Физика электромагнитных явлений

Physics of electromagnetic phenomena

УДК 537.8

ПОТЕНЦИАЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ В КАЛИБРОВКЕ КУЛОНА

А. Н. ФУРС[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет,*
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

В калибровке Кулона рассчитаны потенциалы поля произвольного распределения зарядов и токов. Показано, что векторный потенциал определяется не только значениями плотности тока в запаздывающие моменты времени, но и предысторией изменения плотности заряда на временном интервале, ограниченном запаздывающим и текущим моментами. Получены различные представления потенциалов Лиенара – Вихерта в калибровке Кулона. Они применены к случаю равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда.

Ключевые слова: калибровочная инвариантность; калибровки Лоренца и Кулона; запаздывающие потенциалы; потенциалы Лиенара – Вихерта.

Образец цитирования:
Фурс А. Н. Потенциалы электромагнитного поля произвольного распределения зарядов и токов в калибровке Кулона // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. 2017. № 1. С. 43–51.

For citation:
Furs A. N. The electromagnetic field potentials of an arbitrary charge and current distribution in Coulomb gauge. *J. Belarus. State Univ. Phys.* 2017. No. 1. P. 43–51 (in Russ.).

Автор:
Александр Николаевич Фурс – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

Author:
Alexander Furs, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
fursan@bsu.by

THE ELECTROMAGNETIC FIELD POTENTIALS OF AN ARBITRARY CHARGE AND CURRENT DISTRIBUTION IN COULOMB GAUGE

A. N. FURS[a]

[a]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

The field potentials of an arbitrary charge and current distribution are calculated in Coulomb gauge. It is shown that the vector potential is determined by not only the current density values at the retarded time but also prehistory of the charge density variation over the interval from the retarded time to the current time. Various representations of the Liénard – Wiechert potentials are obtained in Coulomb gauge. They are applied to the case of a uniform rectilinear moving point charge.

Key words: gauge invariance; Lorenz and Coulomb gauge; retarded potentials; Liénard – Wiechert potentials.

Одной из задач классической электродинамики является определение электромагнитного поля заданного распределения электрических зарядов и токов. Известно, что решение системы уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля; $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля; ρ – объемная плотность заряда; $\mathbf{j}$ – объемная плотность тока; c – скорость света в вакууме, может быть представлено через скалярный и векторный потенциалы φ и $\mathbf{A}$ электромагнитного поля следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{3}$$

Уравнения (1) выполняются тождественно при подстановке в них соотношений (3), при этом потенциалы φ и $\mathbf{A}$ определены неоднозначно – согласно (3) совокупность потенциалов

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \tag{4}$$

где χ – произвольная функция координат и времени, приводит к тем же значениям полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ (калибровочная инвариантность уравнений электродинамики). Произвольность в выборе потенциалов обычно ограничивают дополнительными условиями, наиболее часто используемое из которых – релятивистски инвариантное условие калибровки Лоренца:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Совместное решение уравнений (2), (3) и (5) носит название запаздывающих потенциалов и имеет вид [1–3]

$$\varphi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \tag{6}$$

где $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки наблюдения; t – текущий момент времени; индексы L указывают на то, что потенциалы подчинены условию Лоренца (5).

В ряде случаев используется условие

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{7}$$

называемое условием калибровки Кулона (индексы C) и не являющееся релятивистски инвариантным. Оно применяется как при решении некоторых задач классической электродинамики, так и при записи

уравнений электродинамики в гамильтоновой форме и переходе к квантованию электромагнитного поля [4; 5]. Хотя формула для скалярного потенциала в калибровке Кулона хорошо известна

$$\varphi_{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \tag{8}$$

в литературе отсутствуют соответствующие общие выражения для векторного потенциала в интегральном представлении вида (6). Их вывод методом функций Грина является целью настоящей работы. Существенно, что для поля φ_{C} (8) в отличие от полей запаздывающих потенциалов (6) характерен мгновенный отклик на изменение плотности заряда ρ в удаленных от точки наблюдения областях. Нами устанавливается, что такая «мгновенность» отклика скалярного потенциала компенсируется в уравнениях (3) соответствующим вкладом векторного потенциала, который, как оказывается, определяется значениями плотности заряда на временном интервале, ограниченном запаздывающим и текущим моментами времени.

