражение $[A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \beta(x) \cdot \beta(x)]$ представляет собой б. м. функцию (свойства 1, 2 бесконечно малых функций). Из леммы 2.1 следует, что $\exists \lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

в) Поскольку $B \neq 0$, то существует окрестность $\dot{V}(a)$ точки a, в которой $g(x) \neq 0$. Рассмотрим в этой окрестности разность

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B+\beta(x)}\left(\alpha(x) - \frac{A}{B}\beta(x)\right).$$

$\beta(x)$ – б. м. функция при $x \to a$, поэтому существует такая окрестность $\dot{U}(a) \subset \dot{V}(a)$, что для $\forall x \in \dot{U}(a)$ будет $|\beta(x)| < \frac{|B|}{2}$. Тогда для $\forall x \in \dot{U}(a)$ имеем $\frac{1}{|B+\beta(x)|} \leq \frac{1}{\| B| - |\beta(x)\|} < \frac{1}{|B| - \frac{|B|}{2}} = \frac{2}{|B|}$, т. е. $\frac{1}{B+\beta(x)}$ является финально ограниченной функцией при $x \to a$. Из леммы следует, что $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$. ◄

Доказанная выше теорема, вообще говоря, неверна в $\overline{\mathbf{R}}$:
для предела разности, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = +\infty\ (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = -\infty)$$

(неопределенность вида $\infty - \infty$);
для предела суммы, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = -\infty\ (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = +\infty)$$

(неопределенность вида $\infty - \infty$);
для предела произведения, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ g(x) \text{ – б. б. функция при } x \to a$$

(неопределенность вида $0 \cdot \infty$);
для предела отношения, если

$$f(x) \text{ – б. м. функция, } g(x) \text{ – б. м. функция при } x \to a$$

$\left(\text{неопределенность вида } \frac{0}{0}\right)$;

$$\text{или } f(x) \text{ – б. б. функция, } g(x) \text{ – б. б. функция при } x \to a$$

$\left(\text{неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Нахождение пределов в таких случаях называется «раскрытием неопределенности». Приведите примеры, подтверждающие сказанное выше.

2.6. Сравнение бесконечно малых

Введем некоторые понятия и обозначения, позволяющие сравнивать предельное (асимптотическое) поведение бесконечно малых величин.

Определение 2.6. Пусть функции $f, g: X \to \mathbf{R}$ являются бесконечно малыми при $x \to x_0$, где $x_0 \in \mathbf{R}$ – предельная точка множества X, т. е.

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in X} f(x) = \lim_{x \to x_0,\, x \in X} g(x) = 0.$$

Предположим, что имеет место представление $f(x) = \alpha(x) g(x)$, $\forall x \in X$, тогда:

а) если $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$, то говорят, что функция f является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с функцией g; краткая запись:

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to x_0$$

(читается: «эф есть о малое от жэ»);

б) если $\alpha(x)$ финально ограничена при $x \to x_0$, то говорят, что функция f имеет порядок малости, не превосходящий порядка малости функции g; краткая запись:

$$f(x) = O(g(x)) \text{ при } x \to x_0$$

(читается: «эф есть О большое от жэ»);

в) если

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in X} f(x) = 1,$$

то говорят, что функции f и g эквивалентны при $x \to x_0$; краткая запись:

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to x_0;$$

г) если одновременно выполняются свойства $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что функции f и g имеют одинаковый порядок малости:

$$f(x) \asymp g(x) \text{ при } x \to x_0.$$

Замечание 2.2. Во всех случаях, за исключением случая в), функция $\alpha(x)$ не обязательно имеет предел при $x \to x_0$.

Замечание 2.3. Условия на функцию $\alpha(x)$, приведенные в определениях а), б) и в), не эквивалентны аналогичным условиям для отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$, поскольку последнее может быть не определено на множестве X.

Пример 2.8. Пара функций $f, g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = x \operatorname{sgn}^2 \sin\frac{1}{x}$ удовлетворяет условию $f(x) = O(g(x))$ при $x \to 0$ с $\alpha(x) = \sin\frac{1}{x}$. Функция $\alpha(x)$ финально ограничена при $x \to 0$. Однако отношение $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\operatorname{sgn}^2 \sin\frac{1}{x}}$ не является финально ограниченным при $x \to 0$, $x \in X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, так как это отношение определено только на $X \setminus \left\{\frac{1}{\pi n} : n \in \mathbf{Z}\right\}$.

Из определения предела функции и определения в) вытекает следующий критерий эквивалентности бесконечно малых функций: бесконечно малые функции $f, g : X \to \mathbf{R}$ эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to x_0$.

При решении различных задач оказывается полезным сравнить (если это возможно) бесконечно малую функцию с функцией вида $C(x - x_0)^n$, т. е. выделить главный член вида $C(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$.

Пример 2.9. Выделим главный член вида Cx^n для бесконечно малой функции $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ при $x \to 0$.

Преобразуем разность

$$\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x} =$$

$$= \frac{(1-2x)^3 - (1-3x)^2}{[(\sqrt{1-2x})^2 + \sqrt{1-2x}\sqrt[3]{1-3x} + (\sqrt[3]{1-3x})^2][(\sqrt{1-2x})^3 + (\sqrt[3]{1-3x})^3]} =$$

$$= \frac{3x^2 + 8x^3}{[(\sqrt{1-2x})^2 + \sqrt{1-2x}\sqrt[3]{1-3x} + (\sqrt[3]{1-3x})^2][(\sqrt{1-2x})^3 + (\sqrt[3]{1-3x})^3]}.$$

Поскольку знаменатель последней дроби стремится к 6 при $x \to 0$, то главный член для бесконечно малой функции $f(x)=\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$ при $x \to 0$ имеет вид $\frac{1}{2}x^2$.

Приведем некоторые свойства введенных выше символов, которые проверяются непосредственно.

Свойства. Пусть $f: X \to \mathbf{R}$ бесконечно малая при $x \to x_0$. Тогда

$$o(o(f(x))) = o(f(x)), \quad o(O(f(x))) = o(f(x)), \quad O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)),$$
$$O(O(f(x))) = O(f(x)), \quad O(o(f(x))) = o(f(x)), \quad o(f(x)) \cdot O(f(x)) = o(f^2(x)).$$

Замечание 2.4. Символы o, O, $\sim$ и $\asymp$ применяются также для сравнения бесконечно больших величин.

2.7. Предельный переход в неравенствах

Свойство 1. Если предел функции f при $x \to a$ равен A и $A < B$, то существует окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, в которой $f(x) < B$.

► $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbf{R}$. Возьмем $\varepsilon = B - A > 0$ и найдем окрестность $\dot{U}(a)$ точки a так, чтобы для $\forall x \in \dot{U}(a)$ было $|f(x) - A| < \varepsilon$. Отсюда

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \Rightarrow f(x) < A + \varepsilon = B.$$

Аналогично доказывается, что если $A > B$, то в некоторой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a $f(x) > B$. ◄

Сформулируйте утверждение, обратное свойству 1. Справедливо ли оно?

Свойство 2. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a $f(x) \le B$, то $A \le B$.

► От противного. Если $A > B$, то по свойству плотности множества вещественных чисел $\exists C \in \mathbf{R}$ такое, что $A > C > B$. Отсюда $\exists \dot{U}_1(a)$, $\forall x \in \dot{U}_1(a): f(x) > C$. Следовательно, для $\forall x \in \dot{U}(a) \cap \dot{U}_1(a)$ будет $f(x) > C > B$. Противоречие.◄

Если в некоторой окрестности точки a $f(x) \ge B$, то $A \ge B$. Докажите самостоятельно.

Сформулируйте утверждение, обратное свойству 2, и выясните его истинность.

Замечание 2.5. Из выполнения в некоторой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a строгого неравенства $f(x) < B$ (или $f(x) > B$) не следует еще, что $A < B$ (или $A > B$). Например, $x^2 > 0$, если $x \neq 0$. Однако $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

Свойство 3. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A$ и в некоторой окрестности $\dot{V}(a)$ точки a выполняется неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Тогда существует предел функции g при $x \to a$, равный A.

► Зададим $\varepsilon > 0$. По нему найдем окрестности $\dot{U}_1(a)$ и $\dot{U}_2(a)$ так, чтобы для $\forall x \in \dot{U}_1(a)$ и $\forall x \in \dot{U}_2(a)$ выполнялись соответственно неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$, $|h(x) - A| < \varepsilon$. Возьмем теперь окрестность $\dot{U}(a) \subset \dot{U}_1(a) \cap \dot{U}_2(a) \cap \dot{V}(a)$. Тогда для $\forall x \in \dot{U}(a)$ будет $A - \varepsilon < f(x) \leq$ $\leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - A| < \varepsilon$. Из определения предела функции следует, что $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$. ◄

Свойство 3 называют свойством «сжатой» переменной.

2.8. Терема о пределе композиции функций

Определение 2.7. Пусть $f : X \to \mathbf{R}$, $X_0 \subset X$. Функция g, определенная на X_0 равенством $g(x) = f(x), x \in X_0$, называется сужением функции f на X_0 и обозначается

$$g = f\big|_{X_0}.$$

С другой стороны, любая функция f, определенная на большем множестве X и совпадающая с g на меньшем множестве X_0, называется продолжением g с X_0 на X.

Утверждение. Пусть $f : X \to \mathbf{R}$, x_0 – предельная точка множества X. Пусть $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = A$.

Если x_0 является также предельной точкой множества $X_0 \subseteq X$, то

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_0}} f(x)\big|_{X_0} = A.$$

Заметим, что дополнительное условие «x_0 – предельная точка множества X_0» отбросить, вообще говоря, нельзя. В противном случае $\dot{U}(x_0) \cap X_0$ может оказаться пустым множеством.

Доказательство очевидно, так как значения функции f в точках пересечения $\dot{U}(x_0)$ с X_0 совпадают со значениями $f\big|_{X_0}$ в этих точках.

Определение 2.8. Пусть $f : X \to \mathbf{R}$, $Y \supseteq f(X)$, $g : Y \to \mathbf{R}$. Тогда функция F, определенная на X равенством

$$F(x) = g(f(x)),$$

называется *композицией* функций f и g и обозначается $F := f \circ g$.

Очевидно: композиция функций не является перестановочной операцией, более того, если композиция $f \circ g$ определена, то не обязательно определена композиция $g \circ f$.

Теорема 2.3 (о пределе композиции). Пусть $f : X \to \mathbf{R}$, $Y \supseteq f(X)$, $g : Y \to \mathbf{R}$, а x_0 – предельная точка множества X, причем

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = y_0. \tag{1}$$

Если при этом y_0 – предельная точка множества Y и, кроме того,

$$\exists \dot{V}(x_0) : \forall x \in \dot{V}(x_0),\ f(x) \neq y_0,$$

$$\exists \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in Y}} g(y) = B, \tag{2}$$

то

$$\exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} (g \circ f)(x) = B. \tag{3}$$

►Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из условия (2) следует, что $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) \Rightarrow |g(y) - B| < \varepsilon$. С другой стороны, из (1) следует, что для $\delta > 0$ найдется $\gamma = \gamma(\delta) : \forall x \in \dot{U}_\gamma(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta$. Следовательно, $\forall x \in \dot{U}_\gamma(x_0) \cap \dot{V}(x_0)$ $f(x) \in \dot{U}_\delta(y_0)$. Отсюда вытекает, что $f(x) \in \dot{U}_\delta(y_0) \cap Y$ (так как $f(X) \subseteq Y$). Поэтому $|g(f(x)) - B| < \varepsilon$. ◄

Замечание 2.6. Условие $f(x) \neq y_0$ в теореме о пределе композиции является существенным.

