БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.9

ЛЕОНОВА
Евгения Юрьевна

ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ НА ОСНОВЕ РАСШИРЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Минск, 2017

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Антоневич Анатолий Борисович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой функционального анализа
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Забрейко Петр Петрович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры нелинейного анализа
и аналитической экономики
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета;

Борухов Валентин Терентьевич,
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник отдела
математической теории систем ГНУ
"Институт математики Национальной
Академии Наук Беларуси".

Оппонирующая организация — Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Ф. Скорины”.

Защита состоится 15 сентября 2017 г. в 12:00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, тел. ученого секретаря (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан “ ” 2017 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физико-математических наук
доцент Е.М. Радыно

ВВЕДЕНИЕ

Преобразование Лежандра ставит в соответствие функционалу f на банаховом пространстве двойственный функционал f^*, определенный на сопряженном пространстве. Это преобразование играет важную роль в выпуклом анализе, в теории дифференциальных уравнений, в вариационном исчислении, в классической механике, термодинамике, теории упругости и других разделах математической физики. Различные вопросы теории преобразования Лежандра и его приложений рассматривались в работах У. Фенхеля, Ж. Моро, Л. Янга, Р. Рокафеллера, Р. Темама. И. Экланда, В.М. Тихомирова, В.П. Маслова и многих других авторов. [1]

Вариационным принципом для заданной величины обычно называют ее представление в виде максимума некоторого функционала. В ряде случаев вариационные принципы записываются как равенства $f = g^*$, т.е. утверждения, что рассматриваемый функционал f является преобразованием Лежандра некоторого функционала g.

Например, в термодинамике состояние системы характеризуется т.н. *термодинамическими функционалами*, такими как *энтропия* $s(\varrho, e)$, *свободная энергия Гельмгольца* $f(\beta, \varrho)$, *давление* $p(\beta, \mu)$, и *энтальпия* $en(e, \mu)$. Существенным фактом термодинамики являются вариационные принципы утверждающие, что эти термодинамические функционалы связаны между собой преобразованиями Лежандра по соответствующим переменным [2].

Преобразование Лежандра возникает также в теории операторов взвешенного сдвига и более общих функциональных операторов.

Оператор взвешенного сдвига действует в пространстве функций на множестве X и задается с помощью коэффициента a и отображения $\alpha : X \to X$; при фиксированном α спектральный радиус оператора рассматривается как функционал от a. Для разных классов операторов взвешенного сдвига формулы для спектрального радиуса были получены в работах А.Б. Антоневича, Ю. Карловича, В. Кравченко, А.В. Лебедева, А. Китовера, Ю. Латушкина, А. Степина, В.И. Бахтина, К. Зайковского, У. Осташевской и др. Для каждого α строится функционал g_α, определенный на пространстве мер на X. В предположении, что непрерывны функции $\varphi(x) = \ln |a(x)|$, называемые *потенциалами*, формулы для спектрального радиуса могут быть записаны с помощью преобразования Лежандра функционалов g_α. Эти формулы удоб-

---

[1] Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М. : Мир, 1979. – 399 с.

[2] Минлос, Р.А. Введение в математическую статистическую физику / Р.А. Минлос. – М. : МЦНМО, 2002. – 112 с.

нее записывать с помощью мультипликативного варианта преобразования Лежандра, использующего, вместо линейных, мультипликативные функционалы, которые в рассматриваемом случае задаются как средние геометрические от функции по мере.

Функциональный оператор есть сумма нескольких операторов взвешенного сдвига, заданных с помощью разных преобразований α_k. Для спектрального радиуса такого оператора также имеет место вариационный принцип, использующий преобразование Лежандра некоторого функционала, определенного на пространстве векторных мер на X.[3]

Задачи, сформулированные и решенные в данной диссертационной работе, возникли при исследовании вариационных принципов для спектрального радиуса, но они имеют общий характер и могут иметь другие приложения. В случае вариационных принципов для спектрального радиуса основная задача формулируется следующим образом.

Формулы, задающие преобразование Лежандра, имеют смысл и в случае, когда потенциалы не являются непрерывными функциями и, тем самым, определяют *расширенное преобразование Лежандра* – функционал, определенный на более широком классе функций, чем обычное преобразование Лежандра. Спектральный радиус также определен для более широких классов функций a, чем функции, для которых потенциал $\varphi(x) = \ln|a(x)|$ непрерывен. Однако для произвольных a спектральный радиус не определяется через расширенное преобразование Лежандра и вариационный принцип для спектрального радиуса не выполнен. Задача заключается в описании функций a, при которых справедлив вариационный принцип для спектрального радиуса в той же формулировке, что и в случае непрерывных потенциалов.

В общей постановке задача сводится к изучению свойств расширеного преобразования Лежандра, выявлении их отличий от классического случая и описании функционалов, для которых справедливы вариационные принципы, построенные с использованием этого преобразования.