Как частный случай полученных в работе общих соотношений в кулоновской калибровке выводятся потенциалы Лиенара – Вихерта для поля точечного заряда, движущегося по заданной траектории. Результаты согласуются с аналогичными результатами работы [6], в которой такие потенциалы были получены более сложным путем (в частности, с использованием разложений по сферическим гармоникам). В заключение вычисляются потенциалы поля равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда.

Отметим, что рассматриваемые здесь электромагнитные потенциалы в классической электродинамике выступают, скорее, как вспомогательные поля. Однако в квантовой теории они играют определяющую роль по сравнению с напряженностями **E** и **B**, входя в основные уравнения теории [7], и в принципе являются наблюдаемыми величинами, имеющими прямой физический смысл (эффект Ааронова – Бома).

Уравнения Максвелла в потенциалах и их решения в кулоновской калибровке

При подстановке соотношений (3) в уравнения Максвелла (2) получается следующая система дифференциальных уравнений для потенциалов:

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = -4\pi\rho, \quad \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

В калибровке Лоренца (5) она принимает вид

$$\Delta\varphi_{\mathrm{L}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathrm{L}}}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad \Delta\mathbf{A}_{\mathrm{L}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_{\mathrm{L}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{9}$$

и имеет решения, даваемые формулами (6). В калибровке Кулона (7) получаем

$$\Delta\varphi_{\mathrm{C}} = -4\pi\rho, \quad \Delta\mathbf{A}_{\mathrm{C}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi_{\mathrm{C}}}{\partial t}. \tag{10}$$

Первое из соотношений (10) – это уравнение Пуассона, а его решением является (8). Дальнейшее рассмотрение касается векторного потенциала $\mathbf{A}_{\mathrm{C}}$, в котором выделим части $\mathbf{A}_{\mathrm{L}}$ (6) и $\mathbf{A}_{\parallel}$: $\mathbf{A}_{\mathrm{C}} = \mathbf{A}_{\mathrm{L}} + \mathbf{A}_{\parallel}$. В силу второго из соотношений (9) поле $\mathbf{A}_{\parallel}$ подчиняется уравнению

$$\Delta\mathbf{A}_{\parallel} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_{\parallel}}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi_{\mathrm{C}}}{\partial t},$$

а поле $\nabla\times\mathbf{A}_{\parallel}$ – однородному волновому уравнению. Исключая волновые решения для свободного пространства, устанавливаем, что $\nabla\times\mathbf{A}_{\parallel} = 0$, т. е. поле $\mathbf{A}_{\parallel}$ является потенциальным (продольным) полем и представляется градиентом некоторого скалярного поля ψ: $\mathbf{A}_{\parallel} = -\nabla\psi$. Таким образом,

$$\mathbf{A}_{\mathrm{C}} = \mathbf{A}_{\mathrm{L}} - \nabla\psi, \tag{11}$$

при этом ψ с точностью до произвольных слагаемых, зависящих только от времени, удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_{\mathrm{C}}}{\partial t}. \tag{12}$$

Решение уравнения (12) с учетом первого из уравнений (10) находим, используя преобразования Фурье входящих в них функций в виде

$$f(\mathbf{x}, t) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k}\, d\omega\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}\, \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega), \quad \tilde{f}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{x}'\, dt'\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}' + i\omega t'} f(\mathbf{x}', t').$$

В результате

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi i}{c}\int\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k}\, d\omega \frac{\omega e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}}{k^2\left(\omega^2/c^2 - k^2\right)}\, \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega),$$

