Стохастические методы оценки справедливой стоимости фондовых опционов: BSM и CRR

А. Василевский, Ю. Гавриш, И. Карачун

В настоящее время анализ финансовых активов, связанный с использованием стохастических методов, переживает период интенсивного развития. Методы общей теории случайных процессов лучше всех подходят для адекватного описания эволюции стоимости основных (акций и облигаций) и производных (форвардов, фьючерсов, опционов и др.) ценных бумаг. Первой работой в этом направлении была диссертация Л. Башелье, который впервые использовал концепцию броуновского движения в модели динамики курса акций, а также вывел формулу инвестиционной цены опциона. Недостаток его модели состоял в том, что курс акции мог получиться отрицательным. Работу в этом направлении продолжил известный экономист П. Самуэльсон, который предложил геометрическое броуновское движение для описания курса акции. Сейчас эта модель связана с именами Ф. Блэка и М. Шоулза, которые получили точные формулы для вычисления справедливой цены и хеджирующих стратегий для европейских опционов. В свою очередь Дж. Кокс, С. Росс и М. Рубинштейн ввели понятие дискретных изменений курсов акций и разработали биномиальную модель финансового рынка.

В данной статье будет проведен расчет и сравнение двух данных моделей. Это позволит понимать специфику работы с опционами и использовать разные методики их расчета при работе с разными видами опционов.

Наиболее простой моделью с дискретными значениями цен активов (дискретное время) является так называемая модель Кокса-Росса-Рубинштейна[1] (CRR) или «бинарный рынок», появившаяся в 1976 г. Цена акции изменяется по правилу «подъем-спад» на фиксированную величину, а что именно произойдет, подъем или спад – зависит от случая. Сегодня она является основной дискретной моделью на рынке ценных бумаг. Ценность ее заключается еще и в том, что известная непрерывная модель Блэка-Шоулза является для нее предельным случаем.

Модель Кокса-Росса-Рубинштейна – довольно простой численный способ смоделировать будущее движение цен. Суть такого моделирования состоит в разбиении времени, оставшегося до экспирации[2] на N шагов в предположении, что цена базисного актива на каждом шаге может либо двинуться вверх на определенную величину с вероятностью p, либо вниз, тоже на некоторую определенную величину с вероятностью $q = 1 - p$ (рис. 1).

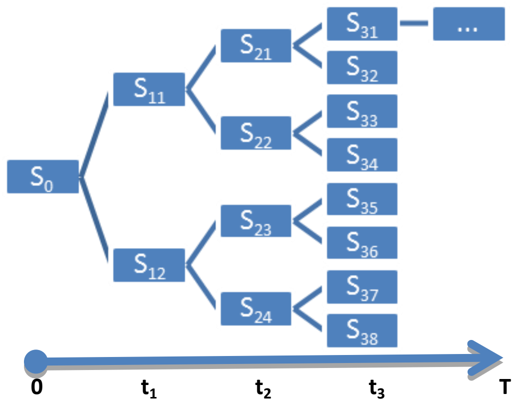

Рисунок 1 – Биномиальная структура изменения цены актива

Будем считать, что доходность на каждом шаге определяется параметром δ так, что цена на каждом следующем шаге может либо вырасти в e^{δ} раз, либо уменьшиться в то же число раз. Таким образом, в модели появляются три параметра: N – число шагов, которое задается исходя

[1] Cox J.C., Ross S.A. The valuation of options for alternative stochastic processes // J. of Financial Economics. – 1976. – Vol. 3. – P. 145–166.

[2] Наступление даты истечения срока действия опциона; последний день для реализации опциона.

из собственных представлений трейдера о необходимой точности; δ – относительное изменение цены на каждом шаге; p – вероятность повышения цены. Последние два параметра должны быть найдены исходя из времени, оставшегося до срока исполнения T, безрисковой процентной ставки r (непрерывно начисляемый процент) и волатильности базисного актива σ.