Среди отличий от классического случая отметим, что расширенное преобразование Лежандра может быть разрывным функционалом. Вопрос о разрывности существенен в приложениях. Например, процесс превращения частиц может быть моделирован с помощью функционального оператора, коэффициенты которого определяются свойствами внешней среды. В этой модели спектральный радиус описывает скорость развития процесса, а раз-

[3] Antonevich, A.B. A road to the spectral radius of transfer operators / A.B. Antonevich, V.I. Bakhtin, A.V. Lebedev // Contemporary mathematics : Dynamical systems and group actions. – 2012. – Vol. 567. – P. 17–51.

рывность спектрального радиуса здесь означает, что небольшое изменение внешних условий может повлечь резкое качественное изменение процесса, что соответствует, например, экологической катастрофе.

Из всего вышесказанного следует, что рассматриваемые в диссертации задачи являются актуальными, представляют как самостоятельный интерес, так и могут быть использованы для исследования вариационных принципов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертационная работа выполнена в рамках НИР по теме "Методы некоммутативного гармонического анализа в теории динамических систем с приложениями к задачам математической физики и экологии", входящей в государственную программу "Конвергенция".

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является изучение свойств расширенного преобразования Лежандра и получение на его основе расширенных вариационных принципов, в первую очередь – для спектрального радиуса функциональных операторов. Для достижения поставленной цели решались следующие *задачи*:

1. Для линейного непрерывного функционала, заданного на векторном подпространстве нормированного пространства, исследовать вопрос о единственности продолжения, сохраняющего норму, на более широкие подпространства.

2. Описать продолжения среднего геометрического, заданного на группе положительных непрерывных функций, на полугруппу неотрицательных непрерывных функций.

3. Исследовать, как изменяются свойства мультипликативного преобразования Лежандра при его расширении на полугруппу неотрицательных непрерывных функций.

Объектом исследования являются: расширения преобразования Лежандра с пространства непрерывных функций на более широкие пространства; классы функциональных операторов с разрывными коэффициентами и коэффициентами, обращающимися в нуль. *Предметом исследования* являются: свойства расширений преобразования Лежандра, спектральные свойства операторов, вариационные принципы.

Выбор объекта исследования обусловлен как его глубоким математическим содержанием, так и разнообразными приложениями.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем.

1. На основе теоремы о единственности продолжения положительного линейного функционала получено описание класса разрывных положительных коэффициентов, при которых вариационные принципы для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига имеют тот же вид, что и для непрерывных коэффициентов. Показано, что для более широких классов разрывных коэффициентов вариационные принципы имеют более сложный вид.

2. Получены условия на меру, при которых среднее геометрическое по заданной мере непрерывно на полугруппе неотрицательных функций. Для произвольной меры найдены точки разрыва среднего геометрического.

3. Показано, что у мультипликативного преобразования Лежандра существует единственное полунепрерывное сверху монотонное продолжение на полугруппу неотрицательных непрерывных функций, которое совпадает с расширенным преобразованием Лежандра. Тем самым показано, что расширенные вариационные принципы справедливы для полунепрерывных сверху и монотонных функционалов, в частности, для спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига. В ходе доказательства как технический результат получено обобщение теоремы Дини.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание класса разрывных положительных коэффициентов, при которых вариационные принципы для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига имеют тот же вид, что и для непрерывных коэффициентов, полученное на основе теоремы о единственности продолжения линейного функционала.

2. Получение необходимых и достаточных условий разрывности среднего геометрического по заданной мере, как функционала на полугруппе неотрицательных функций; описание точек разрыва такого функционала.

3. Доказательство, на основе обобщенной теоремы Дини, того, что расширенное преобразование Лежандра является единственным продолжением классического преобразования Лежандра, которое полунепрерывно сверху и монотонно.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Роль научного руководителя А.Б. Антоневича состояла в постановке рассмотренных в диссертации задач и анализе полученных результатов.

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертационнной работы докладывались на ряде международных конференций:

- Международная научная конференция "XI Белорусская математическая конференция"(Минск, 2012 г.);
- "XIV Республиканская научно-методическая конференция молодых ученых"(Брест, 2012 г.);
- XV международная научная конференция по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения - 2013"(Гродно, 2013 г.);
- Крымская международная математическая конференция "КММК-2013"(Судак, 2013 г.);
- Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — III"(Ростов-на-Дону, 2013);
- "Шестнадцатая международная научная конференция имени академика Михаила Кравчука"(Киев, 2015 г.);
- Республиканская научно-практическая конференция, посвященная 85-летию лауреата Нобелевской премии Ж.И. Алферова (Брест, 2015)
- Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VII"(Ростов-на-Дону, 2017).

Результаты работы неоднократно докладывались на научных семинарах кафедры функционального анализа БГУ (Минск, 2012-2017 гг.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 научных работах, из них 4 статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь (общим объёмом 1,5 авторского листа), 2 статьи в сборниках материалов научных конференций и 6 тезисов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, 4 глав, заключения и библиографического списка. Первая глава содержит обзор литературы и основных методов исследования по теме диссертации. Основные результаты диссертации приводятся во второй, третьей и четвертой главах. Полный объём диссертации составляет 134 страницы, в том числе 2 рисунка занимают 1 страницу. Библиографический список содержит 61 наименование, включая собственные публикации автора по теме диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В **первой главе** приводятся необходимые определения и обозначения, обосновывается целесообразность исследования расширенного преобразования Лежандра и формулируются задачи, которые естественно возникают при получении на его основе новых вариационных принципов, приведен краткий обзор литературы по теме.