Пример 2.10. Рассмотрим функции $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(y) = |\operatorname{sgn} y|$.

Для этой пары функций выполняются следующие условия:

1) на множестве $X = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ определена композиция $g \circ f$;

2) точка $x_0 = 0$ – предельная точка множества X;

3) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x) = y_0 = 0$;

4) точка $y_0 = 0$ – предельная точка множества $Y = \mathbf{R}$;

5) $\exists \lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in Y}} g(y) = B = 1$.

Однако предел композиции функций не существует. Действительно, рассмотрим две последовательности:

$$x_n' = \frac{1}{\pi n},\ n \in \mathbf{N}, \quad x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n},\ n \in \mathbf{N},$$

сходящиеся к $x_0 = 0$. Для них имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left| \operatorname{sgn}\left(x_n' \sin \frac{1}{x_n'} \right) \right| = 0,\ \lim_{n \to \infty} \left| \operatorname{sgn}\left(x_n'' \sin \frac{1}{x_n''} \right) \right| = 1,$$

т. е. предел композиции функций не существует. Это означает, что перечисленных условий недостаточно для существования предела композиции. Заметим, что при этом условие теоремы $\exists \dot{V}(x_0)$: $\forall x \in \dot{V}(x_0)$, $f(x) \neq y_0$ не выполняется.

2.9. Предел монотонной функции

Определение 2.9. Функция $f: X \to \mathbf{R}$ называется:

а) возрастающей на множестве X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

б) убывающей на множестве X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

в) невозрастающей на множестве X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X,\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

г) неубывающей на множестве X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X,\, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Функции всех четырех указанных типов называют монотонными.

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Обозначим $\dot{U}_+(x_0) = U(x_0) \cap X \cap (x_0, +\infty)$ правостороннюю проколотую окрестность точки x_0 в X, $\dot{U}_-(x_0) = U(x_0) \cap X \cap (-\infty, x_0)$ левостороннюю проколотую окрестность точки x_0 в X, где $U(x_0)$ – окрестность x_0.

Теорема 2.4. (критерий существования предела монотонной функции). Пусть f – неубывающая функция в некоторой правосторонней проколотой окрестности $\dot{U}_+(x_0)$ в X (левосторонней проколотой окрестности $\dot{U}_-(x_0)$ в X), x_0 – предельная точка $\dot{U}_+(x_0)$ ($\dot{U}_-(x_0)$ соответственно).

Функция f имеет предел при $x \to x_0$, $x \in \dot{U}_+(x_0)$ ($x \in \dot{U}_-(x_0)$), тогда и только тогда, когда она ограничена снизу (сверху, соответственно).

►Доказательство основано на определении Гейне и критерии сходимости монотонной последовательности.◄

2.10. Замечательные пределы

П р и м е р 2.11 (первый замечательный предел). $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.}$

Рассмотрим круг единичного радиуса с центром в начале координат. Будем считать, что $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Очевидно: площадь $S_{\Delta OAB} < S_{\measuredangle OAB} < S_{\Delta OCB}$ (рис. 2.1). Отсюда

$$\left(\frac{1}{2}|AO||OB|\sin x < \frac{1}{2}|AO|^2 x < \frac{1}{2}|OB|^2 \operatorname{tg} x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x < x < \operatorname{tg} x) \Leftrightarrow \left(\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\right).$$

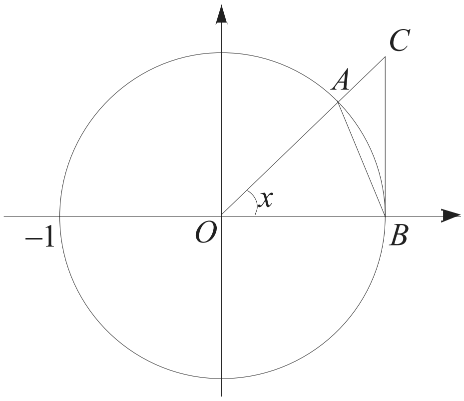

Рис. 2.1

В силу четности неравенство $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ имеет место для $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, то по свойству «сжатой» переменной заключаем, что $\exists \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

П р и м е р 2.12 (второй замечательный предел).

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \Leftrightarrow \boxed{\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.}$$

Ранее было показано, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$.

Можно показать, что $\lim\limits_{m\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m} = e$.

Действительно, заменив m на $-n$, получим

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n}{n-1}} = e.$$

Поэтому при доказательстве замечательного предела достаточно рассмотреть случай, когда $y \to +\infty$.

Имеет место следующее очевидное неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{[y]+1}\right)^{[y]} < \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} < \left(1+\frac{1}{[y]}\right)^{[y]+1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, то

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_\varepsilon:\ \forall n>n_\varepsilon \Rightarrow\ e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<e+\varepsilon,\ e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e+\varepsilon.$$

Тогда, в частности, $\forall y>n_\varepsilon+1$ ($\Rightarrow [y]>n_\varepsilon$) выполнено

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[y]+1}\right)^{[y]} < \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} < \left(1+\frac{1}{[y]}\right)^{[y]+1}<e+\varepsilon.$$

А это значит, что

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

На основании теоремы 2.3 о пределе композиции несложно получить первый из указанных пределов с помощью замены $y=\frac{1}{x}$.

Пример 2.13 (третий замечательный предел).

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\ a>0,\ a\neq1.}$$

Легко видеть, что достаточно рассмотреть предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Действительно,

$$\forall u>0,\ \log_a u=\frac{\ln u}{\ln a}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\ln a}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Обозначая $y=f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $z=g(y)=\ln y$, мы приходим к теореме о пределе композиции. При этом нужно воспользоваться вторым замечательным пределом, а также свойством

$$\lim_{y\to e}\ln y=1$$

и неравенством $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}} \neq e\ \forall x \neq 0$. Последнее свойство следует из монотонности функции f. Свойство $\lim\limits_{y\to e}\ln y = 1 = \ln e$ называется свойством непрерывности функции $\ln$ в точке $y=e$ и доказывается непосредственно. Выберем $\forall\varepsilon>0$. Получим $|\ln y-\ln e|<\varepsilon \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\varepsilon<\ln\frac{y}{e}<\varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon}<\frac{y}{e}<e^{\varepsilon} \Leftrightarrow e^{1-\varepsilon}<y<e^{1+\varepsilon}$.

Последнее множество является искомой окрестностью точки $y=e$, правда несимметричной.

П р и м е р 2.14 (четвертый замечательный предел).

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0,\ a\neq 1.}$$

Теорема о пределе композиции позволяет свести этот пример к пределу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

Делая замену переменных $t=e^x-1$, получим $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$ (третий замечательный предел). При этом $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$. Действительно, выберем $\forall\varepsilon: 0<\varepsilon<1$. Тогда

$$|e^x-e^0|<\varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon<e^x<1+\varepsilon \Leftrightarrow \ln(1-\varepsilon)<x<\ln(1+\varepsilon).$$

Последний интервал является искомой окрестностью (хотя и несимметричной) точки $x=0$.

П р и м е р 2.15 (пятый замечательный предел).

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.}$$

Преобразуя отношение и используя ранее установленные результаты, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}\alpha=\alpha .$$

П р и м е р 2.16. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1-\sin x}{\ln(1+x)} .$$

Воспользуемся арифметикой пределов и замечательными пределами и получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1-\sin x}{\ln(1+x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{\frac{1}{3}-1}{1}=-\frac{2}{3} .$$

Задачи к главе 2

1. Докажите, что произведение конечного числа финально ограниченных функций при $x\to a$, среди которых, по крайней мере, одна б. м., есть б. м. функция.

2. Пусть $f:(a, b)\to \mathbf{R}$ финально ограничена в каждой точке интервала. Будет ли она ограничена на (a, b)? Приведите примеры.

3. Является ли функция $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ б. б. при $x\to 0$?

4. Найдите точные границы множества значений функции $f(x)=\sin x+\cos x,\ \ x\in[0, 2\pi]$.

5. Найдите пределы:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1},\quad \lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}},\quad \lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a},\quad \lim_{x\to 0}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right].$$

6. Докажите на языке «$\varepsilon-\delta$», что $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)=3$.

7. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$ $(a>0)$.

8. $\lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a$. Докажите.

9. Найдите пределы:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\ \ (m,n\in\mathbf{Z}\,|\,\{0\}),\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[4]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}.$$

10. Сформулируйте отрицание определения предела функции (определения 2.1–2.4).

11. Дайте геометрическую интерпретацию предела функции.

12. Докажите равенства при $x\to 0$:

а) $x\sin\sqrt{x}=x^{3/2}+o(x^{3/2})$;

б) $\ln x=o(x^{-\varepsilon})\ \forall\varepsilon>0$;

в) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$;

г) $\operatorname{tg}x=x+\dfrac{x^3}{3}+O(x^5)$.

13. Покажите, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x\to 0$, и найти функцию $g(x)$ вида Cx^n такую, что $f(x)\sim g(x)$ при $x\to 0$:

а) $3\sin^2 x^2-3x^4$;

б) $1-x^2-\cos^2 x$;

в) $\operatorname{tg}2x-2\sin x$;

г) $2^{x^2}-1-\ln(1+x)$.

14. Определите, при каких α и β функции $f(x)$ и $g(x)=\alpha x^{\beta}$ эквивалентны:

1) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$: а) $x\to+0$, б) $x\to+\infty$;

2) $f(x)=\dfrac{\sin(1/(x+1))}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$: а) $x\to+0$, б) $x\to+\infty$;

3) $f(x)=2e^{x^2}+4\cos x-6$ при $x\to+0$;

4) $f(x)=1-\cos\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ $x\to+\infty$.

15. Пусть $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=x_0$, причем $\varphi(t)\neq x_0$ при $t\neq t_0$ в некоторой окрестности точки t_0. Докажите, что:

а) если $f(x)=o(g(x))$ при $x\to x_0$, то $f(\varphi(t))=o(g(\varphi(t)))$ при $t\to t_0$;

б) если $f(x)=O(g(x))$ при $x\to x_0$, то $f(\varphi(t))=O(g(\varphi(t)))$ при $t\to t_0$.

Глава 3
НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. Понятие непрерывности функции

На основании изложенного в предыдущих главах можно сделать вывод, что имеется очень мало свойств, которыми обладают все функции сразу. Поэтому в дальнейшем будем выделять некоторые множества (классы) функций. Каждая функция класса будет характеризоваться определенными свойствами, присущими всем функциям данного множества.

Характерное свойство класса функций, рассматриваемого в данной главе, – непрерывность. Такими функциями, например, описываются физические процессы, которые протекают непрерывно (плавно, не скачкообразно).

Различные определения непрерывности функции в точке

В основе понятия непрерывности функции $f: X \to \mathbf{R}$ лежит интуитивное представление о неразрывности («сплошности») ее графика.

Дадим общее определение непрерывности функции в точке.

Определение 3.1. Функция $f: X \to \mathbf{R}$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если $\exists A \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X:\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Поясним введенное определение.

Замечание 3.1. В определении 3.1 непрерывности функции $f: X \to \mathbf{R}$ в точке a предполагается, что $a \in X$ (в отличие от определения предела функции в точке). Это значит, что если $a \notin X$ (другими словами, функция f не определена в точке a), то говорить о ее непрерывности в точке a не имеет смысла.