К моменту истечения срока действия контракта цена колл-опциона C может принимать два значения: 0 или $S-K$ (K – цена исполнения опциона; S – текущий курс акции). Для того, чтобы рассчитать стоимость опциона в начале периода T, необходимо определить стоимость опциона в начале каждого субпериода t, т.е. в каждой точке пересечения ветвей дерева. Эта задача решается методом последовательного дисконтирования. В условиях отсутствия риска ожидаемый доход от акции в субпериоде t должен составить $C_t e^{rt}$. Тогда по правилу расчета математического ожидания случайной величины ожидаемый доход будет равен:

$$C_t e^{rt} = pC_{up} + (1-p)C_{down},\ C_{up} = S_u - S_0,\ C_{down} = S_d - S_0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{e^{rt}-d}{u-d},$$

где u – прирост, а d – падение курсовой стоимости базовой акции, зависящие от фактора времени, в течение которого могут наблюдаться изменения курса ценной бумаги и ее стандартного отклонения. Отсюда вытекают следующие зависимости: $u = e^{\sigma\sqrt{t}}$ и $d = e^{-\sigma\sqrt{t}}$. Таким образом можно оценить вероятность повышения или понижения курса акции, а также определить справедливую цену опциона для любого числа субпериодов[3].

Модель ценообразования опционов Блэка-Шоулза[4] (Black-Scholes Option Pricing Model) является продолжением CRR-модели на случай непрерывного времени, т.е. когда продолжительность субпериодов бесконечно уменьшается, а количество возможных значений курса базовой акции в каждом субпериоде не ограничивается двумя вариантами. История появления модели началась с того, что Ф. Блэк, применил методы расчета производных для измерения приращений дисконтной ставки для опциона с течением времени и в зависимости от движения цены. После этого к Ф. Блэку присоединился М. Шоулз, и результатом их совместной работы стала модель ценообразования для опционов (BSM), разработанная в 1973 г. для оценки премии европейских колл-опционов на акции. В основу модели положена концепция реплицирования – формирования портфеля из базового актива и безрискового, динамика стоимости которого полностью повторяет выплаты по опциону.

При построении BS-модели были сделаны следующие допущения: в течение срока действия опциона дивиденды по базовым акциям не выплачиваются; отсутствуют транзакционные издержки; уровень безрисковой ставки остается неизменным и известен заранее; доходность базовой акции имеет логнормальное распределение. Модель достаточно проста и широко используется в торговле опционами, а потому фактические цены опционов довольно хорошо приспосабливаются к ценам, получаемым из модели[5].

Цена европейского колл-опциона определяется по формуле Блэка-Шоулза:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),\quad d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

где C – теоретическая премия по колл-опциону; S – текущая цена базовых акций; $N(\cdot)$ – кумулятивное стандартное нормальное распределение; K – цена исполнения опциона (страйк); r – процентная ставка по безрисковым активам (годовая); T – время, оставшееся до срока исполнения опциона, выраженное в годах (количество дней до даты истечения/365); σ – годовое стандартное отклонение цены базовых акций (волатильность).

В формуле Блэка-Шоулза для характеристики чувствительности цены опциона, а также для того, чтобы инвестор, осуществляющий операции с опционами, мог оценить принимаемый

---

[3] Колтынюк Б.А. Инвестиции. Учебник. – СПб.: Изд-во Михайлова В.А., 2003. – 848 с.

[4] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // J. of Polit. Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637–654.

[5] Бузова И.А., Маховикова Г.А., Терехова В.В. Коммерческая оценка инвестиций /под ред. Есилова В.Е. – СПб.: Питер, 2004. – 432 с.

на себя риск и потенциальную прибыль применяют различные коэффициенты, получаемые в результате промежуточных расчетов. «Дельта», которая измеряет чувствительность рассчитываемой стоимости опциона к незначительным колебаниям цены базового актива. «Гамма» измеряет скорость изменения дельты в результате незначительных колебаний цены базовых акций. «Тэта» измеряет «разрушающее воздействие времени», т.е. время действует в пользу продавца опционов и против держателя опционов. «Вега» измеряет чувствительность рассчитываемой цены опциона к незначительным изменениям степени ценовой неустойчивости (волатильности), «ро» – чувствительность рассчитываемой цены опциона к изменению процентных ставок (когда процентные ставки растут, премия по колл-опционам увеличивается, а по пут-опционам снижается).