Пусть Φ — вещественное банахово пространство, Φ^* – его сопряженное. Рассматриваются функционалы f, определенные на Φ, принимающие значения в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Множество

$$\mathcal{D}(f) = \{\varphi \in \Phi : f(\varphi) < +\infty\}$$

называется *эффективной областью* функционала f. Случай $f(\varphi) \equiv +\infty$ тривиальный, поэтому ниже предполагается, что $\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$.

Двойственным по Лежандру к функционалу f называется функционал $f^* : \Phi^* \to \overline{\mathbf{R}}$, заданный выражением

$$f^*(\nu) := \sup_{\varphi\in\Phi} \{< \varphi, \nu > - f(\varphi)\} = \sup_{\varphi\in\mathcal{D}(f)} \{< \varphi, \nu > - f(\varphi)\}\,.$$

Отображение $f \mapsto f^*$ называется *преобразованием Лежандра.* В литературе используются также названия *преобразование Фенхеля -Лежандра* и *преобразование Юнга.*

Для функционала g, заданного на сопряженном пространстве Φ^*, преобразование Лежандра определяется как функционал на исходном пространстве Φ, заданный аналогичной формулой:

$$g^*(\varphi) = \sup_{\nu \in \Phi^*} \{< \varphi, \nu > -g(\nu)\} .$$

Основной результат теории преобразования Лежандра сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1.4. (Фенхель-Моро) *Для функционала f на пространстве Φ справедливы следующие утверждения:*

(1) Сопряженный функционал f^* - выпуклый и полунепрерывный снизу на Φ^*;

(2) Второй сопряженный функционал f^{**} - это наибольший выпуклый полунепрерывный снизу функционал, всюду не превосходящий f;

(3) $f^{**} = f$ тогда и только тогда, когда функционал f выпуклый и полунепрерывный снизу.

Представление функционала f на Φ в виде $f = g^*$ называют *вариационным принципом* для f.

В диссертации рассматриваются функционалы на пространстве непрерывных функций $\Phi = C(X)$, где X есть компактное отделимое пространство. Согласно теореме Рисса- Маркова-Какутани, каждый линейный ограниченный функционал на $C(X)$ представляется в виде интеграла, поэтому преобразование Лежандра выпуклого и полунепрерывного снизу функционала g на сопряженном пространстве $C(X)^*$ записывается в виде

$$g^*(\varphi) \equiv \sup_{\nu \in C(X)^*} \left\{ \int_X \varphi(x) d\nu - g(\nu) \right\} .$$

В приложениях рассматриваемые функционалы f обычно задаются не с помощью φ, которые называют *потенциалами*, а с использованием функций $a(x) = e^{\varphi(x)}$. Тогда вариационные принципы могут быть записаны в виде

$$f(\ln a) = \sup_{\nu \in C(X)^*} \left\{ \int_X \ln a(x) d\nu - g(\nu) \right\} , \tag{1}$$

Функции a, представимые в виде экспоненты, образуют открытый конус K в $C(X)$, состоящий из непрерывных и строго положительных функций. Заметим, что этот конус является группой по умножению.

Преобразование Лежандра может быть записано в мультипликативном виде, использующем вместо линейных функционалов мультипликативные. Такое преобразование ставит в соответствие функционалу на пространстве $C(X)^*$ функционал на K. Оно возникает, если перейти к функционалам

$$F(a) = \exp\ [f(\ln a)]\,, \quad G(\nu) = \exp\ [g(\nu)]\,. \tag{2}$$

Напомним, что *средним геометрическим* по нормированной мере ν называется функционал на K, заданный выражением:

$$S_\nu(a) = \exp \int_X \ln\ a(x) d\nu. \tag{3}$$

Тогда вариационный принцип (1) для $a \in K$ записывается в виде

$$F(a) = \max_{\nu \in D(g)} \left\{ \frac{S_\nu(a)}{G(\nu)} \right\}, \tag{4}$$

где правая часть есть мультипликативное преобразование Лежандра.

Для функций из $\overline{K}$ интеграл в (3) может расходиться. Полагая в этом случае $S_\nu(a) = 0$, получаем мультипликативный функционал, определенный на $\overline{K}$ той же формулой (3).

Таким образом, правая часть в (1) (и в (4)) определена для разрывных функций a и для функций, обращающихся в нуль, тем самым задает *расширенное преобразования Лежандра* – функционал, определенный на более широком классе функций. При этом исследуемые функционалы f и F (например, спектральный радиус оператора взвешенного сдвига) обычно определены для разрывных функции a и для функций, принимающих нулевые значения на некоторых подмножествах.

Основная задача, рассматриваемая в диссертации, заключается в том, чтобы найти условия, при которых из выполнения вариационного принципа $f = g^*$ для $a \in K$ следует, что вариационный принцип в той же форме выполнен для более широкого класса функций.

Здесь возникают две качественно различные задачи, имеющие свои особенности.