Замечание 3.2. Определение 3.1 не содержит информации о величине предела. Докажем, что число A равно $f(a)$. Действительно, точка a удовлетворяет условиям: $a \in X$, $|a-a| < \delta$ (причем $\forall \delta > 0$). Следовательно, для $\forall \varepsilon > 0$ должно выполняться неравенство $|f(a) - A| < \varepsilon$, что и означает $A = f(a)$.

Замечание 3.3. Если a – изолированная точка множества X, то любая функция $f: X \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке a. В самом деле, из определения изолированной точки множества вытекает, что существует $\delta_0 > 0$: $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < \delta_0\} \cap X = \{a\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < \delta_0\} \cap X$ выполняется $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| < \varepsilon$.

В частности, поскольку все точки множества $\mathbf{N}$ изолированы, то любая числовая последовательность (т. е. функция $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$) непрерывна в каждой точке $n \in \mathbf{N}$.

Учитывая замечание 3.3, будем в дальнейшем рассматривать только такие случаи, когда a – неизолированная (предельная) точка множества X. В таких случаях можно дать определение непрерывности, используя понятие проколотых окрестностей точки a в множестве X.

Определение 3.2. Функция $f: X \to \mathbf{R}$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Из определения 3.2 следует, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$, так как $a = \lim\limits_{x \to a} x$. Последнее означает, что непрерывные в точке a функции можно охарактеризовать тем, что для них являются перестановочными операции $(\lim)$ перехода к пределу при $x \to a$, $x \in X$, и операция (f) вычисления значения функции f в точке a.

Замечание 3.4. Функция f называется непрерывной в точке $a \in X$ справа (слева), если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ $(\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a))$.

Отсюда вытекает, например, что если существует окрестность $\dot{U}_-(a)$ $(\dot{U}_+(a))$, в которой функция f не определена, то эта функция непрерывна слева (справа) в точке a.

Так, функция

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

непрерывна в точке $x = 1$ слева (как, впрочем, и справа).

Упражнение 3.1. Для того чтобы функция f была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной справа и слева в этой точке. Докажите самостоятельно.

Приведем различные формы определения непрерывности функции в точке (их равносильность вытекает из равносильности ранее сформулированных определений предела функции в точке).

Определение 3.3. Функция f непрерывна в точке $a \in X$, если для каждой окрестности $V(f(a))$ точки $f(a)$ существует окрестность $U(a)$ точки a, образ пересечения которой с X содержится в $V(f(a))$, т. е. $f(U(a) \cap X) \subset V(f(a))$.

Определение 3.4. Функция f непрерывна в точке $a \in X$, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место соотношение $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Определение 3.5. Функция f непрерывна в точке $a \in X$, если для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, сходящейся к a, соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(a)$.

При исследовании непрерывности функции в точке используется то из определений, которое быстрее приводит к цели.

Упражнение 3.2. Сформулируйте отрицание непрерывности функции в точке для каждого из определений 3.5.

Замечание 3.5. Из определения 3.1 и критерия Коши существования предела функции в точке следует, что функция непрерывна в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0$ найдется окрестность $U_X^{\delta}(a)$ точки a в X такая, на которой колебание

$$\omega(U_X^{\delta}(a), f) = \sup_{x_1, x_2 \in X} |f(x_1) - f(x_2)|$$

функции меньше ε.

Определение 3.6. Величина $\omega(a, f) = \lim\limits_{\delta \to +0} \omega(U_X^{\delta}(a), f)$ (где $U_X^{\delta}(a)$ есть δ-окрестность точки a в множестве X) называется колебанием функции $f : X \to \mathbf{R}$ в точке a.

Для колебания функции в точке употребляется тот же символ, что и для колебания функции на множестве, хотя первое и не является частным случаем второго (колебание функции на множестве, состоящем из одной точки, всегда равно нулю, поэтому под колебанием функции в точке всегда будет пониматься только то, что введено в определении 3.6).

Если $U_X^{\delta_1}(a) \subset U_X^{\delta_2}(a)$, то $\omega(U_X^{\delta_1}(a), f) \leq \omega(U_X^{\delta_2}(a), f)$, т. е. величина $\omega(U_X^{\delta}(a), f)$ является неубывающей функцией от δ.

Кроме того, $\omega(U_X^\delta(a), f) > 0$. Следовательно, по свойствам монотонных функций либо существует конечный предел $\omega(U_X^\delta(a), f)$ при $\delta \to +0$, либо для всех $\delta > 0$ $\omega(U_X^\delta(a), f) = +\infty$ (в последнем случае естественно считать $\omega(a, f) = +\infty$). Таким образом, величина $\omega(a, f)$ всегда определена.

В силу замечания 3.5, функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда ее колебание в этой точке равно нулю: $\omega(a, f) = 0$.

Приведем еще одно определение непрерывности в терминах приращений, которые определяются следующим образом.

Определение 3.7. Пусть $a \in X$ – предельная точка множества X. Разность $\Delta x = x - a$, где $x \in X$, называется приращением переменной x в точке a. Для функции $f : X \to \mathbf{R}$ разность $\Delta f(a) = f(x) - f(a)$ называется приращением функции f в точке a, соответствующим приращению Δx.

Если функция f непрерывна в точке $a \in X$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Другими словами, $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0$. Отсюда получаем следующее определение.

Определение 3.8. Функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если в этой точке бесконечно малому приращению Δx переменной (аргумента) x соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(a)$.

Определение 3.9. Функция $f : X \to \mathbf{R}$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Класс функций, непрерывных на X, обозначается символом $C(X)$.

Замечание 3.6. Если функция f непрерывна на некотором множестве X, то ее сужение $f|_D$ (см. определение 2.7) на любое подмножество $D \subset X$ непрерывно на D.

Примеры исследования функций на непрерывность

Пример 3.1. Постоянная функция $f : x \mapsto M$ непрерывна на $\mathbf{R}$. Действительно, $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall U_\delta(a)$ имеем $\omega(U_\delta(a), f) = 0$. Следовательно, $\omega(a, f) = \lim\limits_{\delta \to +0} \omega(U_\delta(a), f) = 0$, и поэтому f непрерывна в любой точке.

Пример 3.2. Тождественная функция $f : x \mapsto x$ непрерывна на $\mathbf{R}$. Здесь $\Delta f(a) := f(x) - f(a) = x - a = \Delta x$, поэтому f непрерывна в произвольной точке $a \in \mathbf{R}$ согласно определению 3.8.

Пример 3.3. Функция $\sin$ непрерывна на $\mathbf{R}$. В самом деле, $\forall a \in \mathbf{R}$ имеем

$$0 \le |\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x-a}{2}\right| \le |x-a|.$$

Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ в качестве δ можно взять $\delta = \varepsilon$ и функция $\sin$ будет непрерывной в любой точке $a \in \mathbf{R}$ по определению 3.4.

Пример 3.4. Функция $\ln$ непрерывна на $(0, +\infty)$. Зададим окрестность $V_\varepsilon(\ln a)$ и решим неравенство $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$:

$$(\ln a - \varepsilon < \ln x < \ln a + \varepsilon) \Leftrightarrow (ae^{-\varepsilon} < x < ae^{\varepsilon}).$$

Выберем $\delta = \min\{a(e^{\varepsilon} - 1), a(1 - e^{-\varepsilon})\}$. Тогда $U_\delta(a) \subset (ae^{-\varepsilon}, ae^{\varepsilon})$, т. е. $\ln(U_\delta(a)) \subset V_\varepsilon(\ln a)$, что и означает непрерывность функции $\ln$, в произвольной точке $a \in (0, +\infty)$ (см. определение 3.3).

Пример 3.5. Функция $f : f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \ne 0$, $f(0) = b$, ни при каком $b \in \mathbf{R}$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Возьмем две последовательности:

$$x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}, \quad x''_n = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n}.$$

Для них

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = -1,$$

а значит, получено противоречие определению 3.5.

3.2. Точки разрыва и их классификация

Будем предполагать здесь и далее, если не оговорено противное, что $f : X \to \mathbf{R}$ и a – предельная точка множества X.

Определение 3.10. Функция $f: X \to \mathbf{R}$ называется разрывной в точке $a \in X$, если в этой точке она не является непрерывной, т. е. либо не существует ее предел при $x \to a$, либо существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, но он не равен $f(a)$. При этом a называется точкой разрыва функции f.

Классификацию точек разрыва проведем, используя понятие односторонних пределов (пределов слева и справа).

Определение 3.11. Если существует конечный предел функции f при $x \to a$, не равный $f(a)$, то точка a называется точкой устранимого разрыва функции $f: X \to \mathbf{R}$ (т. е. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$), т. е. существуют равные между собой односторонние пределы, отличные от $f(a)$.

Название «устранимый разрыв» связано с тем, что в этом случае можно построить новую функцию $f_1: X \to \mathbf{R}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), x \neq a, \\ \lim\limits_{x \to a} f(x), x = a, \end{cases}$$

которая уже будет непрерывной в точке a.

Рассмотрим, например, функцию $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0).$$

Таким образом, функция f имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$. Полагая $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ и $f_1(x) = 1$, получим функцию, непрерывную при $x = 0$.

Определение 3.12. Если существуют конечные односторонние пределы функции f при $x \to a$, различные между собой, то a называется точкой разрыва первого рода функции $f: X \to \mathbf{R}$, т. е.

$$\exists \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0),\ \exists \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0),$$
$$\text{но } f(a-0) \neq f(a+0).$$

Например, функция sgn, определенная равенствами

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

имеет разрыв первого рода в точке $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{sgn}x=-1$, $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{sgn}x=1$. При этом заметим, что функция sgn не является непрерывной в точке $x=0$ ни слева, ни справа.

Функция $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=[x]$ (целая часть числа x) имеет разрывы первого рода во всех целых точках $n\in\mathbf{Z}$, причем $\lim\limits_{x\to n-0}[x]=n-1$, $\lim\limits_{x\to n+0}[x]=n=[n]=f(n)$.

Последнее равенство показывает, что данная функция непрерывна справа в точках $n\in\mathbf{Z}$.

Определение 3.13. Точкой разрыва второго рода называется любая точка разрыва, которая не является ни точкой устранимого разрыва, ни точкой разрыва первого рода (т. е. если не существует в $\mathbf{R}$ хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$).

Не давая дальнейшей классификации точек разрыва второго рода, приведем здесь характерные примеры функций, имеющих точки разрыва второго рода.

Пример 3.6. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\neq0$ и $f(0)=0$.

Выше было показано, что точка $x=0$ – точка разрыва функции f. Легко проверить, что не существуют $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$, т. е. $x=0$ – точка разрыва второго рода рассматриваемой функции.

Пример 3.7. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ при $x\neq0$ и $f(0)=0$. Имеем

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}e^{-t}=0=f(0),$$

т. е. f непрерывна справа в точке $x=0$. С другой стороны,

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}e^{-t}=+\infty.$$

Таким образом, данная функция имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода.

Пример 3.8. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$ при $x\neq\pi n$ и $f(\pi n)=0, n\in\mathbf{Z}$. Тогда $\forall n\in\mathbf{Z}$ получим:

$$\lim_{x\to\pi n-0} f(x)=\lim_{x\to\pi n-0}\operatorname{ctg} x=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\pi n+0} f(x)=\lim_{x\to\pi n+0}\operatorname{ctg} x=+\infty.$$

Следовательно, любая точка $x=\pi n$ является точкой разрыва второго рода для рассматриваемой функции.

Пример 3.9. Функция Дирихле:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Так как в любой окрестности $U(x_0)$ любой точки $x_0\in\mathbf{R}$ есть как рациональные, так и иррациональные точки, то $\forall\dot{U}(x_0)$ $\omega(\dot{U}(x_0),D)=1$. Следовательно, $\omega(x_0,D)=1$, поэтому функция Дирихле всюду разрывна и все ее точки разрыва второго рода (так как под $U(x_0)$ можно понимать и односторонние окрестности точки x_0).