Рассмотрим применение описанных выше моделей для оценки фондовых опционов. Пусть требуется оценить колл-опцион на обыкновенные акции компании Apple[6] со страйком 500$ и остаточным сроком до исполнения 8 дней. Безрисковая процентная ставка 0.15% годовых, текущий курс акции 545.17$, волатильность курса акции 18% (для расчета использован временной ряд логарифмических доходностей базовой акции за предшествующие 180 торговых дней):

$$K = 500\,,\ S = 545.17\,,\ T = {}^{8}\!/_{365} = 0.022\,,\ r = 0.015\,,\ \sigma = 0.18\,.$$

Определим стоимость этого опциона по CRR-модели:

$$u = e^{0.18\sqrt{0.022}} = 1.027,\quad d = e^{-0.18\sqrt{0.022}} = 0.974 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{e^{0.015\times 0.022} - 0.974}{1.027 - 0.974} = 0.4995.$$

Тогда ожидаемая будущая стоимость акции составит:

$$S_1 = 545.17(0.4995 \times 1.027 + (1 - 0.4995) \times 0.974) = 545.34$$

и

$$C = 545.34 - 500 = 45.34\,.$$

Теперь определим стоимость этого же опциона по BS-модели:

$$d_1 = \frac{\ln\left({}^{545.17}\!/_{500}\right) + (0.015 + {}^{0.18^2}\!/_{2}) \times 0.022}{0.18\sqrt{0.022}} = 3.27,\quad N(d_1) = 0.99946,$$

$$d_2 = 0.99946 - 0.18\sqrt{0.022} = 3.24,\quad N(d_2) = 0.99941$$

$$C = 545.17 \times 0.99946 - 500 \times 0.99941 \times e^{-0.015 * 0.022} = 45.33.$$

Использование BS-модели осложняется тем, что в расчетах присутствует множество параметров, которые носят оценочный характер (например, волатильность). Необходимо глубокое понимание методов, используемых для расчета. В современных условиях все торговые терминалы показывают уже рассчитанные цены, которые основаны на реальных данных. Цены рассчитываются динамично, одновременно с изменениями рынка. Кроме того, существует множество приложений, позволяющих самостоятельно рассчитать теоретическую цену путем подстановки значений в программу.

Необходимо учитывать, что модель Блэка-Шоулза исходит из целого ряда допущений, некоторые из которых являются критическими. Так, в модели не учитываются дивиденды, которые платит акционерная компания в течение срока действия опциона. Этого можно избежать, если вычесть ожидаемую величину дивидендов, предварительно продисконтировав ее (скорректировав на безрисковую процентную ставку), из премии. Также следует отметить, что не учитывается уровень комиссионных и других обязательных платежей, которые осуществляет трейдер. Самое спорное допущение – эффективность целевого рынка и случайный характер динамики рыночных цен. Поэтому трейдеры часто используют внутреннюю (вмененную), а не историческую волатильность.

---

[6] NASDAQ – Режим доступа: http://www.nasdaq.com/symbol/aapl/option-chain. – Дата доступа: 04.03.2012.

В свою очередь модель Кокса-Росса-Рубинштейна учитывает факторы, которые не рассматриваются в модели Блэка-Шоулза, являющейся усовершенствованным вариантом биномиальной модели, но они обе дают близкие результаты. Основное отличие – посредством модели Кокса-Росса-Рубинштейна проще учесть возможность досрочного исполнения американского опциона, что очень важно при высокой безрисковой процентной ставке[7]. И поскольку при традиционном экономическом анализе обычно используется «дерево принятия решений», то биномиальная модель представляется нагляднее и проще для применения. Основной ее недостаток – громоздкость расчетов и вычислений, но вместе с тем она позволяет учесть все дополнительные факторы и сценарии развития рыночной ситуации.

[7] Найман, Э.Л. Мастер-трейдинг: Секретные материалы / Э.Л. Найман. – М.: Альпина, 2002. – 320 с.