1. *Продолжение на пространства ограниченных разрывных функций.* Разрывная функция не является пределом (в смысле равномерной сходимости) последовательности непрерывных функций, т.е. здесь идет речь о продолжении функционала с замкнутого подпространства. Обычно существует много таких продолжений и задача заключается в описании тех из них, которые естественны в контексте приложений к конкретным задачам.

В частности, возникает вопрос: для каких a справедлив вариационный принцип в форме (1)?

2. *Продолжения функционалов на полугруппу $\overline{K}$.* Каждая неотрицательная функция является пределом (в смысле равномерной сходимости) последовательности строго положительных функций. Поэтому здесь идет речь о продолжении функционалов с множества K на его замыкание $\overline{K}$. Если f и g^* непрерывны, то их совпадение на замыкании очевидно. Здесь содержательность задачи определяется тем, что расширение g^* на $\overline{K}$ может оказаться разрывным функционалом.

Основными примерами в работе являются вариационные принципы для спектрального радиуса функциональных операторов.

Пусть $F(X)$ — векторное пространство, состоящее из функций, определенных на множестве X, $\alpha_k \ : \ X \to X$ — заданные отображения, a_k — заданные на X функции.

Линейный оператор B, действующий в пространстве $F(X)$, называется *функциональным оператором*, если он представляется в виде

$$Bu(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\ u(\alpha_k(x)), \ \ u \in F(X).$$

Функциональный оператор, имеющий только одно слагаемое, т.е. оператор вида

$$Bu(x) = a(x)\ u(\alpha(x)), \ \ u \in F(X), \tag{5}$$

называют *оператором взвешенного сдвига, композиционным оператором с весом* или *оператором внутренней суперпозиции.*

Всюду далее предполагается, что X есть компактное топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости Хаусдорфа.

Пусть μ - борелевская мера на X, A - произвольное подмножество в X. *Внутренняя мера* $\mu_*(A)$ определяется как супремум мер всех замкнутых множеств, содержащихся в A. Мера μ называется *регулярной*, если для любого открытого множества A выполнено $\mu_*(A) = \mu(A)$.

Мера μ называется *инвариантной относительно отображения* $\alpha : X \to X$, если α измеримо и $\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = \mu(\omega)$ для любого измеримого множества ω. Отображение α в этом случае называют *сохраняющим меру.*

Мера называется *нормированной* или *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$.

Точка $x \in X$ называется *существенной точкой* меры μ, если любая окрестность точки μ имеет ненулевую меру. *Носителем меры* μ называется множество $\operatorname{supp} \mu$ всех существенных точек этой меры.

Обозначим через $PM_\alpha(X)$ множество регулярных вероятностных мер на пространстве X, инвариантных относительно отображения α.

Теорема 1.8.[4] *Если X есть компактное отделимое пространство, то для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига $B = aT_\alpha$ в пространстве $C(X)$ имеет место равенство*:

$$\ln R(aT_\alpha) = \max_{\nu \in PM_\alpha(X)} \int_X \ln |a(x)| d\nu. \tag{6}$$

Если рассматривать строго положительные функции a, то множество потенциалов

$$\{\ln |a(x)| : a \in C(X), a(x) > 0\} = C(X).$$

Тогда спектральный показатель $f(\varphi) = \ln R(e^\varphi T_\alpha)$ можно рассматривать как функционал на $C(X)$, и равенство (6) означает, что он является (обратным) преобразованием Лежандра функционала

$$g_\alpha(\nu) = \begin{cases} 0, & \nu \in PM_\alpha(X), \\ +\infty, & \nu \notin PM_\alpha(X), \end{cases} \tag{7}$$

эффективной областью которого является множество $PM_\alpha(X)$.

В мультипликативной записи равенство (6) имеет вид

$$R(aT_\alpha) = \max_{\nu \in PM_\alpha(X)} S_\nu(a).$$

Аналогичный вид имеет вариационный принцип для спектрального радиуса оператора в пространствах $L_p(X, \mu)$ для обратимых отображений α. В случае необратимого отображения спектральный показатель представим в виде обратного преобразования Лежандра функционала, который называется $t-$энтропией и отличен от (7)[5].

Во **второй главе** рассмотрены вопросы, возникающие при расширении преобразования Лежандра на классы разрывных функций. Эти вопросы содержательны для линейных функционалов. Согласно теореме Хана-Банаха, для любого ограниченного линейного функционала, заданного на подпространстве нормированного пространства, существует продолжение на все пространство, имеющее ту же самую норму. Такое продолжение в общем

[4] Антоневич, А.Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск : Университетское, 1988. – 233 с.

[5] Antonevich, A.B. A road to the spectral radius of transfer operators / A.B. Antonevich, V.I. Bakhtin, A.V. Lebedev // Contemporary mathematics : Dynamical systems and group actions. – 2012. – Vol. 567. – P. 17–51.

случае не единственно, но в ряде задач представляет интерес вопрос о единственности продолжения.