Пример 3.10. Функция Римана:

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

В определении функции Римана считаем, что $\dfrac{p}{q}$ несократимая дробь и $q>0$. По свойству плотности множества $\mathbf{R}$ в любой окрестности $U\left(\dfrac{p}{q}\right)$ рационального числа $\dfrac{p}{q}$ существуют иррациональные числа. Поэтому $\omega\left(U\left(\dfrac{p}{q}\right),R\right)\geq\dfrac{1}{q}$, так же, как в примере 3.9, получаем, что функция Римана разрывна в любой рациональной точке и все эти точки разрыва второго рода.

Покажем, что функция Римана непрерывна во всех точках с иррациональными координатами. Пусть x_0 – иррациональное число. Так как $R(x_0)=0$, то достаточно показать, что

$$(\lim_{x\to x_0} R(x_0)=0)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0\ \exists U(x_0),\ \forall x\in U(x_0),\ |R(x)|<\varepsilon).$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда в интервале $x_0 \in ([x_0], [x_0]+1)$ существует лишь конечное число рациональных дробей $\frac{\widehat{p}}{\widehat{q}}$, знаменатель которых не больше $\frac{1}{\varepsilon}$, $1 \le \widehat{q} \le \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, $[x_0] \le \widehat{p} \le ([x_0]+1)$. Обозначим тогда наименьшее из положительных чисел $\left|x_0 - \frac{p}{q}\right|$, $1 \le q \le \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, (их конечное число) через δ_0 $(\delta_0 > 0)$. Рассмотрим окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, где $\delta \in (0, \delta_0)$. В эту окрестность попадут только такие рациональные дроби $\frac{p}{q}$, для которых знаменатель q больше $\frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $\forall \frac{p}{q} \in U_\delta(x_0)$, $0 < R\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} < \varepsilon$. Кроме того, $\forall x \in U_\delta(x_0)$, x иррационального, $R(x) = 0 < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$, $0 \le R(x) < \varepsilon$, и непрерывность доказана.

Заметим, что график функции Римана не может быть изображен в виде сплошной линии или объединения сплошных линий, несмотря на непрерывность этой функции во всех иррациональных точках.

Теорема 3.1. Если функция $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то f может иметь на этом отрезке лишь точки разрыва первого рода и множество точек разрыва не более чем счетно.

► Пусть для определенности f возрастает на отрезке $[a,b]$ и $x_0 \in (a,b)$ – точка разрыва этой функции. Так как $\forall x \in [a,b]$ $f(a) \le f(x) \le f(b)$, то f ограничена на $[a,b]$. Тогда по теореме о пределе монотонной функции существуют конечные $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (при этом $f(x_0 - 0) \ne f(x_0 + 0)$). Следовательно, x_0 – точка разрыва первого рода функции f.

Для доказательства второго утверждения достаточно установить, что множество внутренних точек разрыва (т. е. $\ne a$, $\ne b$) не более чем счетно. Пусть $x_0 \in (a,b)$ – точка разрыва функции f. Тогда $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. В силу плотности множества вещественных чисел существует рациональное число $r(x_0)$: $f(x_0 - 0) < r(x_0) < f(x_0 + 0)$. Каждой точке разрыва x функции f поставим в соответствие рациональное число $r(x)$

(эти числа различны для разных точек разрыва). Таким образом, множеству точек разрыва монотонной функции будет соответствовать некоторое подмножество множества **Q** рациональных чисел. Последнее – счетно, значит, и множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.◄

Замечание 3.7. Теорема остается справедливой и в случае произвольного промежутка.

3.3. Локальные свойства непрерывных функций и некоторые действия над непрерывными функциями

Локальными свойствами функции $f : X \to \mathbf{R}$ называются такие свойства, которые определяются поведением функции в некоторой окрестности заданной точки $a \in X$. Например, непрерывность функции f в точке $a \in X$ – локальное свойство функции.

Теорема 3.2. Если функция $f : X \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке $a \in X$, то она финально ограничена при $x \to a$.

► Так как непрерывность функции f в точке $a \in X$ означает, что существует ее предел при $x \to a$, равный $f(a)$, то теорема является простым следствием теоремы о финальной ограниченности функции, имеющей конечный предел. ◄

Теорема 3.3 (о сохранении знака). Если функция $f : X \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке $a \in X$ и $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности $U_X(a) = U(a) \cap X$ точки a все значения функции f имеют тот же знак, что и $f(a)$.

► Справедливость утверждения теоремы вытекает из свойства 1 подраздела 2.7 «Предельный переход в неравенствах». ◄

Теорема 3.4. Если функции $f : X \to \mathbf{R}$, $g : Y \to \mathbf{R}$ непрерывны в точке $a \in X \cap Y$, то:

1) алгебраическая сумма $f \pm g$ непрерывна в точке a;

2) произведение $f \cdot g$ непрерывно в точке a;

3) частное $\dfrac{f}{g}$ непрерывно в точке a, если $g(a) \neq 0$.

► Для доказательства достаточно вспомнить теорему об арифметических операциях над функциями, имеющими предел. ◄

Теорема 3.5. Пусть заданы функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to \mathbf{R}$. Если f непрерывна в точке $a \in X$, g непрерывна в точке $b = f(a) \in Y$, то композиция $(g \circ f): X \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке $a \in X$.

► Условие непрерывности функции g можно записать в виде: $\exists \lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b)$, а функции f – $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = b$. Возьмем произвольную окрестность $W(g(b))$. Тогда из первого свойства вытекает, что $\exists V(b): g(V(b) \cap Y) \subset W(g(b))$. По указанной окрестности $V(b)$ можно найти такую окрестность $U(a)$ точки a, что $f(U(a) \cap X) \subset V(b)$. Но $f(U(a) \cap X)$ по условию теоремы содержится в Y. Следовательно, $g(f(U(a) \cap X)) \subset W(g(b))$. Данное включение означает непрерывность $g \circ f$ в точке a. ◄

Пример 3.11. Функция $f = \sin \circ \ln : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ непрерывна в любой точке множества $X = (0, +\infty)$.

Действительно, для $\forall x \in (0, +\infty)$ можно найти значение $\sin(\ln x)$, т. е. в X определена композиция $\sin \circ \ln$. Непрерывность функций $\ln$ в точке x и $\sin$ в точке $\ln(x)$ вытекает из примеров предыдущего раздела. Тогда непрерывность их композиции есть простое следствие теоремы 3.5. Тем не менее проведем доказательство подробнее.

Пусть $x = a$ – произвольная точка множества X. Обозначим $\ln a = b$ и $\sin b = c$. Не ограничивая общности можно считать, что $b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Возьмем некоторую окрестность $W_\varepsilon(c) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ с достаточно малым ε таким, что $0 < c - \varepsilon < c + \varepsilon < 1$. В силу непрерывности функции sin найдется окрестность $V_\delta(b) = (b - \delta, b + \delta)$ такая, что $\sin(V_\delta(b)) \subset W_\varepsilon(c)$. Здесь

$$\delta = \min\{b - \arcsin(c - \varepsilon), \arcsin(c + \varepsilon) - b\}.$$

В силу непрерывности в точке a функции ln найдется окрестность $U(a)$ такая, что $\ln(U(a)) \subset V_\delta(b)$. Таким образом, для любой окрестности $W_\varepsilon(c)$ найдена окрестность $U(a)$ такая, что $(\sin \circ \ln)(U(a)) \subset W_\varepsilon(c)$, а это и означает непрерывность изучаемой функции в точке a.

3.4. Глобальные свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций

Глобальными свойствами функции $f: X \to \mathbf{R}$ на множестве $A \subset X$ называются свойства, которые определяются поведением функции f на всем множестве A. Непрерывность функции на множестве (см. определение 3.9) есть глобальное свойство функции.

Теорема 3.6 (Больцано – Коши). Если функция $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а на его концах принимает значения разных знаков, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

► Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если значение функции в точке деления равно нулю, то точка деления и есть точка, существование которой утверждается в теореме. Если значение функции в точке деления отлично от нуля, то на концах одного из образовавшихся отрезков (обозначим его $[a_1, b_1]$) функция принимает значения разных знаков. С отрезком $[a_1, b_1]$ поступаем так же, как и с исходным, т. е. делим его пополам и либо получаем точку, в которой значение функции равно нулю, либо продолжаем процесс дальше (отрезок, получаемый на этом шаге, обозначаем $[a_2, b_2]$).

В результате или в одной из точек деления будет $f(c) = 0$, или процесс будет продолжен неограниченно. В последнем случае возникает последовательность вложенных отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

где

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n} = 0,$$

причем $f(a_n)f(b_n) < 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

По лемме о вложенных отрезках существует точка $c \in [a, b]$ для всех $n \in \mathbf{N}$, причем $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Переходя к пределу в неравенстве $f(a_n)f(b_n) < 0$, пользуясь непрерывностью f в точке c, получим $[f(c)]^2 \le 0$. Так как всегда $[f(c)]^2 \ge 0$, то $[f(c)]^2 = 0$, откуда $f(c) = 0$. ◄

Замечание 3.8 (геометрический смысл теоремы 3.6). В условиях теоремы график функции, по крайней мере, один раз пересекает ось Ox.

Замечание 3.9. Точка c является корнем уравнения $f(c)=0$. Таким образом, теорема Больцано – Коши дает алгоритм нахождения корней уравнения $f(c)=0$ в случае непрерывной функции f.

Замечание 3.10. Теорема Больцано – Коши, вообще говоря, не имеет места для множеств, отличных от отрезка. Так, функция

$$f:[0,1]\cup[2,3]\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[0,1],\\ 1, & x\in[2,3],\end{cases}$$

непрерывна в области своего определения, но нигде не принимает нулевого значения. Доказанное в теореме Больцано – Коши свойство непрерывных функций использует одно из характерных свойств отрезка (которое в дальнейшем будет названо связностью).

Следствие 3.1 (теорема о промежуточных значениях). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а на его концах принимает неравные между собой значения $A=f(a)$, $B=f(b)$, то для любого числа C, заключенного между A и B, существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(c)=C$.

► Функция φ : $\varphi(x)=f(x)-C$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $\varphi(a)\cdot\varphi(b)=(A-C)(B-C)<0$ (т. е. φ принимает на концах отрезка значения разных знаков). Тогда по теореме Больцано – Коши найдется точка $c\in(a,b)$, в которой $\varphi(c)=0\Leftrightarrow f(c)-C=0\Leftrightarrow f(c)=C$. ◄

Напомним, что символом $C[a,b]$ обозначалось множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Обозначим, кроме того, символом $B[a,b]$ множество всех функций, ограниченных на $[a,b]$.

Теорема 3.7 (Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции). Если функция $f\in C[a,b]$, то

1) $f\in B[a,b]$;

2) существуют, по крайней мере, две точки $x_*, x^*\in[a,b]$ такие, что

$$\exists\min_{[a,b]} f(x)=\inf_{[a,b]} f(x)=f(x_*)\in\mathbf{R},$$

$$\exists\max_{[a,b]} f(x)=\sup_{[a,b]} f(x)=f(x^*)\in\mathbf{R}$$

(т. е. функция достигает свое минимальное и максимальное значение на отрезке).

