Оптимизация портфеля акций и опционов

И.А. Карачун

В последние годы в нашей стране в связи с развитием рыночной экономики существенно повысился интерес к постановке и решению задач теории инвестиций. Среди этих задач значительное место занимают задачи оптимизации портфелей активов. Действительно, выбирая различные варианты распределения капитала между объектами, в которые инвестируется капитал, мы будем иметь различные результаты, если под результатом понимать величину дохода, полученного в течение заранее определенного периода. Очевидно, оптимальное распределение инвестируемого капитала должно обеспечивать в некотором смысле наилучший результат (приобрести недооцененные акции, чья рыночная цена на момент покупки ниже истинной, и избавиться от переоцененных бумаг и тем самым получить в перспективе максимальную прибыль). В то же время, решение о структуре распределения капитала принимается часто в условиях неопределенности, когда доходность от вложения капитала в объекты инвестирования носит случайный характер. Тем самым появляется риск вложения капитала и задача оптимизации портфеля инвестиций должна ставиться и решаться в условиях наличия риска.

Следует подчеркнуть, что неустойчивость нарождающихся в странах СНГ рынков инвестиций и, в частности, рынков ценных бумаг, порождена, прежде всего, более значительным, чем на Западе влиянием случайных факторов, носящих политический и экономический характер, а, следовательно, и большим уровнем риска вложения капитала в различные сегменты инвестиционного рынка.

Основы современной теории портфельного инвестирования (portfolio investment theory) были заложены в пятидесятые годы в работах американского математика-экономиста Г. Марковица. Основной заслугой Марковица в теории инвестирования является привнесение им в эту теорию стохастического подхода, согласно которому доходность инвестируемого капитала трактуется как случайная величина, характеристики которой и определяют ожидаемое значение доходности и риска реализации ожидаемого значения. Следовательно, впервые в теории инвестирования, начиная с работ Г.Марковица[1], риск инвестирования получил точное математическое числовое выражение, что и позволило сконструировать математические модели задач оптимизации портфелей инвестиций.

В постановке Марковица доходность вложения капитала в рассматриваемый объект инвестирования является случайной величиной, математическое ожидание которой берется в качестве ожидаемого значения доходности от вложения капитала в рассматриваемый объект. В качестве риска Марковиц предложил брать меру отклонения от ожидаемого значения – среднеквадратичное отклонение доходности как случайной величины. Такой выбор математического выражения для риска позволил реализовать в схеме портфельного инвестирования известный в экономике принцип, выраженный во фразе “не клади яйца в одну корзину”, т.е. диверсификация капитала между несколькими объектами инвестирования приводит к уменьшению риска по сравнению с риском вложения капитала в отдельные объекты. Математическая модель Г.Марковица оптимизации портфеля инвестиций принадлежит к классу задач квадратичного программирования, теория численного решения которых развивалась в 50–60-е годы прошлого века в известной компании Rand Corporation, где в те годы проводил свои исследования Марковиц вместе с одним из создателей линейного и нелинейного программирования Данцингом. В настоящее время теория портфельного инвестирования широко используется в странах с развитой рыночной экономикой и является одним из

[1] Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance, Vol.7, №1, March 1952.

основных инструментов, с помощью которого повышается эффективность использования материальных и финансовых ресурсов.

Современная теория финансового портфеля основана на понятиях систематического (рыночного) и несистематического рисков ценной бумаги. Риск (в литературе также встречается термин общий риск) ценной бумаги есть неопределенность ее дохода в конце периода инвестирования. Риск измеряется дисперсией доходности ценной бумаги за фиксированный интервал времени, например, месяц, квартал, год и т.д. Данное определение риска является наиболее распространенным, хотя существуют и другие. Систематический или рыночный риск акции – это та часть общего риска, которая зависит от факторов, общих для всего рынка ценных бумаг. К ним относятся неожиданные изменения макроэкономических показателей (ВВП, скорость промышленного роста, собираемость налогов, процентная ставка, уровень инфляции и т.д.), изменение политической ситуации в стране или в мире, психологический настрой участников рынка и др. Несистематический или собственный риск – это часть общего риска, зависящая только от состояния дел в данной компании. Он характеризуется неожиданными изменениями таких факторов как вероятность смены руководства, наличие долгосрочных договоров, просроченной дебиторской или кредиторской задолженности, показателями финансового состояния и др.