где $k = |\mathbf{k}|$. Принимая во внимание преобразование Фурье для объемной плотности заряда $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$, последнее соотношение переписываем следующим образом:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{x}'\, dt' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')\rho(\mathbf{x}', t'), \tag{13}$$

где введена функция Грина

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{4\pi i}{(2\pi)^4 c}\int\int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{k}\, d\omega \frac{\omega e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - i\omega\tau}}{k^2\left(\omega^2/c^2 - k^2\right)}. \tag{14}$$

Интегрирования в (14) удобно выполнить в сферических координатах (k, θ, ϕ), направляя ось системы координат вдоль вектора **R**. Тогда

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{4\pi i}{(2\pi)^4 c}\int_0^{+\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{\omega \sin\theta e^{ikR\cos\theta - i\omega\tau}}{\omega^2/c^2 - k^2},$$

где $R = |\mathbf{R}|$. Интегралы по угловым переменным рассчитываются элементарно. Вводя замену $\omega = c\Omega$, имеем

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{ic}{\pi^2 R}\int_0^{+\infty} dk \frac{\sin kR}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{\Omega e^{-i\Omega c\tau}}{\Omega^2 - k^2}. \tag{15}$$

Подынтегральное выражение в (15) содержит полюсы в точках $\Omega = \pm k$, поэтому для получения запаздывающей функции Грина смещаем их в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости Ω:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{\Omega e^{-i\Omega c\tau}}{\Omega^2 - k^2} = \lim_{\varepsilon \to +0}\int_C d\Omega \frac{\Omega e^{-i\Omega c\tau}}{(\Omega - k + i\varepsilon)(\Omega + k + i\varepsilon)}. \tag{16}$$

При $\tau < 0$ контур интегрирования C проходит вдоль действительной оси и затем замыкается на бесконечности в верхней полуплоскости комплексной плоскости – интеграл (16) равен нулю. При $\tau < 0$ контур C замыкается в нижней полуплоскости и по теореме о вычетах интеграл равен $-2\pi i\cos(kc\tau)$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \frac{\Omega e^{-i\Omega c\tau}}{\Omega^2 - k^2} = -2\pi i \cos kc\tau\, \Theta(\tau),$$

где $\Theta(\tau)$ – функция Хевисайда, равная нулю при $\tau < 0$ и единице при $\tau > 0$. Для $G(\mathbf{R}, \tau)$ имеем

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{c}{\pi R}\Theta(\tau)\int_0^{+\infty} \frac{dk}{k}\left[\sin k(c\tau + R) - \sin k(c\tau - R)\right].$$

Проинтегрировав по k, получаем окончательное выражение для функции Грина

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{c}{R}\Theta(\tau)\left[1 - \Theta\left(\tau - \frac{R}{c}\right)\right]. \tag{17}$$

Очевидно, что она равна $\frac{c}{R}$ при $0 < \tau < \frac{R}{c}$ и нулевая для остальных значений τ.

Подставляя теперь соотношение (17) в (13), для скалярного поля $\psi(\mathbf{x}, t)$ имеем

$$\psi(\mathbf{x}, t) = c\int d^3\mathbf{x}' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Theta(t-t')\left[1-\Theta\left(\frac{t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)\right],$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = c\int d^3\mathbf{x}' \int\limits_{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c}^{t} dt' \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{18}$$

Наконец, согласно (6), (8), (11) и (18) выражения для потенциалов электромагнитного поля произвольного распределения зарядов $\rho(\mathbf{x}, t)$ и токов $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ в калибровке Кулона принимают вид

$$\varphi_C(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|},$$

$$\mathbf{A}_C(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - c\nabla\int d^3\mathbf{x}' \int\limits_{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c}^{t} dt' \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{19}$$