В разделе 2.1.1 получен общий результат – показано, что для линейного непрерывного функционала, заданного на подпространстве L нормированного пространства, существует наибольшее векторное подпространство, на которое этот функционал единственным образом продолжается с сохранением нормы. На примере функционалов в пространстве $\mathbf{R}^n$ с разными нормами показано, как множество линейных непрерывных продолжений, сохраняющих норму, зависит от геометрии пространства — формы единичного шара в этом пространстве, от исходного подпространства L и от рассматриваемого функционала.

В вариационные принципы входят положительные линейные ограниченные функционалы вида

$$\lambda(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\nu, \quad \varphi \in C(X). \tag{8}$$

В подразделе 2.1.2 рассматриваются продолжения таких функционалов с пространства $C(X)$ на подпространства, содержащие разрывные функции.

Рассматриваемые функции в примерах служат коэффициентами операторов, действующих в пространствах $L_p(X, \mu)$, где μ — борелевская мера и $\operatorname{supp} \mu = X$. Поскольку функции, совпадающие почти всюду по мере μ, задают один и тот же оператор, спектральный радиус определен на пространстве $\mathbf{L}_\infty(X, \mu)$ состоящем из классов эквивалентных функций. Поэтому в первую очередь представляют интерес продолжения функционала с $C(X)$ на подпространства из $\mathbf{L}_\infty(X, \mu)$.

Назовем измеримую функцию φ *монотонно аппроксимируемой относительно меры* ν, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $f, g \in C(X)$ такие, что μ-почти всюду $g \le \varphi \le f$ и

$$\int_X (f(x) - g(x)) d\nu < \varepsilon.$$

Множество всех таких функций обозначим через $MA_\nu(X, \mu)$.

Назовем функцию $\varphi \in \mathbf{L}_\infty(X, \mu)$ *почти непрерывной относительно меры* ν, если класс φ содержит ν-почти всюду непрерывную функцию. Множество всех таких функций обозначим через $AC_\nu(X, \mu)$.

К числу основных результатов дисертации относится следующая теорема.

Теорема 2.2. [1] *Пусть* ν *- положительная регулярная мера на* X, μ *- положительная борелевская мера на* X, $\operatorname{supp} \mu = X$, *и пусть* $\mathfrak{R}_\nu(X, \mu)$ *- наибольшее по включению подпространство среди всех подпространств в*

$\mathbf{L}_\infty(X,\mu)$, на которых линейное продолжение функционала (8), сохраняющее норму, однозначно определяется исходным функционалом λ. Тогда

$$\mathfrak{R}_\nu(X,\mu) = MA_\nu(X,\mu) = AC_\nu(X,\mu)$$

и это множество является замкнутой подалгеброй алгебры $\mathbf{L}_\infty(X,\mu)$.

Приведены примеры, когда подпространство $\mathfrak{R}_\nu(X,\mu)$ минимально – совпадает с $C(X)$ и когда подпространство $\mathfrak{R}_\nu(X,\mu)$ максимально – совпадает с $\mathbf{L}_\infty(X,\mu)$.

Раздел 2.1.3 содержит обсуждение принципиально важных для математического анализа примеров, когда $X=[0,1]$, а ν — мера Лебега или мера Лебега-Стилтьеса. Здесь частным случаем теоремы 2.2 оказывается классическая теорема Лебега, утверждающая, что интеграл Лебега совпадает с интегралом Римана на подпространстве функций, интегрируемых по Риману.

Подраздел 2.2.1 содержит применение полученных результатов для обобщения формулы спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига на случай разрывных коэффициентов.

Следствие 2.4. *Пусть для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига (5) в пространстве $\mathbf{L}_p(X,\mu)$ при $a\in C(X)$ справедлив вариационный принцип* (6). *Если (разрывный) коэффициент a является ν-почти всюду непрерывной функцией для каждой меры $\nu\in PM_\alpha(X)$, то для спектрального радиуса оператора (5) справедлив вариационный принцип в той же форме (6).*

Для произвольных ограниченных разрывных коэффициентов вариационный принцип для спектрального радиуса имеет более сложный вид, чем в случае непрерывных коэффициентов. Рассмотрим семейство функционалов

$$\Upsilon_\alpha = \left\{ f : C(X)\to \mathbf{R} \,\middle|\, f(\varphi) = \int_X \varphi d\nu, \quad \nu\in PM_\alpha(X) \right\}.$$

Следствие 2.3. *Пусть L есть подпространство в $\mathbf{L}_\infty(X,\mu)$, инвариантное относительно отображения α. Если $\varphi=\ln|a|\in L$, то для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига (5) справедлива формула*

$$\ln r(B) = \max_{PR_{\Upsilon_\alpha}(L)} f(\ln|a|),$$

где $PR_{\Upsilon_\alpha}(L)$ – множество всех положительных линейных инвариантных, сохраняющих норму продолжений на L функционалов из Υ_α.

Это утверждение показывает, что в конкретных задачах естественным продолжением линейного функционала может оказаться нелинейный функционал — супремум его линейных продолжений.

В подразделах 2.2.2 и 2.2.3 результаты применяются к модельным примерам операторов взвешенного сдвига.