Перейдем непосредственно к рассмотрению инвестиционного портфеля, содержащего не только акции, но и производные ценные бумаги, в частности, опционы. Простейший пример опциона – европейский колл – это контракт, определяемый следующим образом: в оговоренный момент времени (дата исполнения) собственник опциона может купить определенный актив (основной актив) по оговоренной цене (цене исполнения). Слово "может" в этом описании означает, что для держателя опциона этот контракт является правом, а не обязанностью, следовательно, он должен иметь собственную стоимость. Более того, она должна быть выплачена в момент открытия контракта. Стоимость опциона зависит от изменений в стоимости основного актива, безрисковой процентной ставки, а также от даты и цены исполнения.

Рассмотрим портфель, состоящий из облигации S_t^0 с постоянной процентной ставкой r, n различных акций S_t^i, $i=\overline{1,n}$, и контракта $f(t,S_t^1,\dots,S_t^n)$.

Динамика облигации описывается положительной стохастической последовательностью, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt,\ S_0^0 = 1. \tag{1}$$

Облигация называется безрисковым активом из-за отсутствия диффузионной составляющей в уравнении. На практике в качестве S_t^0 можно брать банковский вклад с постоянной процентной ставкой r.

Курс i-ой акции тоже описывается положительной стохастической последовательностью, но описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_t^j),\ S_0^i = p_i,\ i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где μ_i, σ_{ij} – постоянные, W_t – n-мерный стандартный винеровский процесс на полном фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega,\ F_{t\ 0\le t\le T}, P)$.

Стоимость опциона в момент времени t задается непрерывно дифференцируемой функцией $f(t,p_1,\dots,p_n)$, которая удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$df(t,p_1,...,p_n)=(r\ f(t,p_1,...,p_n)+\sum_{i=1}^{n} f_{p_i}(t,p_1,...,p_n)\,p_i(\mu-r))dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{n} f_{p_i}(t,p_1,...,p_n)\,p_i\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}dW_t^{\,j}. \tag{3}$$

Когда речь идет о случайных величинах, для формализации предпочтений используется концепция ожидаемой полезности[2]. Введем функции полезности потребления и инвестиций – $U_1(t,c(t))$ и $U_2(X_T)$ соответственно.

Тогда задача оптимизации инвестиционного портфеля состоит в нахождении

$$\max_{\pi,c} E\left(\int_0^T U_1(t,c(t))dt+U_2(X_T)\right). \tag{4}$$

С точки зрения мартингального подхода к оптимизации портфеля интуитивно понятно следующее: поскольку курсы опционов несут ту же информацию, что и курсы акций (генерируют ту же самую фильтрацию), то и оптимальная периодическая стоимость опционного портфеля и портфеля из акций должны совпадать. Следовательно, можно перестроить соответствующую торговую стратегию из оптимальной для акций.

Обозначим “дельта-матрицу” портфеля $\psi(t)$ (дельта – показатель чувствительности рассчитываемой стоимости опциона к незначительным колебаниям цены базового актива, то есть отношение прироста цены опциона к приросту цены финансового инструмента, лежащего в его основе; изменяется в интервале от 0 до 1 для колл-опционов, и в интервале от -1 до 0 для пут-опционов), где

$$\psi_{ij}(t):=f_{p_j}^{(i)}(t,p_1,...,p_n) \tag{5}$$

Пусть φ_t – оптимальная торговая стратегия соответствующей задачи для портфеля из акций. Тогда оптимальная опционная стратегия $\pi_t=(\pi_t^1,\dots,\pi_t^n)$ – доля каждого рискового актива в портфеле, имеет вид

$$\pi_t^i=\frac{(\psi^T(t))^{-1}\varphi_t^i\ f(t,p_i)}{X_t}. \tag{6}$$

Дельта-матрица $\psi(t)$ должна быть регулярной, так как это условие обеспечивает полноту рынка, образованного облигацией и n опционами. В каждый текущий момент времени t все n компонентов броуновского движения воздействуют на цены опционов. Без этого условия в задаче невозможно перейти от опционов к основным активам.