Как видно из (19), значение скалярного потенциала φ_C в точке наблюдения $\mathbf{x}$ определяется мгновенным распределением объемной плотности заряда $\rho(\mathbf{x}', t)$ в текущий момент времени t. В то же время в выражении для векторного потенциала $\mathbf{A}_C$ присутствуют два слагаемых. Первое из них (как и в лоренцевой калибровке) соответствует вкладу объемной плотности тока $\mathbf{j}$, взятой в запаздывающие моменты времени $t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c$. При этом величина запаздывания определяется расстоянием $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$. Во втором же слагаемом учитывается вся предыстория изменения объемной плотности заряда ρ в точках $\mathbf{x}'$, начиная от запаздывающего момента $t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c$ и заканчивая текущим моментом t. Таким образом, можно говорить о сверхсветовом влиянии распределения зарядов ρ на формирование полей φ_C и $\mathbf{A}_C$ в точке наблюдения $\mathbf{x}$ (в отличие от полей φ_L и $\mathbf{A}_L$ (6)). Это влияние, впрочем, не сказывается на электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Действительно, потенциалы $\mathbf{A}_C$ и $\mathbf{A}_L$ отличаются лишь градиентом функции ψ (11). Поэтому

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}_C = \nabla\times\mathbf{A}_L. \tag{20}$$

Аналогично для электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi_C - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_C}{\partial t} = -\nabla\varphi_C - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_L}{\partial t} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\nabla\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_L}{\partial t} +$$

$$+\nabla\frac{\partial}{\partial t}\int d^3\mathbf{x}' \int\limits_{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c}^{t} dt' \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = -\nabla\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_L}{\partial t} +$$

$$+\nabla\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \nabla\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = -\nabla\varphi_L - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_L}{\partial t}. \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) показывают, что в силу калибровочной инвариантности «сверхсветовые» потенциалы φ_C и $\mathbf{A}_C$ (19) приводят к тем же значениям полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, что и запаздывающие потенциалы φ_L и $\mathbf{A}_L$ (6). Переход от калибровки Кулона к калибровке Лоренца можно рассматривать как частный случай общих калибровочных преобразований (4) с функцией χ, равной ψ (18).

Выражение для векторного потенциала $\mathbf{A}_C$ может быть представлено в другом виде, если в (19) вычислить входящий туда градиент:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\mathbf{j}\left(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c\right) - c\rho\left(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c\right)\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right] +$$

$$+ c\int d^3\mathbf{x}' \int\limits_{t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c}^{t} dt'\rho(\mathbf{x}', t')\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}. \qquad (22)$$

Далее, применим полученные общие соотношения (19) и (22) к расчету потенциалов поля произвольно движущегося точечного заряда.

Потенциалы Лиенара – Вихерта в калибровке Кулона

Пусть задан закон движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ точечного заряда q. Тогда его скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$. Плотность заряда и плотность тока определяются выражениями:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)\right), \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q\mathbf{v}(t)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)\right), \qquad (23)$$

где $\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)\right)$ – дельта-функция. При подстановке формул (23) в (6) получаются потенциалы поля заряда в лоренцевой калибровке, называемые потенциалами Лиенара – Вихерта [1; 2]:

$$\varphi_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}})| - \mathbf{v}(t_{\mathrm{r}})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}}))/c}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{L}}(\mathbf{x}, t) = \frac{q\mathbf{v}(t_{\mathrm{r}})/c}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}})| - \mathbf{v}(t_{\mathrm{r}})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}}))/c}. \qquad (24)$$

Правые части формул (24) рассчитываются для запаздывающего (ретардированного) момента времени t_{r}, который находится из уравнения

$$c(t-t_{\mathrm{r}}) = |\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}})|. \qquad (25)$$

Для отыскания потенциалов Лиенара – Вихерта в калибровке Кулона предварительно находим функцию $\psi(\mathbf{x}, t)$ (18)

$$\psi(\mathbf{x}, t) = qc\int d^3\mathbf{x}' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{r}(t'))}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Theta(t-t')\left[1-\Theta\left(t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c\right)\right] =$$

$$= qc\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt'}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}\Theta(t-t')\left[1-\Theta\left(t-t'-|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|/c\right)\right] = qc\int\limits_{t_{\mathrm{r}}}^{t} \frac{dt'}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}.$$