В **главе 3** исследуется среднее геометрическое как функционал на полугруппе $\overline{K}$. Описаны меры, при которых среднее геометрическое разрывно на $\overline{K}$. Для каждой такой меры описаны точки разрыва среднего геометрического на $\overline{K}$.

На группе K каждый функционал вида (3) является мультипликативным, монотонным и непрерывным. Как показывают примеры, на полугруппе $\overline{K}$ среднее геометрическое может быть разрывным функционалом, но является при этом полунепрерывным сверху.

В разделе 3.1 описан общий вид мультипликативных функционалов. В случае группы K это описание является аналогом теоремы Рисса-Маркова-Какутани о представлении положительных линейных функционалов на пространстве $C(X)$. На полугруппе $\overline{K}$ такой функционал может быть разрывным и утверждение о представлении таких функционалов является новым.

Теорема 3.2. [2] *Пусть функционал* $S : K \to \mathbf{R}$ *обладает свойствами:*
(1) $S_\nu(a_1) \leq S_\nu(a_2)$, *если* $a_1 \leq a_2$ *(монотонность);*
(2) $S_\nu(a_1 a_2) = S_\nu(a_1) S_\nu(a_2)$ *(мультипликативность);*
(3) $S_\nu(\mathbf{e}) = e$, *где* $\mathbf{e}$ *- функция, равная тождественно числу* e*;*
Тогда существует единственная нормированная регулярная борелевская мера ν *на* X *такая, что функционал* S *на* K *представим в виде среднего геометрического (3) по мере* ν.

Показано, что уже даже в самом важном случае, когда ν - мера Лебега на отрезке, у среднего геометрического (3) не существует непрерывного продолжения на $\overline{K}$. В частности, формула (3) на $\overline{K}$ задает разрывный функционал.

Так как у функционала (3) может не существовать непрерывного продолжения на $\overline{K}$, возникает вопрос, какие дополнительные свойства выделяют продолжение, заданное той же формулой, среди всех других разрывных продолжений? Ответы дает следующая теорема.

Теорема 3.4. [2] *Пусть* ν *- некоторая нормированная регулярная борелевская мера на* X *и существует точка* $x_0 \in \operatorname{supp} \nu$ *такая, что* $\nu(\{x_0\}) = 0$. *Тогда для среднего геометрического (3), заданного на* K, *существует несчетное число различных полунепрерывных сверху продолжений на* $\overline{K}$, *существует несчетное число различных монотонных продолжений на* $\overline{K}$, *но при этом существует только одно полунепрерывное сверху монотонное продолжение и это продолжение может быть задано* *той же формулой (3).*

Средние геометрические входят в состав формулы для спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига и разрывность среднего геометрического приводит к разрывной зависимости спектрального радиуса от коэффициента.

В разделе 3.2 исследуется вопрос о непрерывности и точках разрыва среднего геометрического на $\overline{K}$.

Теорема 3.5. [3] *Пусть ν - нормированная борелевская мера на X. Среднее геометрическое (3) разрывно в точке $a \in \overline{K}$ тогда и только тогда, когда интеграл $\int_X \ln a(x) d\nu$ сходится и $a(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \in supp\ \nu$.*

Теорема 3.6 [3] *Пусть X - пространство со счетной базой, ν - нормированная борелевская мера. На $\overline{K}$ задано среднее геометрическое (3). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) Функционал S_ν разрывен в некоторой точке $a \in \overline{K}$;

(2) Существует точка $x_0 \in supp\ \nu$ такая, что для нее найдется окрестность сколь угодно малой меры;

(3) Существует точка $x_0 \in supp\ \nu$ такая, что $\nu(\{x_0\}) = 0$.

В **главе 4** обсуждаются отличия расширенного преобразования Лежандра от классического. Приведены свойства, которые характеризуют расширенное преобразование Лежандра среди всех других продолжений классического.

В приложениях обычно рассматриваются функционалы f на пространстве $C(X)$, для которых двойственный функционал g является выпуклым и полунепрерывным снизу, а его эффективная область $\mathcal{D}(g)$ есть ограниченное множество, лежащее в конусе $K^* \subset C(X)^*$, состоящем из (положительных) мер. В лемме 4.1 показано, что для такого g функционал $f = g^*$ принимает конечные значения для всех φ из $C(X)$, он монотонный, удовлетворяет условию Липшица и выполнено неравенство

$$f(\varphi) \leq C_1 \|\varphi\| - C_0.$$

После перехода в функционалам (2) преобразование Лежандра может быть записано в виде (4) и задает функционал F на K, заданный формулой

$$F(a) = \exp \max_{\mu \in \mathcal{D}(g)} \left\{ \int_X \ln a(x) d\mu - g(\mu) \right\}. \tag{9}$$

Правая часть в вариационном принципе (9) определена на $\overline{K}$ и задает расширенное преобразование Лежандра от g:

$$\widetilde{F}(a) = \max_{\mu \in \mathcal{D}(g)} \exp \left\{ \int_X \ln a(x) d\mu - g(\mu) \right\},\ a \in \overline{K}.$$

В приложениях левая часть в (9) обычно также определена для $a \in \overline{K}$. Тем самым имеется два функционала на $\overline{K}$ и для получения вариационного принципа для функционала F на $\overline{K}$ требуется доказать равенство этих функционалов. Если оба функционала непрерывны, то их совпадение очевидно. Но в общем случае может не существовать непрерывного продолжения на $\overline{K}$, а разрывных продолжений всегда существует много.

Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 4.1. [4] *Пусть F есть функционал на K, для которого справедлив вариационный принцип (9), где эффективная область $\mathcal{D}(g)$ есть непустое ограниченное множество, лежащее в конусе положительных мер K^*. Тогда существует только одно полунепрерывное сверху и монотонное продолжение этого функционала на $\overline{K}$. Это продолжение может быть задано формулой*

$$\widetilde{F}(a) = \lim_{n\to\infty} F(a + 1/n),$$

и это продолжение есть $\widetilde{F}$ – расширенное преобразование Лежандра функционала g.

Доказательство теоремы 4.1 сводится к вопросу о перестановочности операции перехода к пределу и операции вычисления максимума (супремума).

Классическая теорема Дини утверждает, что если монотонная последовательность f_n функций, непрерывных на компактном топологическом пространстве, сходится поточечно к некоторой непрерывной функции f, то она сходится к функции f равномерно и, в частности, выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in X} f_n(x) = \max_{x\in X} f(x). \tag{10}$$

Равенство (10) может выполнятся и в случае, когда нет равномерной сходимости и когда предельная функция f не является непрерывной.

Теорема 4.2 (Обобщенная теорема Дини). [4] *Пусть X - компактное топологическое пространство, f_n – монотонно убывающая последовательность функций на X со значениями в $\{-\infty\} \cup \mathbf{R}$ и $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Если функции f_n полунепрерывны сверху, то f также полунепрерывна сверху и выполнено равенство (10).*

В разделе 4.5, как следствие теоремы 4.1, установлена справедливость вариационного принципа для спектрального радиуса функциональных операторов с неотрицательными коэффициентами в той же формулировке, что и для положительных коэффициентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Для положительного линейного функционала, заданного на пространстве непрерывных функций, получено явное описание наибольшего подпространства в пространстве ограниченных измеримых функций, на которое его продолжение, сохраняющее норму, единственно. В качестве приложения получены новые вариационные принципы для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига [1, 5].

2. Показано, что на полугруппе неотрицательных непрерывных функций, существует только одно полунепрерывное сверху монотонное продолжение среднего геометрического по мере и оно задано той же формулой. Описаны меры, для которых такое продолжение разрывно, и для каждой такой меры найдены точки разрыва [2, 3, 8].

3. Показано, что классическое преобразование Лежандра имеет единственное полунепрерывное сверху монотонное продолжение на полугруппу неотрицательных непрерывных функций и это продолжение совпадает с расширенным преобразованием Лежандра. В ходе доказательства получен технический результат — обобщенная теорема Дини. Даны приложения: к вычислению спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига и функциональных операторов с коэффициентами, обращающимися в нуль [4, 6, 7, 9, 10, 11, 12].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты непосредственно связаны с исследованием вариационных принципов для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига; они также имеют приложения в математическом анализе, теории интеграла. Результаты диссертации могут быть использованы в учебном процессе на спецкурсах по функциональному анализу и смежным дисциплинам.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Леонова, Е.Ю. Множества единственности продолжения положительного линейного ограниченного функционала в пространстве C(X) / Е.Ю. Леонова // Вестн. Белорусского гос. ун-та. Сер. 1 : Физ. Мат. Информ. – 2012. – № 2. – С. 121–127.

2. Леонова, Е.Ю. Мультипликативные полунепрерывные сверху функционалы на полугруппе неотрицательных функций / Е.Ю. Леонова // Вестн. Белорусского гос. ун-та. Сер. 1 : Физ. Мат. Информ. – 2015. – №3 - С. 103–110.

3. Леонова, Е.Ю. Критерии непрерывности среднего геометрического на полугруппе неотрицательных функций / Е.Ю. Леонова // Весн. Гродзенскага дзярж. у-та імя Янкі Купалы. Сер. 2 : Мат. Фіз. Інфарм., выліч. тэхніка і кіраванне. – 2016. – Т. 6, № 1. – С. 55–63.

4. Антоневич, А.Б. Расширенное преобразование Лежандра на C(X) и его приложения / А.Б. Антоневич, Е.Ю. Леонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2016. – Т. 24, № 2. – С. 3–13.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

5. Леонова, Е.Ю. Множества единственности продолжения максимума двух линейных положительных функционалов / Е.Ю. Леонова // XIV Республиканская научно-методическая конференция молодых ученых : сб. материалов, Брест, 11 мая 2012 г. : в 2 ч. / М-во образования Респ. Беларусь, Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина ; под общ. ред. В.В. Здановича. – Брест, 2012. – Ч.1. – С. 63–65.

6. Антоневич, А.Б. Вариационный принцип для расширенного топологического давления динамической системы / А.Б. Антоневич, Е.Ю. Леонова // Шестнадцатая международная научная конференция им. акад. Михаила Кравчука : материалы конф., Киев, 14–15 мая 2015 г. : в 3 т. / НТУУ «КПИ». – Киев, 2015. – Т. 2. : Алгебра. Геометрия. Математический анализ. – С. 48–51.