► Пусть $x \in [a, b]$. Так как непрерывная функция f финально ограничена при $t \to x$, $t \in [a, b]$, то $\exists U(x)$, $\exists K_x > 0$, $\forall t \in U(x) \cap [a, b]$ $|f(x)| \le K_x$. Рассмотрим семейство $\{U(x) \mid x \in [a, b]\}$ всех таких окрестностей. В этом семействе по построению есть окрестности любой точки $x \in [a, b]$. Поэтому $[a, b] \subset \bigcup\limits_{x \in [a, b]} U(x)$, т. е. указанное семейство есть покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами $U(x)$. По лемме 1.3 Гейне – Бореля – Лебега о покрытиях существует конечное подпокрытие $\{U(x_1),\ U(x_2), ..., U(x_m)\}$. Обозначим $K := \sup\{K_{x_1}, K_{x_2}, ..., K_{x_m}\}$. Тогда $\forall x \in [a, b]$ существует i, $i = \overline{1, m}$, такое, что $x \in U(x_i)$. Следовательно, $|f(x)| \le K_{x_i} \le K$, т. е. для всех $x \in [a, b]$ $|f(x)| \le K$ (функция f ограничена на $x \in [a, b]$).

Обозначим $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ и предположим, что не существует таких точек $x^* \in [a, b]$, что $f(x^*) = M$. Тогда $\forall x \in [a, b]$ имеем $f(x) < M$ и поэтому функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, кроме того, положительна на нем. По доказанной части теоремы Вейерштрасса получим: $\exists C > 0$, $\forall x \in [a, b]$: $0 < \varphi(x) \le C$.

После равносильных преобразований получим

$$\frac{1}{M - f(x)} \le C \Leftrightarrow M - f(x) \ge \frac{1}{C} \Leftrightarrow f(x) \le M - \frac{1}{C}.$$

Если взять в последнем неравенстве $\sup$ по всем $x \in [a, b]$, то будем иметь $M \le M - \dfrac{1}{C} \Leftrightarrow 0 \le -\dfrac{1}{C} \Leftrightarrow C \le 0$ – противоречие. Значит, предположение неверно, т. е. $\exists x^* \in [a, b]: f(x^*) = M$. Аналогично доказывается утверждение о существовании точки x_*. ◄

Заметим, что, например, функции $f_1 : x \mapsto x, f_2 = \dfrac{1}{f_1}$ непрерывны на интервале $X = (0, 1)$, но f_1 не принимает на X ни минимального, ни максимального значения (т. е. не существсвует $\max\limits_X f_1(x)$ и не существует $\min\limits_X f_1(x)$), хотя $\sup\limits_X f_1(x) = 1, \inf\limits_X f_1(x) = 0$, а f_2 неограничена на X. Таким образом, выраженные теоремой 3.7 свойства непрерывных функций связаны с некоторыми свойствами области определения, а именно с возможностью из любого покрытия множества X окрестностями его точек выделить конечное подпокрытие. Такие множества впоследствии будут названы компактными. Теорема Вейерштрасса имеет место и для них.

Определение 3.14. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для любых x', $x'' \in X$, $|x' - x''| < \delta$ имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$:

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon). \quad (1)$$

Отметим различие между понятиями равномерной непрерывности и непрерывности функции f на множестве X. С этой целью запишем условие непрерывности функции f на множестве X в форме, аналогичной (1):

$$\forall x' \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x') > 0,$$

$$\forall x'' \in X, |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (2)$$

Здесь $\delta = \delta(\varepsilon, x')$, т. е. δ зависит от ε и от точки x', в которой функция f должна быть непрерывна. Если, в частности, при любом $\varepsilon > 0$ искомое число δ является подходящим для всех точек $x' \in X$, то условие (2) переходит в (1).

Таким образом, если функция f равномерно непрерывна на X, то она и непрерывна на X, а обратное, вообще говоря, неверно.

По аналогии с понятием колебания функции на множестве для непрерывных функций можно ввести величину

$$\omega_\delta(f) := \sup_{x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta} |f(x') - f(x'')|,$$

которая называется модулем непрерывности функции $f : X \to \mathbf{R}$. При этом естественно считать, что все точки множества X являются его предельными точками.

Упражнение 3.3. Функция f, непрерывная на множестве X, будет равномерно непрерывной на X тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_\delta(f) = 0$.

Докажите самостоятельно.

Теорема 3.7 (Кантора о равномерной непрерывности). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на этом отрезке.

► Зададим $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f на $[a, b]$ имеем:

$$\forall c \in [a, b], \exists r = r(\varepsilon, c) > 0, \forall x \in [a, b], |x - c| < r \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon/2.$$

Обозначая $U_r(c) := \left(c - \frac{r}{2}, c + \frac{r}{2}\right)$, рассмотрим семейство всех таких интервалов $\{U_r(c) \mid c \in [a, b]\}$. Это открытое покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме 1.3 Гейне – Бореля – Лебега существует конечное подпокрытие $\{U_{r_1}(c_1), U_{r_2}(c_2), ..., U_{r_m}(c_m)\}$. Положим далее $\delta := \frac{1}{4}\inf\{r_1, r_2, ..., r_m\}$ и пусть x', x'' – произвольные точки отрезка $[a, b]$ такие, что $|x' - x''| < \delta$. Так как $\{U_{r_1}(c_1), U_{r_2}(c_2), ..., U_{r_m}(c_m)\}$ – покрытие отрезка $[a, b]$, то среди интервалов $U_{r_k}(c_k)$ найдется такой, в который попадет точка x' ($\exists i$, $1 \le i \le m$, $x' \in U_{r_i}(c_i)$). Тогда $|x' - c_i| < \frac{r_i}{2} < r_i$. Одновременно с этим

$$|x'' - c_i| \le |x'' - x'| + |x' - c_i| < \delta + \frac{r_i}{2} \le \frac{r_i}{4} + \frac{r_i}{2} < r_i.$$

Поэтому

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f(c_i)| + |f(x'') - f(c_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Здесь также имеет место замечание, сформулированное после теоремы 3.7. Та же функция $f_2 : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$ является непрерывной на интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной на нем (доказательством этого может служить, например, то, что для последовательностей $x_n' = \frac{1}{n}$, $x_n'' = \frac{1}{2n}$ разность $|x_n' - x_n''| = \frac{1}{2n} \to 0$ при $n \to \infty$, а соответствующий модуль разности значений функции $|f(x_n') - f(x_n'')| = n \to +\infty$).

Теорема 3.8 (о существовании обратной функции). Если функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует обратная функция $f^{-1}: f([a, b]) \to [a, b]$, которая на множестве $f([a, b])$ является строго монотонной и непрерывной.

► Из монотонности функции f вытекает биективность отображения $f:[a, b] \to f([a, b])$. Значит, существует обратное отображение $f^{-1}: f([a, b]) \to [a, b]$.

Пусть для определенности f возрастает: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. В силу однозначности функции разным значениям функции соответствуют разные значения аргумента, т. е. $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$. Тогда $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Отсюда, обозначая $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, получим $y_1 > y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, и монотонность обратной функции доказана.

Для доказательства непрерывности обратной функции f^{-1} прежде всего заметим, что $\inf\limits_{[a, b]} f(x) = f(a)$, $\sup\limits_{[a, b]} f(x) = f(b)$. По теореме о промежуточных значениях функция f принимает любое значение, расположенное между $f(a)$ и $f(b)$. Следовательно, область определения функции f^{-1} – отрезок $[f(a), f(b)] := [c, d]$. Пусть $y_0 \in (c, d)$, $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$ и задано число $\varepsilon > 0$. Можно считать ε настолько малым, что $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$. Положим $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ и пусть $\delta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$. В силу монотонности имеем, что если $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, то

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta) \leq f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon,$$

т. е. в обозначениях $x = f^{-1}(y): |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. А это и означает непрерывность функции f^{-1} в точке y_0 – произвольной точке интервала $(f(a),\ f(b))$. Для доказательства непрерывности f^{-1} в точках $c = f(a)$, $d = f(b)$ вместо симметричных окрестностей точек нужно рассматривать односторонние окрестности (докажите самостоятельно непрерывность f^{-1} в точке $f(a)$ справа и в точке $f(b)$ слева). ◄

Следствие 3.2. В условиях теоремы 3.8 отрезок $[a, b]$ может быть заменен на интервал (a, b) или полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$.

► Действительно, доказательство существования обратной функции и ее монотонность в теореме 3.8 не зависит от вида области определения функции f.

Докажем непрерывность f^{-1} в произвольной точке $\tilde{y} \in f((a, b))$. В силу биективности и монотонности f существует точка $\tilde{x} \in (a, b)$, $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ $(\tilde{x} = f^{-1}(\tilde{y}))$. Найдется отрезок $[\alpha, \beta]$, целиком лежащий в (a, b) $(\tilde{x} \in [\alpha, \beta] \subset (a, b))$. Тогда достаточно установить непрерывность в точке $f(\tilde{x})$ функции, обратной к сужению f на $[\alpha, \beta]$ $(f|_{[\alpha,\beta]})$. Если один из концов промежутка $\langle a, b\rangle$ принадлежит этому промежутку, то нетрудно доказать непрерывность, справа или слева в соответствующей точке $f(a)$ или $f(b)$ функции f^{-1}. ◄

Рассмотрим вопрос о непрерывности элементарных функций.

Определение 3.15. Элементарными называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций, производя над ними в любом порядке конечное число арифметических действий и операций образования композиций.

К основным элементарным функциям относятся:

$$f_1 : x \mapsto M,\ f_2 : x \mapsto x,\ f_3(x) = a^x (a > 0), \log_a (a > 0,\ a \neq 1),$$

$$\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}, \arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arcctg}.$$

Установим сначала непрерывность основных элементарных функций в областях определения.

1. Непрерывность f_1, f_2 установлена ранее.

2. Выше также доказана непрерывность функции $\ln$. Но $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, поэтому $\log_a$ непрерывна для всех $x > 0$ как частное непрерывных функций.

3. Функция f_3 непрерывна на $\mathbf{R}$ как функция, обратная к монотонной и непрерывной функции $x = \log_a y$. В частности, функция $\exp : x \mapsto e^x$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

4. Ранее доказана непрерывность функции $\sin$. По формулам приведения имеем, что функция $\cos$ есть композиция непрерывных на $\mathbf{R}$ функций: $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. Функции tg и ctg непрерывны в областях своего

определения $X_1 = \left\{\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right) \middle| n \in \mathbf{Z}\right\}$ и $X_2 = \{(\pi n, \pi + \pi n) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ соответственно как частное непрерывных функций: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

5. Функции $\arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}, \operatorname{arcctg}$ непрерывны в областях своего определения (первые две – на отрезке $[-1, 1]$, две другие – на $\mathbf{R}$) как функции, обратные к следующим монотонным и непрерывным функциям соответственно:

$$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}, \cos|_{[0,\pi]}, \operatorname{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}, \operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}.$$

6. Следует отметить также непрерывность в областях своего определения часто встречающихся функций, которые иногда также относят к основным элементарным: рациональной функции

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m},$$

непрерывной всюду на $\mathbf{R}$ кроме точек, в которых знаменатель обращается в нуль; степенной функции $f(x) = x^\alpha$, непрерывность которой при $x > 0$ получается с использованием равенства $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ из теоремы о непрерывности композиции.

Таким образом, непрерывность перечисленных функций в областях определения установлена. Отметим, что каждую элементарную функцию можно задать явной формулой. Множество всех значений аргумента, для которых эта формула имеет смысл и в результате вычисления по ней получается вещественное значение функции, называется естественной областью определения элементарной функции. Следующая теорема является простым следствием теорем 3.4 и 3.5.