Тогда согласно (19) окончательно имеем (см. также [6])

$$\varphi_{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)|},$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, t) = \frac{q\mathbf{v}(t_{\mathrm{r}})/c}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}})| - \mathbf{v}(t_{\mathrm{r}})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}}))/c} - qc\nabla\int\limits_{t_{\mathrm{r}}}^{t} \frac{dt'}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}. \qquad (26)$$

Скалярный потенциал φ_{C} представляет собой мгновенный кулоновский потенциал точечного заряда. Векторный же потенциал $\mathbf{A}_{\mathrm{C}}$ определяется состояниями заряда на участке его траектории, ограниченном ретардированным и текущим положениями заряда.

Еще одно представление для $\mathbf{A}_{\mathrm{C}}$ получается из формулы (22):

$$\mathbf{A}_{\mathrm{C}}(\mathbf{x}, t) = \frac{q\left[\dfrac{\mathbf{v}(t_{\mathrm{r}})}{c} - \dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}})}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}})|}\right]}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}})| - \mathbf{v}(t_{\mathrm{r}})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t_{\mathrm{r}}))/c} + qc\int\limits_{t_{\mathrm{r}}}^{t} dt' \frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|^3}. \qquad (27)$$

Простейшим движением заряда является равномерное прямолинейное движение. Потенциалы в калибровке Кулона для этого случая будут рассчитаны далее.

Потенциалы поля равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда

Не теряя общности, будем считать, что в момент времени $t = 0$ равномерно и прямолинейно движущийся заряд находится в начале отсчета, а ось x направлена вдоль вектора его скорости $\mathbf{v}$. Тогда

$$\mathbf{r}(t) = vt\mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{v}(t) = v\mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{r}(t) = (x - vt)\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \qquad \left|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)\right| = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2},$$

где $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ – орты декартовой системы координат; v – модуль скорости заряда. Уравнение (25) для вычисления запаздывающего момента времени t_r принимает вид

$$c(t - t_\text{r}) = \sqrt{(x - vt_\text{r})^2 + y^2 + z^2}, \tag{28}$$

откуда

$$t_\text{r} = \gamma^2\left(t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}}\right), \tag{29}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Знаменатели $\left|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_\text{r})\right| - \dfrac{\mathbf{v}(t_\text{r})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_\text{r}))}{c}$, входящие в (24) и (26), будут равны

$$\left|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_\text{r})\right| - \frac{\mathbf{v}(t_\text{r})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_\text{r}))}{c} = c(t - t_\text{r}) - \frac{v}{c}(x - vt_\text{r}) =$$

$$= c\left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t_\text{r}\right] = \sqrt{(x - vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}}.$$

Согласно (24) получаем известные выражения для потенциалов поля точечного заряда в лоренцевой калибровке [1–3]:

$$\varphi_\text{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - v^2/c^2\right)\left(y^2 + z^2\right)}},$$

$$\mathbf{A}_\text{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{qv/c}{\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - v^2/c^2\right)\left(y^2 + z^2\right)}}\mathbf{e}_x. \tag{30}$$

Для расчета потенциалов в кулоновской калибровке следует найти входящий в (26) интеграл. С учетом уравнения (28) имеем

$$-\int_{t_\text{r}}^{t}\frac{dt'}{\left|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')\right|} = -\int_{t_\text{r}}^{t}\frac{dt'}{\sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{1}{v}\ln\left[x - vt + \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2}\right] - \frac{1}{v}\ln\left[x - vt_\text{r} + c(t - t_\text{r})\right].$$