В качестве примера производной ценной бумаги будем рассматривать европейский колл-опцион на одну акцию, стоимость которого задается формулой Блека-Шоулза[3]

$$f(t,p_1)=p_1\Phi(d_1(t))-Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t)),$$

где K – цена исполнения, p_1 – текущий курс акции, T – время до истечения срока опциона, σ – дисперсия доходности акции, $\Phi(\cdot)$ – стандартная функция Лапласа, и

$$d_1(t)=\frac{\ln(\frac{p_1}{K})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=d_1(t)-\sigma\sqrt{T-t}.$$

Пусть функция полезности логарифмическая $U_1(t,x)=U_2(x)=\ln(x)$ и $n=1$. Тогда оптимальная стратегия для задачи с акциями $\varphi_t^1=\frac{\mu-r}{\sigma^2}\frac{X_t}{S_t^1}$. По формуле (6) получаем портфель, соответствующий опционной задаче

---

[2] Karatzas I., Lehoczky J.P., Shreve S. E. Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon // SIAM Journal on Control and Optimization. 1987. Vol. 25. – P. 1157–1186.

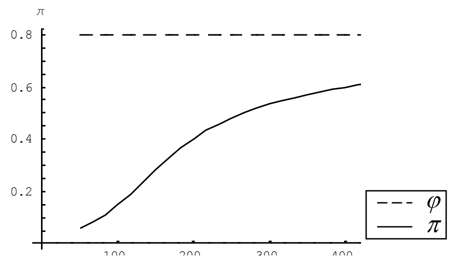
[3] Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. – P. 637–654.

$$\pi_t^1 = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{f(t, S_t^1)}{f_{p_1}(t, S_t^1) S_t^1} = \frac{\mu - r}{\sigma^2}(1 - \frac{K e^{r(T-t)} \Phi(d_2)}{\Phi(d_1) p_1}). \quad (7)$$

Следовательно, если инвестор следует оптимальной опционной стратегии, доля капитала, инвестированная в рисковый актив, всегда строго меньше чем у портфеля из акций. Так как риск опциона больше риска основного актива, можно сказать, что кажущееся снижение риска от вложения меньшей доли капитала в акцию компенсировано тем, что эта сумма обладает большим риском, чем такая же, но вложенная в акции.

Сравним графически два процесса φ (портфель, состоящий только из акций) и π (опционный портфель) как функции от основного актива на рис. 1, взяв $r = 0$, $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.25$, $T = 1$, $t = 0$, $K = 100$. Очевидно, что при высоких курсах акции (в сравнении с ценой исполнения) опционный портфель стремится к портфелю из акций, в то время как при малых – к нулю.

Рис. 1. φ и π как функции от основного актива



Из графика видно, что для более рискового колл-опциона (опцион “вне денег”) доля капитала, инвестированная в рисковый актив, значительно меньше, а следовательно – меньше и возможный убыток.

Пусть теперь функция полезности та же, но $n = 2$, то есть портфель включает в себя безрисковый актив, акцию и опцион. Максимизируем выходной капитал, инвестируя в акцию номер 1 и колл-опцион на акцию номер 2. Тогда дельта-матрица

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Phi(d_1(t)) \end{pmatrix},$$

где в определении $d_1(t)$ σ надо заменить на $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Соответственно

$$\begin{aligned} \pi_t^1 &= \frac{\mu - r}{\sigma^2}, \\ \pi_t^2 &= \frac{\mu - r}{\sigma^2}(1 - \frac{K e^{r(T-t)} \Phi(d_2)}{\Phi(d_1) p_1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичным способом можно решить задачу максимизации ожидаемой полезности инвестиций и потребления для любого количества акций и опционов в портфеле. Решение этой задачи классическими методами стохастической теории управления представляется достаточно сложным в случае, когда стоимость опциона задается нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением (3). Комбинируя мартингальный подход к оптимизации портфеля с методом реплицирования опционов на полных рынках, можно избежать этой сложности.

Применим рассмотренную модель для составления реального портфеля. Пусть $n = 2$ и об основных активах известно следующее:

Таблица 1. Активы портфеля

Акция	Курс (p_i)	Ожидаемая доходность (μ_i)	Дисперсия (σ_i)
ТГК	0,2153	0,0992	0,3974
АстрЭС	0,91	0,0019	0,0343

Располагая стартовым капиталом в 1 000 000 RUR, найдем оптимальный портфель на период в 3 месяца (T = 0,25). В качестве безрискового актива возьмем купонную облигацию "РЖД-06" номинальной стоимостью 1000 RUR. Её годовая доходность равна 7,35% (то есть r = 0,0735).