Теорема 3.9. Каждая элементарная функция непрерывна в своей естественной области определения.

Задачи к главе 3

1. Если функция $f: X \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке $x \in X$, будет ли непрерывной в этой точке функция f^2? Наоборот, если непрерывна в точке $x \in X$ функция f^2, то что можно сказать о непрерывности в этой точке функции f?

2. $f(x)=\begin{cases} x^x,\ x>0, \\ x^x,\ x=-\dfrac{m}{n}<0,\ n=2k-1,\ k,m\in\mathbf{N}, \\ 1,\ x=0. \end{cases}$

Докажите, что функция f непрерывна в точке $x=0$.

3. Докажите, что множество значений функции, определенной и непрерывной на отрезке, есть отрезок, а функции, определенной и непрерывной на интервале, – интервал.

4. Пусть функции $f,g:X\to\mathbf{R}$ непрерывны в точке $x\in X$, причем $f(x)>0$. Установите непрерывность функции $h=[f]^g$ в этой точке.

5. Пусть $f:[a,b]\to[a,b]$ – непрерывное отображение конечного отрезка на себя. Покажите, что тогда существует, по крайней мере, одна точка $x\in[a,b]$, для которой $f(x)=x$ (эта точка называется неподвижной точкой отображения f). Будет ли этот результат справедлив, если $[a,b]$ заменить на интервал? На все множество $\mathbf{R}$?

6. Пусть $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ – непрерывная на (a,b) функция, $x_1, x_2\in(a,b)$. Всегда ли найдется точка $\xi\in(a,b)$ такая, что $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (т. е. значение функции f в точке ξ равно среднему арифметическому двух произвольных значений этой функции). Вообще, можно ли найти точку, в которой значение функций равно среднему арифметическому n произвольных ее значений?

7. Пусть функция f непрерывна и ограничена в интервале $(x_0,+\infty)$. Докажите, что каково бы ни было число $T>0$, найдется последовательность $x_n\to+\infty$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0$.

8. Пусть $f:X\to\mathbf{R}$ – функция, равномерно непрерывная на произвольном ограниченном множестве X. Покажите, что $f\in B(X)$, т. е. f ограничена на X. Будет ли справедлив такой вывод, если условие равномерной непрерывности заменить на условие непрерывности? Будет ли справедливо такое утверждение: функция f, непрерывная и ограниченная на ограниченном множестве X, является равномерно непрерывной на нем? Приведите примеры.

9. Докажите, что модуль непрерывности функций $f = \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x^2$ на множестве $X = (x_0, +\infty)$ есть величина постоянная: $\omega_\delta(f) = \omega_\delta(g) = 2$.

10. Если функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ монотонна на отрезке $[a, b]$ и любое число c, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, является ее значением, то f непрерывна на $[a, b]$. Докажите.

ЛИТЕРАТУРА

Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. М., 2000.

Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 ч. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; под ред. В. А. Садовничего. М., 2001. Ч. 1.

Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. М., 1977.

Зверович, Э. И. Методические рекомендации по курсу математического анализа, II «Последовательности. Предел функции по базе» / Э. И. Зверович, И. И. Комяк, Ф. В. Чумаков. Минск, 1979.

Зверович, Э. И. Методические рекомендации по курсу математического анализа, II-а «Непрерывные функции» / Э. И. Зверович, Ф. В. Чумаков, С. В. Рогозин. Минск, 1984.

Зорич, В. А. Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. М., 1997. Т. 1.

Индивидуальные задания по курсу «Математический анализ» для студентов специальности 01.01. : в 6 ч. / А. Г. Вопнярская [и др.]. Минск, 1989. Ч. 1 : Предел последовательности. Предел функции.

Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев [и др.] ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. 2-е изд., перераб. М., 2003. Т. 1.

ВОПРОСЫ ПО ПРОГРАММЕ КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ» по темам «Предел последовательности», «Предел функции», «Непрерывность»

1. Понятие числовой последовательности.
2. Сходящиеся последовательности и их простейшие свойства.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические свойства бесконечно малых последовательностей.
4. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.
5. Неопределенные выражения.
6. Предельный переход и неравенства.
7. Множество $\overline{\mathbf{R}}$.
8. Монотонные последовательности. Число e.
9. Лемма Кантора о вложенных отрезках.
10. Лемма Гейне – Бореля – Лебега о конечном покрытии.
11. Лемма Больцано – Вейерштрасса о предельной точке.
12. Подпоследовательности и их свойства.
13. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
14. Верхний и нижний пределы последовательности.
15. Различные определения предела функции и их равносильность.
16. Общие свойства предела функции (единственность предела, финальная ограниченность функции, имеющей предел).
17. Критерий Коши существования предела функции.
18. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
19. Арифметические свойства предела функции.
20. Сравнение бесконечно малых функций.
21. Предел функции и неравенства.
22. Теорема о пределе композиции функций.
23. Предел монотонной функции.
24. Замечательные пределы.
25. Понятие непрерывности функции в точке.
26. Локальные свойства непрерывных функций.
27. Точки разрыва и их классификация.
28. Точки разрыва монотонной функции.
29. Теорема Коши о промежуточных значениях.
30. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции.
31. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
32. Существование обратной функции.
33. Непрерывность элементарных функций.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМАМ

«Предел последовательности», «Предел функции», «Непрерывность»

Задание 1

1. Используя определение предела последовательности со значениями, приведенными в табл. 1, докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \ \lim_{n\to\infty} y_n = 0,\ \ \lim_{n\to\infty} z_n = \infty:$$

Таблица 1

№ п/п	x_n	a	y_n	z_n
1	$\dfrac{2-n^2}{4n^2-3}$	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{2^n}{3^n+5\cdot 2^n}$	$n-\sqrt{n}$
2	$\dfrac{2n-1}{4n+9}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{n-1}{2n^2+3}$	$\dfrac{7^n+2^n}{3\cdot 2^n}$
3	$\dfrac{9n^2-2}{3n^2+5}$	3	$\dfrac{2n+0{,}5}{\sqrt{n^3+n^2}}$	$\dfrac{(-1)^n\cdot n^2}{n+1}$
4	$\dfrac{1+n^4}{5n^4}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{n^2}{(n+1)!}$	$\dfrac{n^5+n^2+1}{3n^2-n}$
5	$\dfrac{5n-3}{3n}$	$\dfrac{5}{3}$	$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}$	$\dfrac{4n^2+n}{\sqrt{n^2-0{,}5}}$
6	$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}}$	1	$\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n}$	$\dfrac{n^2+n}{3n-1}$
7	$\dfrac{2^n+3^n}{3^n+1}$	1	$\dfrac{\sin n}{\sqrt{n^3+4}}$	$\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{3n-10}$
8	$\dfrac{n^2+\sin^2\frac{1}{n}}{n^2}$	1	$\dfrac{(2+(-1)^n)n}{n^2+1}$	$\dfrac{n^2\sqrt{n}}{n^2+1}$
9	$\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{n^3-2}{(3+n^3)\cdot 5^n}$	$\dfrac{2^n\cdot n}{n+3}$

Окончание табл. 1

№ п/п	x_n	a	y_n	z_n
10	$\frac{\sqrt{n^2+3}}{4n}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7^n(n-1)}{2n\cdot 9^n}$	$\frac{(-1)^n\cdot n^3}{2n^2-\sqrt{n}}$
11	$\frac{4n^2-5}{3+8n^2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$	$\frac{5\cdot 3^n+2^n}{2^n-1}$
12	$\frac{3\cdot 5^n-2^n}{2^n+5^n}$	3	$\frac{3\sin n^2}{\sqrt{n+1}}$	$\frac{3\cdot n^3+2}{5n-3}$
13	$\frac{4n^2+\cos\frac{1}{n}}{n^2}$	4	$\frac{1+2(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$	$\frac{2\cdot 5^n+7}{3^n-5}$
14	$\frac{-7n^3+3}{2+7n^3}$	-1	$\frac{3-n^2}{4n^3+n^2+1}$	$\frac{\sqrt{n^3}}{7-3\sqrt{n}}$
15	$\frac{2n^2}{\sin\frac{1}{n}+n^2}$	2	$\frac{\sin(n+n^2)}{1+\sqrt{n}}$	$\frac{\sqrt{n^4+n}}{2n-1}$
16	$\frac{1+3^n}{1-3^n}$	-1	$\frac{\cos\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}}$	$(n^2+\sqrt{n})$

2. Докажите, что последовательность расходится:

1) $x_n = 3-\sin\dfrac{n\pi}{4}$;

2) $x_n = (-1)^n\cdot 10-2$;

3) $x_n = 2+3\cdot(-1)^n$;

4) $x_n = \dfrac{(-1)^n\cdot n^3+1}{n^3}$;

5) $x_n = \cos\dfrac{2\pi\cdot n}{3}$;

6) $x_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$;

7) $x_n = 2\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}+1$;

8) $x_n = 2(-1)^n+1$;

9) $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n+2}{n}$;

10) $x_n = (-1)^{n+1}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)$;

11) $x_n = \dfrac{3\cdot(-1)^n\cdot n^2+2}{n^2}$;

12) $x_n = 3^{(-1)^{n+1}\cdot n}$;

13) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n}$;

14) $x_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{5}{n+1} + 2\right)$;

15) $x_n = \frac{3}{n} + \cos\frac{\pi n}{2}$;

16) $x_n = 1 - \cos\frac{\pi n}{4}$.

3. С помощью критерия Коши докажите, что последовательность сходится:

1) $x_n = \frac{n}{2n-1}$;

2) $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n!}$, $x_1 = 2$;

3) $x_n = \frac{n+1}{2n+3}$;

4) $x_n = \frac{5+2n}{n}$;

5) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg} k}{2^k}$;

6) $x_n = 0,\underbrace{66...6}_{n}$;

7) $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\sin(kx)}{(k-1)k}$;

8) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$;

9) $x_n = 0,22\underbrace{33...3}_{n-2}$;

10) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(k^2+1)}{(k+1)(k+2)}$;

11) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx^3)}{3^{k-1}}$;

12) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k^2 x)}{k^3}$;

13) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{arctg}(2kx^2+1)}{10^{k-1}}$;

14) $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\sin kx}{k(k-1)}$;

15) $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$;

16) $x_n = \frac{2n+1}{n}$.

4. Найдите пределы последовательностей:

1) а) $\frac{(n+2)^3 - n(n-2)^2}{n^2+n}$;

б) $\sqrt{4n^2+5n} - 2n$;

в) $\frac{\sqrt[n]{8n^3} - 1}{\sqrt[n]{2n} - 1}$;

г) $\frac{n\sin(n!)}{\sqrt{n^3+1}}$;

д) $\left(\dfrac{2n^2+3n+4}{2n^2-5n+7}\right)^n$;

е) $\dfrac{n+2^n+\lg^4 n}{n+2^n+n!}$;

ж) $\dfrac{\log_2 n+n+5}{\sqrt[24]{n}+\sqrt{n^3}+3}$;

з) $x_1=0{,}5,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+1}{x_n+2}$.

2) а) $\dfrac{n^2-8}{(n+1)^3-n(n-3)^2}$;

б) $\dfrac{n^2+n+3}{\sqrt{n^4+2n^3-1}}$;

в) $\dfrac{\sqrt[n]{16}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$;

г) $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\cdot\sin\ln(n+\sqrt{n}+2)$;

д) $\left(\dfrac{3^n+1}{3^n-1}\right)^{3^n}$;

е) $\dfrac{2n^2+3n^{10}+5}{2^n+3^n+4^n}$;

ж) $\dfrac{n^3+5^n}{n!+5}$.