Подставляя сюда значение t_r из (29), получаем

$$-\int_{t_\text{r}}^{t}\frac{dt'}{\left|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')\right|} = \frac{1}{v}\ln\left[x - vt + \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2}\right] -$$

$$- \frac{1}{v}\ln\left[x - vt + \sqrt{(x - vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\gamma^2}}\right] + \frac{1}{v}\ln\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Компонентами градиента в (26) являются частные производные по декартовым координатам:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{t_\mathrm{r}}^{t}\frac{dt'}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}\left(t'\right)\right|}=\frac{1}{v}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+\left(y^2+z^2\right)/\gamma^2}}\right],$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{t_\mathrm{r}}^{t}\frac{dt'}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}\left(t'\right)\right|}=\frac{y\left(x-vt\right)}{v\left(y^2+z^2\right)}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+\left(y^2+z^2\right)/\gamma^2}}-\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+y^2+z^2}}\right],$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{t_\mathrm{r}}^{t}\frac{dt'}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}\left(t'\right)\right|}=\frac{z\left(x-vt\right)}{v\left(y^2+z^2\right)}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+\left(y^2+z^2\right)/\gamma^2}}-\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+y^2+z^2}}\right].$$

В результате скалярный потенциал поля точечного заряда, равномерно и прямолинейно движущегося со скоростью v, в калибровке Кулона имеет вид

$$\varphi_\mathrm{C}\left(\mathbf{x},\,t\right)=\frac{q}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+y^2+z^2}},\tag{31}$$

а векторный потенциал запишется как

$$\mathbf{A}_\mathrm{C}\left(\mathbf{x},\,t\right)=\frac{qc}{v}\left\{\mathbf{e}_x\left[\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+y^2+z^2}}-\frac{1-v^2/c^2}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+\left(1-v^2/c^2\right)\left(y^2+z^2\right)}}\right]+\right.$$

$$\left.+\left(y\mathbf{e}_y+z\mathbf{e}_z\right)\frac{x-vt}{y^2+z^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+\left(1-v^2/c^2\right)\left(y^2+z^2\right)}}-\frac{1}{\sqrt{\left(x-vt\right)^2+y^2+z^2}}\right]\right\}.\tag{32}$$

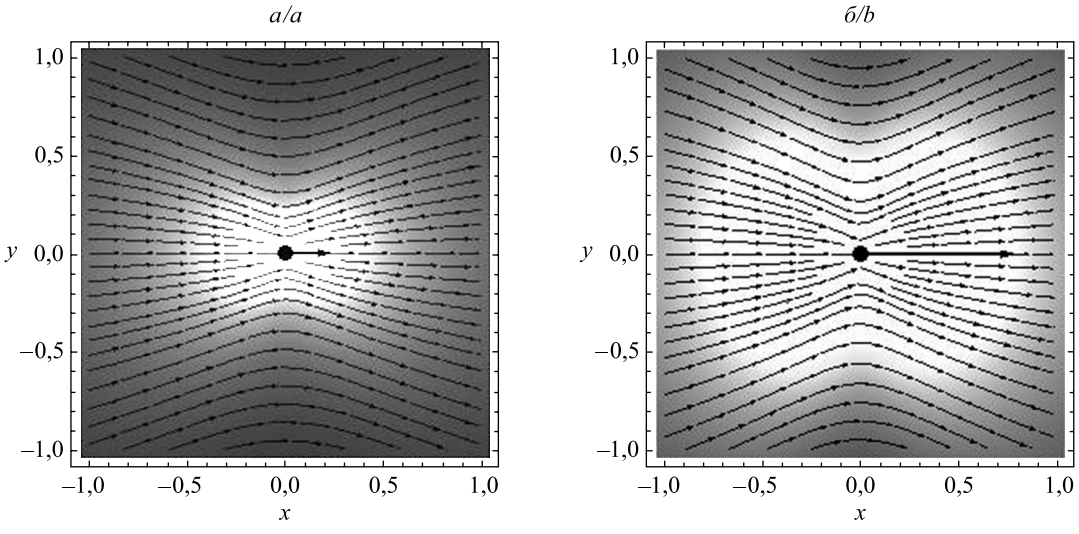
Прямым вычислением можно убедиться в том, что потенциал $\mathbf{A}_\mathrm{C}$, как и требуется, удовлетворяет условию калибровки (7).