Составим портфель из двух европейских колл-опционов на 1000 акций каждый, в расчете на получение прибыли от роста курсов основных активов при условии, что цены исполнения равны $K_1 = 220$ и $K_2 = 920$. Для этого воспользуемся формулой (7):

$$\pi_0^1 = \frac{0,0992 - 0,0735}{0,16}\left(1 - \frac{220e^{0,0735\cdot 0.25}\Phi(-0,1790)}{\Phi(0,0210)\cdot 215,3}\right) = 0,0196,$$

$$\pi_0^2 = \frac{0,0019 - 0,0735}{0,16}\left(1 - \frac{920e^{0,0735\cdot 0.25}\Phi(-0,1657)}{\Phi(0,0343)\cdot 910}\right) = -0,0580.$$

Аналогично можно составить портфель из акции и опциона. Результаты вычислений приведены в таблице 2.

Таблица 2. Варианты состава портфеля

Состав портфеля	Доли активов	Суммы вложений
облигация РЖД акция ТГК опцион на акцию АстрЭС	0,8394 0,1606 -0,0580	839 400 160 600 -58 000
облигация РЖД опцион на акцию ТГК акция АстрЭС	0,9804 0,0196 -0,4475	980 400 19 600 -447 500
облигация РЖД опцион на акцию ТГК опцион на акцию АстрЭС	0,9804 0,0196 -0,0580	980 400 19 600 -58 000

Сравнивая полученные результаты можно сделать следующие выводы. Так как все эти портфели обеспечивают максимальную полезность инвестиций, выбор между ними зависит от предпочтений инвестора, его склонности к риску.

На первый взгляд кажется, что первый портфель имеет наибольший риск, так как доля безрискового актива у него самая маленькая. С другой стороны, ожидаемая доходность этого портфеля максимальна. Это обусловлено тем, что, во-первых, акция ТГК имеет достаточно высокую доходность по сравнению с безрисковой ставкой. И, несмотря на более высокий риск (который обычно определяется дисперсией), вероятность того, что её курс вырастет относительно настоящего, настолько велика, что инвестору выгоднее купить её сразу, а не тратить средства на дополнительную страховку в виде покупки опциона. Во-вторых, акция АстрЭС, имея сравнительно небольшую доходность, в то же время имеет очень маленький риск и стойкую тенденцию к росту курса. Исходя из этого, инвестор может осуществить заем на сумму 58 000 RUR, купить опцион на эту акцию, а остальные средства вложить в акцию ТГК и облигацию РЖД. В конце периода, исполнив опцион и перепродав акцию по более высокому курсу, он не только покроет заем, но и получит хорошую прибыль, не тратя собственные средства. В противном случае инвестор не будет исполнять опцион, а свой сравнительно небольшой долг выплатит из дохода портфеля по другим активам.

Два других портфеля предназначены для инвесторов менее склонных к риску, так как основная часть средств вложена в безрисковый актив. Разница между ними заключается только в размерах займа. В первом случае инвестор берет в долг 447 500 RUR и покупает акцию АстрЭС. Если в конце периода его ожидания не оправдаются, придется покрывать всю эту сумму из прибыли, полученной от безрискового актива и перепродажи акции ТГК после исполнения опциона. То есть, убыток будет гораздо больше, чем если бы он купил опцион на сумму 58 000 RUR и просто его не исполнил, при прочих равных условиях.

В заключение следует отметить, что опционы могут использоваться различными способами для получения прибыли от роста или падения курсов. Большинство основных стратегий используют пут- и колл-опционы как минимальную стоимость риска ценной бумаги или индекса. Опционы могут использоваться и для защиты от снижения рыночной цены или в качестве страховки от возрастания. Они позволяют покупать активы по низкой цене и продавать по более высокой, создавать дополнительные поступления в портфель. Опционные стратегии дают возможность получать прибыль от изменения цен, невзирая на направление развития рынка. При использовании в качестве составной части портфеля, опционы могут снизить волатильность и повысить прибыли путем увеличения так называемого “кредитного плеча”. Как правило, стоимость опциона не превышает 2–5% цены основного актива, а это позволяет в итоге получить гораздо больше единиц ценной бумаги, чем если покупать её непосредственно. Следовательно, даже с учетом выплаты займа, доход инвестора сильно возрастает. Все это делает опционы очень популярными среди инвесторов, как торгующих краткосрочными контрактами, так и занимающимися долгосрочными инвестициями.