з) $x_1=0{,}5,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2+x_n}$.

3) а) $\dfrac{(n+4)^3-n^2(n+1)}{n^2+6}$;

б) $\sqrt[3]{n^3-2}-n$;

в) $\dfrac{\sqrt[n]{4}+2\sqrt[n]{2}-3}{\sqrt[n]{2}-1}$;

г) $\dfrac{2^n+3^n}{4^n}(\cos n+\sin n)$;

д) $\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n$;

е) $\dfrac{2n^{12}+(12)^n}{n!+n}$;

ж) $\dfrac{\log_8 n+14}{14^n+n}$;

з) $x_1=2,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$.

4) а) $\dfrac{2+n^2}{n^2(n+3)-(n-6)^2}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+5n}}{n+7}$;

в) $\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{81}-1}$;

г) $\dfrac{3(n-3)}{(n-1)(n+2)}\sin(n+\sqrt{n})$;

д) $\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+1}$;

е) $\dfrac{10^n+n^{10}}{(n+10)!}$;

ж) $\dfrac{\log_5 n+n^2+24}{\sqrt[12]{n}+\sqrt{n^5}+14}$;

з) $x_1=12,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{125}{x_n^2}\right)$.

5) а) $\dfrac{n^2+1}{5n+1}-\dfrac{3n^2+1}{15n+1}$;

д) $\left(\dfrac{n-5}{n-3}\right)^{n-4}$;

б) $\dfrac{n^2-3}{\sqrt{n+4n^2}}$;

е) $\dfrac{n^2+2^n}{n^3+3^n}$;

в) $\dfrac{\sqrt[n]{n^2}+2\sqrt[n]{n}-3}{\sqrt[n]{n}-1}$;

ж) $\dfrac{2\ln n^2+n^3-7}{\sqrt[3]{n}+n^{3/2}+4n^5}$;

г) $\dfrac{2^n-1}{2^n+1}\cdot\dfrac{\cos(\sin n^2)}{n}$;

з) $x_1=0{,}7,\ \ x_{n+1}=x_n(2-x_n)$.

6) а) $2n+1-\dfrac{6n^3-7}{3n^2+4}$;

д) $\left(\dfrac{3n-1}{4n+5}\right)^{n^2}$;

б) $\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+n}$;

е) $\dfrac{n^2+n}{n!+2}$;

в) $\dfrac{\sqrt[n]{16n^4}-1}{\sqrt[n]{2n}-1}$;

ж) $\dfrac{\log_3 n+5}{3^n}$;

г) $\dfrac{2^n+4}{4^n+n!}\cdot\cos(\sin n!)$;

з) $x_1=2{,}2,\ \ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4-x_n}$.

7) а) $\left(\dfrac{2n^2+3n-1}{4n^2-2n+1}\right)^3$;

д) $\left(\dfrac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n+5}\right)^{\frac{n^3}{1+n}}$;

б) $\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n-1}$;

е) $\dfrac{\ln n}{\sqrt{\sqrt{n}}}$;

в) $\dfrac{1}{1-\sqrt[n]{2}}-\dfrac{2\sqrt[n]{2}}{1-\sqrt[n]{4}}$;

ж) $\dfrac{32^n+n^{32}}{(2n+1)!}$;

г) $\dfrac{n^2+1}{2^n+3^n+5}\cdot\cos(\sin 5^n)$;

з) $x_1=\dfrac{7}{13},\ \ x_{n+1}=\dfrac{3x_n+1}{2x_n+2}$.

8) а) $\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{n^2}{n+2}$;

б) $\dfrac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^2}}-1\right)$;

в) $\dfrac{1-\sqrt[n]{8}}{1-\sqrt[n]{2}}$;

г) $\dfrac{n^5}{2^n}\cdot(2+\sin^7 n)$;

д) $\left(\dfrac{3n+4}{3n+5}\right)^{2n+5}$;

е) $\dfrac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$;

ж) $\dfrac{n^{12}+5}{2^n}$;

з) $x_1=2,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+3}{x_n+1}$.

9) а) $\dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}}-n$;

б) $\dfrac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}}-1\right)$;

в) $\dfrac{\sqrt[n]{9}+\sqrt[n]{3}-2}{\sqrt[n]{3}-1}$;

г) $\dfrac{n^3}{3^n}\cdot(\sin^3 n+\cos^3 n)$;

д) $\left(1+\dfrac{2n+1}{2n^2+1}\right)^{n-3}$;

е) $\dfrac{8^n+4}{n!}$;

ж) $\dfrac{n^4+4^n}{n^5+4^{n+1}}$;

з) $x_1=5,\ x_{n+1}=4-\dfrac{3}{x_n}$.

10) а) $\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$;

б) $\dfrac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$;

в) $\dfrac{1-\sqrt[n]{3n}}{1-\sqrt[n]{81n^4}}$;

г) $\dfrac{2^n}{3^n+4^n}\cdot(\sin^5(n!)+\cos^3(3n^2))$;

д) $\left(1+\dfrac{n^2}{2^n}\right)^{\frac{2^n+3n^2}{n^2}}$;

е) $\dfrac{\log_3(n+3)}{1+\sqrt{n}}$;

ж) $\dfrac{n^9+2}{1+1{,}1^n}$;

з) $x_1=2{,}5,\ x_{n+1}=-\dfrac{2}{x_n}+3$.

11) а) $\dfrac{(n^2+2)^2-(n^2-2)^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$;

б) $\sqrt{n^2+n}-n-1$;

в) $\dfrac{2\sqrt[n]{n^2}-\sqrt[n]{n}-1}{1-\sqrt[n]{n}}$;

г) $\dfrac{\lg n}{n}\cdot\sin^{17}(\pi\sqrt{n})$;

д) $\left(\dfrac{n^2+4}{n^2+5}\right)^{\frac{n^3}{2n+1}}$;

ж) $\dfrac{(n+3)(n+4)}{(2^n+3)(2^n+4)}$;

е) $\dfrac{\ln n+15}{\sqrt{\sqrt{n}}}$;

з) $x_1=2,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+1}{x_n+2}$.

12) а) $\left(\dfrac{1+10n^3}{n+5n^3+1}\right)^2$;

д) $\left(\dfrac{7n-1}{7n+1}\right)^{5n+7}$;

б) $\dfrac{n+8}{\sqrt[3]{n^2+8n^3}}$;

е) $\dfrac{5n+\log_3 n}{n^2+2n}$;

в) $\dfrac{1-\sqrt[n]{27}}{1-\sqrt[n]{3}}$;

ж) $\dfrac{n^4+2^n}{n!+3}$;

г) $\dfrac{(n+1)^4}{2^n}\cdot(5-\cos 6n)$;

з) $x_1=-0{,}5,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2+x_n}$.

13) а) $n-\dfrac{1}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}}$;

д) $\left(2+\dfrac{1-n}{n}\right)^{2n+5}$;

б) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$;

е) $\dfrac{2n+\log_2\sqrt{n}}{2n+\log_3\sqrt[3]{n}}$;

в) $\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}$;

ж) $\dfrac{n-\lg n}{n^2+\lg^2 n}$;

г) $\dfrac{n\lg n}{n^2+1}\cdot(\cos n+\sin n)$;

з) $x_1=10,\ x_{n+1}=5-\dfrac{4}{x_n}$.

14) а) $\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{n^4}{n^3+n^2}$;

в) $\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{4}-3\sqrt[n]{2}+2}$;

б) $\dfrac{\sqrt{n^5+1}-n^2}{n^2+1}$;

г) $\dfrac{n^{10}+5}{3^n+4}\cdot(\operatorname{arctg} n!+\sin 2^n)$;

д) $\left(\dfrac{n^2+3n+4}{n^2+5}\right)^{\frac{n^2+4}{2n}}$;

ж) $\dfrac{4+\log_4(n+6)}{\sqrt{n}+3}$;

е) $\dfrac{5^n+n}{(n+5)!}$;

з) $x_1=3,\ x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$.

15) а) $\dfrac{(2+n)^4-n^4}{1+16n^4}$;

д) $\left(\dfrac{n^2+n+4}{n^2+4}\right)^{\frac{n^3+5}{n^2-8}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$;

е) $\dfrac{n^2+5}{4+2^n}$;

в) $\dfrac{1}{2(1-\sqrt[n]{3})}-\dfrac{\sqrt[n]{3}}{1-\sqrt[n]{9}}$;

ж) $\dfrac{\log_8(n+5)}{\sqrt{n}+12}$;

г) $\dfrac{\sin(n!+5)}{0{,}2^n\cdot n!}$;

з) $x_1=-1,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4-x_n}$.

16) а) $\dfrac{n^3+4}{2n^2+3}-\dfrac{n^2}{1+2n}$;

д) $\left(\dfrac{1-2n}{5-2n}\right)^{12n+5}$;

б) $\dfrac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$;

е) $\dfrac{\sqrt{n}+2^n+\lg^4 n}{n+3^n+n!}$;

в) $\dfrac{1-\sqrt[n]{27n^3}}{1-\sqrt[n]{3n}}$;

ж) $\dfrac{\log_5(n+8)}{\sqrt{n}+5}$;

г) $\dfrac{(-2)^n}{(n+2)!}(\sin^2 n+\cos^4 n)$;

з) $x_1=1{,}5,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4-x_n}$.

Задание 2

1. Пользуясь определением, докажите, что:

1) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}+3}=0$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{5x+1}=\dfrac{2}{5}$.

2) а) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x+7}=2$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-5}{(3+x)^4}=-\infty$.

3) а) $\lim\limits_{x \to -1} (4x^2 + 1) = 5;$ б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 3} = 0.$

4) а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2};$ б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 + x^2}{x} = \infty.$

5) а) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1;$ б) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = 0.$

6) а) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2;$ б) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{x + 1} = \infty.$

7) а) $\lim\limits_{x \to 10} \sqrt{x - 1} = 3;$ б) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty.$

8) а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + 2}{3x + 4} = \frac{1}{2};$ б) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{x + 1} = \infty.$

9) а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = 1;$ б) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{(x - 2)^2} = +\infty.$

10) а) $\lim\limits_{x \to -2} (3x^2 - 7) = 5;$ б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{2x^2 + 20x + 18} = \frac{1}{5}.$

11) а) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{4x + 15} = 3;$ б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2 + 1}{x^3} = \infty.$

12) а) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x + 3}{4 - x} = \frac{1}{5};$ б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{2x^4 + 1} = 0.$

13) а) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{25 - x^2}{x^2 - 5x} = -2;$ б) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2}{2 - x} = \infty.$

14) а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos 3x = -1;$ б) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty.$

15) а) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \frac{-1 + 3x}{1 + \sqrt{x}} = 0;$ б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \lg x = +\infty.$

16) а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin 2x = 0;$ б) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2x + 1} = \infty.$

2. Выясните, существуют ли следующие пределы:

1) а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[2x]$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin^2\dfrac{4\pi x}{3}$.

2) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin 4x$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x-3}{4}\right]$.

3) а) $\lim\limits_{x\to 3}e^{\frac{1}{3-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{sgn}(\ln(x-1))$.

4) а) $\lim\limits_{x\to 3}e^{\frac{1}{3-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{sgn}(\ln(x-1))$.

5) а) $\lim\limits_{x\to 2}(x-[x])$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\left(x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}\right)$.

6) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn}\left(\dfrac{2x+1}{2}\right)$.

7) а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\operatorname{sgn}(3x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}(e^{\frac{2}{x-2}}+3)$.

8) а) $\lim\limits_{x\to-1}\sin\dfrac{1}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-2^{\frac{1}{x-1}})$.