В отличие от потенциала $\mathbf{A}_\mathrm{L}$ (30), направленного вдоль скорости v заряда, потенциал $\mathbf{A}_\mathrm{C}$ (32) имеет также составляющие, перпендикулярные к v. При этом форма линий тока векторного поля $\mathbf{A}_\mathrm{C}$ слабо зависит от значения скорости v (рисунок).

Для скалярного поля φ_C (31) эквипотенциальными поверхностями являются сферы, в то время как для поля φ_L (30) – эллипсоиды вращения. Потенциалы как φ_L, $\mathbf{A}_\mathrm{L}$, так и φ_C, $\mathbf{A}_\mathrm{C}$ в соответствии с уравнениями (3) приводят к следующим выражениям для электрического и магнитного полей равномерно и прямолинейно движущегося точечного заряда:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{x},\,t\right)=\frac{q\left(1-v^2/c^2\right)}{\left[\left(x-vt\right)^2+\left(1-v^2/c^2\right)\left(y^2+z^2\right)\right]^{3/2}}\left[\left(x-vt\right)\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y+z\mathbf{e}_z\right],$$

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{x},\,t\right)=\frac{qv\left(1-v^2/c^2\right)}{c\left[\left(x-vt\right)^2+\left(1-v^2/c^2\right)\left(y^2+z^2\right)\right]^{3/2}}\left(-z\mathbf{e}_y+y\mathbf{e}_z\right).$$



Линии тока поля $\mathbf{A}_C$ (32) в плоскости xy при $t = 0$.
Скорость точечного заряда $v = 0{,}25c$ (*а*) и $v = 0{,}8c$ (*б*).
Светлые тона фона соответствуют бóльшим значениям $|\mathbf{A}_C|$, а темные – меньшим
Streamlines of the field $\mathbf{A}_C$ (32) in xy-plane at $t = 0$.
Speed of a point charge is $v = 0.25c$ (*a*) and $v = 0.8c$ (*b*).
Light background colors correspond to the greater values of $|\mathbf{A}_C|$ and dark colors to the smaller ones

В заключение отметим, что соотношения (31), (32) для потенциалов в калибровке Кулона (как и более общие соотношения (19), (22), (26), (27)) верны лишь в одной выделенной инерциальной системе отсчета в отличие от соответствующих соотношений (30), (6), (24) для потенциалов в калибровке Лоренца, выполняющихся во всех инерциальных системах отсчета.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., 1973.
2. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М., 1965.
3. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. М., 1985.
4. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. М., 1956.
5. *Гинзбург В. Л.* Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М., 1980.
6. *Wundt B. J., Jentschura U. D.* Sources, potentials and fields in Lorenz and Coulomb gauge: Cancellation of instantaneous interactions for moving point charges // Ann. Phys. 2012. Vol. 327, № 4. P. 1217–1230.
7. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М., 1969.

REFERENCES

1. Landau L. D., Lifshits E. M. Teoriya polya. Mosc., 1973 (in Russ.).
2. Dzhekson Dzh. Klassicheskaya elektrodinamika. Mosc., 1965 (in Russ.).
3. Bredov M. M., Rumyantsev V. V., Toptygin I. N. Klassicheskaya elektrodinamika. Mosc., 1985 (in Russ.).
4. Gaitler V. Kvantovaya teoriya izlucheniya. Mosc., 1956 (in Russ.).
5. Ginzburg V. L. Teoreticheskaya fizika i astrofizika. Dopolnitel'nye glavy. Mosc., 1980 (in Russ.).
6. Wundt B. J., Jentschura U. D. Sources, potentials and fields in Lorenz and Coulomb gauge: Cancellation of instantaneous interactions for moving point charges. *Ann. Phys.* 2012. Vol. 327, No. 4. P. 1217–1230.
7. Akhiezer A. I., Berestetskii V. B. Kvantovaya elektrodinamika. Mosc., 1969 (in Russ.).

Статья поступила в редколлегию 02.09.2016.
Received by editorial board 02.09.2016.