9) а) $\lim\limits_{x\to 0}10^{\frac{x}{|x|}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\sin^2\dfrac{2}{x-1}$.

10) а) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{3-x}$.

11) а) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\left(2x-\dfrac{x+1}{|x+1|}\right)$.

12) а) $\lim\limits_{x\to 0}a^{\frac{\pi}{x}}$, $a>0$, $a\neq 1$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{|x-2|}{x-2}+3x^2+1\right)$.

13) а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-[x])$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{1+x}}-1}$.

14) а) $\lim\limits_{x\to -2}\left(2x+3+\dfrac{x+2}{|x+2|}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\operatorname{arctg}\dfrac{\pi^2}{x}\right)$.

15) а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{8}}\operatorname{sgn}(\cos 4x)$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\left[\dfrac{2x+1}{2}\right]$.

16) а) $\lim\limits_{x\to 2}3\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x^2-1}{3}\right)$.

3. Вычислите:

1) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3+3x^2-x-26}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 2x}}{1-\cos^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$.

2) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin 2x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}[x]$.

3) а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^4+5x^3-x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x-4}{x^2-7x+12}\right)^{\frac{1}{x^2-16}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16-\sin\frac{x}{3}}+\sqrt{16+\sin\frac{x}{3}}}{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$.

4) а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^3-15x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{\frac{1}{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{(\pi-2x)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$.

5) а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-5x^2+2x+32}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{x-9}{x^2-17x+72}\right)^{\frac{1}{x^2-81}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\sqrt{3+\cos x})\cdot \operatorname{ctg}^2 x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$.

6) а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\right)^{\frac{1+x^2}{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\cdot \operatorname{tg} x}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x-2}$.

7) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3+2x^2-4x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\sqrt{1-x})^{\frac{1}{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos 2x^2}{\sin^4 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{2}{x}}$.

8) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{x^3-2x^2+2x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+x)^{\frac{1}{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(\sin x)$.

9) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-3x+2}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\sin 3x}-\sqrt{4-\sin 5x}}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}3^{\frac{1}{1-x}}$.

10) а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{x^5-x^3+2x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{\operatorname{tg}^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x^2}$.

11) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^4-3x^3+x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{1-x^2}\right)^{\frac{2}{1-x^2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-\sin^2 3x}}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

12) а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^3-27}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sin x}$.

13) а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{3x^3+2x^2-x+14}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}\right)^{\frac{x^2}{1+x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{3-\sqrt{8+\cos x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}$ $(a>0)$.

14) а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-3x^2+x+3}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{x^2-17x+72}{x-9}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-3}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 2x}-\dfrac{1}{4\sin^2 x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(\cos 2x)$.

15) а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+5x-3}{1-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-1}{x^2+x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{\sin^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{\pi}{x}$.

16) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-2x^3-3x-10}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{\sin x}}$.

4. Найдите эквивалентную в виде $A(x-a)^{\alpha}$ при $x \to a$:

1) а) $f(x)=\sin^2 2x-\lg(1+x^2)+\operatorname{arctg} x^3,\ a=0$;

б) $f(x)=2^x-x^2,\ a=2$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x},\ x\to+\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

2) а) $f(x)=\arcsin^2 2x\cos x^3+2^{x^2}-2,\ a=0$;

б) $f(x)=\log_2^2 x+x^{3/2}-1,\ a=1$;

в) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+2^{-x},\ x\to+\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

3) а) $f(x)=\operatorname{tg} x^2+\log_2(1+x^4)-3^{x^3}+1,\ a=0$;

б) $f(x)=2^x+x^2-8,\ a=2$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x-3^x,\ x\to-\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

4) а) $f(x)=\sin x^2-\lg^3(1+x)+\operatorname{tg} x^3,\ a=0$;

б) $f(x)=(2-x)^{3/2}+3^x-4,\ a=1$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt{x}-3^{-x},\ x\to+\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

5) а) $f(x)=\arcsin 2x^2+3^{x^4}-\cos x^2,\ a=0$;

б) $f(x)=(2-x)^{3/2}+\log_3 x-1,\ a=1$;

в) $f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x},\ x\to+\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

6) а) $f(x)=\operatorname{tg}2x^2-4^{x^3}+\cos^2 x,\ a=0$;

б) $f(x)=2^x-4+\lg^2(x-1),\ a=2$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt[3]{x^2-3x}+\operatorname{tg}\dfrac{1}{x},\ x\to\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

7) а) $f(x)=\operatorname{arctg}2x^2+\log 5(1+x^3)-\sqrt[3]{1+x^4}+1,\ a=0$;

б) $f(x)=\cos^2 x+\operatorname{ctg}^3 x,\ a=\dfrac{\pi}{2}$;

в) $f(x)=\ln(x+1)-\ln x+3^{-x},\ x\to+\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

8) а) $f(x)=\sin 2x^2-5^{x^4}+\sqrt[3]{1+x^3},\ a=0$;

б) $f(x)=3^x+\lg^2(x+2)-\dfrac{1}{3},\ a=-1$;

в) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}+\sqrt{x^2-1}+x,\ x\to-\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

9) а) $f(x)=\arcsin 3x^2+\log_3(1-x^3)-\cos x^2+3^{x^2},\ a=0$;

б) $f(x)=3^x-x^2-5,\ a=2$;

в) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right),\ x\to\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

10) а) $f(x)=\operatorname{tg}3x^2-\log_3(1-x^3)-4^{x^2}+\sqrt[4]{1+x^4},\ a=0$;

б) $f(x)=\sin^3 x+\operatorname{tg}^2 x,\ a=\pi$;

в) $f(x)=\ln(1+2^x)+\dfrac{x}{x^2+1},\ x\to-\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

11) а) $f(x)=\operatorname{arctg}3x^4+\log_5(1+x^4)+2^{x^2}-\sqrt[3]{1+x^3},\ a=0$;

б) $f(x)=\cos^3 x+1-\operatorname{tg}^2 x,\ a=\pi$;

в) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}+\sin\dfrac{1}{x},\ x\to\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

12) а) $f(x)=\sin 3x^2-\log_5(1+x^4)+\sqrt[3]{1+x^3},\ a=0$;

б) $f(x)=2^x+\log_2^2 x-2,\ a=1$;

в) $f(x)=\ln(1-x)\cdot\dfrac{1}{x^2}+\operatorname{tg}\dfrac{1}{x},\ x\to-\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

13) а) $f(x)=(\arcsin 3x)^2+\cos x^3-\sqrt{1+x^3}+\log_4(1-x^4),\ a=0$;

б) $f(x)=(3-x)^{3/2}+3^x-10,\ a=2$;

в) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}+\sin^2\dfrac{1}{x},\ x\to\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

14) а) $f(x)=\operatorname{tg}^2 3x-2^{x^3}+\sqrt{1-x^3}+\log_3(1+x^4),\ a=0$;

б) $f(x)=(3-x)^{3/2}+2^x-5,\ a=2$;

в) $f(x)=\ln(1+2^x)+\dfrac{x}{x^2+1},\ x\to-\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

15) а) $f(x)=(\operatorname{arctg}3x)^2+e^{x^3}-\sqrt{1-x^4}+\lg^3(1+x),\ a=0$;

б) $f(x)=(2-x)^{5/2}+\log_3 x-1,\ a=1$;

в) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{x^2}+\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right),\ x\to\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$.

16) а) $f(x)=(\sin 3x)^2+5^{x^4}-\sqrt{1+x^3}-\lg^2(1+x^2),\ a=0$;

б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}+\ln^2\dfrac{x+1}{x+2},\ x\to\infty,\ f(x)\sim A\cdot x^{\alpha}$;

в) $f(x)=x^3-3+\log_2^3 x,\ a=1$.

5. Вычислите, используя эквивалентные:

1) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{e^{\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4}}-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x^2)\cdot\sin^3 3x}{(2^{\sqrt{x}}-1)^4\cdot\operatorname{tg}4x^3}$.

2) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}(3^{4\sqrt[3]{x}}-1)}{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+5x)}$.

3) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+x^6}-1}{(1-\cos 3x)^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt[5]{x}(5^{3\sqrt[5]{x^4}}-1)}{\arcsin 7x}$.

4) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^3 x(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}-1)}{(e^{5x^4}-1)(x^2-x^4)}$.

5) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)+\ln(1-x^2)}{\sqrt[4]{1+\operatorname{tg}^4 x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x(4^{x^3}-1)}{(1-\cos x)(x^2+3x^3+x^4)}$.

6) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arcsin 4x^2}-1}{1-\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x\cdot\sin(x^2+x^4)}{\operatorname{arctg}^4 x\cdot(\sqrt{1+3x^2}-1)}$.

7) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sqrt{1+\arcsin x^2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin^3 x)(2^x+1)}{(e^{\operatorname{tg}^2 x}-1)(x-x^7)}$.

8) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x^2}{\sqrt{1-\arcsin^2 x^2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^{x^2+x}-1)\cdot\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}{\ln(1+\sin x)(\sqrt{x}+x)^2}$.

9) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2)}{e^{\sin 5x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2(x-\sqrt{x})(1-\cos x^2)}{(2^{x^5}-1)(1+\sin x+\cos x)}$.

10) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\arcsin^4\sqrt{x}}-1}{\sqrt[5]{1-5x^2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x^2\cdot\sin(x^4-3x^5)}{\operatorname{sh}^4 x\cdot\ln\cos 5x}$.

11) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x^2}-1}{\ln\cos 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(\ln(1-7\sqrt[3]{x}))\cdot(\sqrt[3]{x^2}-x^5)}{(\sqrt{1+7x}-1)\cdot\operatorname{ch}2x}$.

12) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\operatorname{arctg}^4\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(7^{3x^3}-1)\cdot\operatorname{sh}5x}{\arcsin^2 x^2(\cos x+\operatorname{ch}x)^2}$.

13) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}5x}-1}{\ln(2-\cos 2\sqrt{x})}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4^{\arcsin 5x}-1)(\sqrt{x}-x^2)^2}{(\sqrt{1+\sin x^2}-1)\cdot\ln(2+\sin x)}$.

14) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}-1)\cos^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos x)\cdot\operatorname{sh}3x}{\sqrt[5]{1+\arcsin x}-1}$.

15) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x-4x^3)\cdot(e^{\sin 5x}-1)}{\arcsin x^2(e^x+e^{-x})}$.

16) а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2)}{e^{\sin 5x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}(e^{7\sqrt[3]{x}}-1)}{\operatorname{tg}^3 x\cdot\ln(1+3x)}$.

6. Исследуйте функции на непрерывность и построить их графики:

1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$;

2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$;

3) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$;

4) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$;

5) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{2n}+1}{x^{2n}+1}$;

6) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+5x^{2n}}{1+x^{2n}}$;

7) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^{2n}+1}$;

8) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+x\cdot e^{nx}}$;

9) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$;

10) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$;

11) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{1+\sin^{2n}x}$;

12) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{2n}-1}{3x^{2n}+4}$;

13) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x^{2n}+4}{4x^{2n}+3}$;

14) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x^{2n}+7}{7x^{2n}+3}$;

15) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{2n}+7}{3+4x^{2n}}$;

16) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Дубатовская Марина Валерьевна
Королева Анна Анатольевна
Рогозин Сергей Васильевич и др.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ:
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ**

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. В. Павлова*
Дизайн обложки *С. Н. Егоровой*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Корректор *А. Г. Терехова*
Компьютерная верстка *С. Н. Егоровой*

Подписано в печать 25.05.2010. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,58. Уч.-изд. л. 5,43. Тираж 100 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.