Тезисы

7. Леонова, Е.Ю. Эффекты разрывности спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига / Е.Ю. Леонова // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 4 – 9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2012. – Ч. 1. : Вещественный и комплексный анализ. Функциональный анализ и операторные

уравнения. Геометрия и топология. – С. 48.

8. Леонова, Е.Ю. О поведении средних геометрических при малом возмущении функции / Е.Ю. Леонова // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2013) : тез. докл. Международной научной конференции, Гродно, 13-16 мая 2013 г. : в 3 ч. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2013. – Ч. 2. : Уравнения в частных производных. Интегро-дифференциальные операторы и уравнения. Дифференциальные уравнения и их приложения. Методика преподавания математических дисциплин в высшей школе. – С. 39–40.

9. Антоневич, А.Б. Расширенное преобразование Лежандра / А.Б. Антоневич, Е.Ю. Леонова // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — III : тез. докл. междунар. науч. конф., Ростов-на-Дону, 2 - 7 июня 2013 г. / Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ. – Ростов-на-Дону, 2013. – С. 12.

10. Леонова, Е.Ю. О единственности продолжения функционалов / Е.Ю. Леонова // Крымская Международная Математическая Конференция (КММК - 2013) : тез. доклад., Судак, Украина, 22 сентября - 4 октября 2013 г. : в 6 т. / КНЦ НАНУ. – Симферополь, 2013. – Т. 1. : Вещественный и комплексный анализ. Общая теория операторов. Спектральная теория операторов. Теория функциональных операторов. – С. 35–36.

11. Антоневич, А.Б. Расширенное топологическое давление / А.Б. Антоневич, Е.Ю. Леонова // Математические и физические методы исследований : научный и методический аспекты : сб. тезисов доклад. республ. науч. -практич. конф., посвященной 85-летию лауреата Нобелевской премии Ж.И. Алферова, Брест, 16-17 апреля 2015 г. / Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2015. — С. 11.

12. Антоневич, А.Б. Вариационный принцип для продолжения функционала / А.Б. Антоневич, Е.Ю. Леонова // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VII : материалы и доклады междунар. науч. конф., Ростов-на-Дону, 23–28 апреля 2017 г. / Издательский центр ДГТУ. – Ростов-на-Дону, 2017. – С. 15.

РЕЗЮМЕ

Леонова Евгения Юрьевна

Исследование вариационных принципов на основе расширений преобразования Лежандра

Ключевые слова: расширение преобразования Лежандра, оператор взвешенного сдвига, вариационные принципы, среднее геметрическое, линейный непрерывный функционал, мультипликативный функционал.

Целью диссертационной работы является изучение свойств расширенного преобразования Лежандра и получение на его основе новых вариационных принципов для спектрального радиуса функциональных операторов. Для достижения поставленной цели использовались комбинации методов теории меры, теории операторов и выпуклого анализа.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. На основе теоремы о единственности продолжения положительного линейного функционала впервые получено описание класса разрывных положительных коэффициентов, при которых вариационные принципы для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига имеют тот же вид, что и для непрерывных коэффициентов. Показано, что для более широких классов коэффициентов вариационные принципы имеют более сложный вид.

2. Получены условия на меру, при которых среднее геометрическое по заданной мере непрерывно. Для произвольной меры найдены точки разрыва среднего геометрического.

3. Впервые показано, что у мультипликативного преобразования Лежандра существует единственное полунепрерывное сверху монотонное продолжение на полугруппу неотрицательных непрерывных функций, которое совпадает с расширенным преобразованием Лежандра. Тем самым показано, что расширенные вариационные принципы справедливы для полунепрерывных сверху и монотонных функционалов, в частности, для спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига. В ходе доказательства как технический результат получено обобщение теоремы Дини.

Принципиально новым является рассмотрение задачи в общей постановке, позволяющей выявить наиболее существенные закономерности. Как приложение получены новые вариационные принципы для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига.

Результаты диссертации могут быть применены в математическом анализе, теории интеграла и использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов.

РЭЗЮМЭ

Лявонава Яўгенія Юр'еўна

Даследаванне варыяцыйных прынцыпаў на аснове пашырэнняў пераўтварэння Лежандра

Ключавыя словы: пашырэнне пераўтварэння Лежандра, аператар ўзважанага зруху, варыяцыйныя прынцыпы, сярэдняе геаметрычнае, лінейны непарыўны функцыянал, мультыплікатыўны функцыянал.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца вывучэнне уласцівасцяў пашыранага пераўтварэння Лежандра і атрыманне на яго аснове новых варыяцыйная прынцыпаў для спектральнага радыуса функцыянальных аператараў. Для дасягнення пастаўленай мэты выкарыстоўваліся камбінацыі метадаў тэорыі меры, тэорыі аператараў і выпуклага аналізу.

У дысертацыйнай працы атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. На аснове тэарэмы аб адзінасці працягу станоўчага лінейнага функцыяналу ўпершыню атрымана апісанне класа разрыўных станоўчых каэфіцыентаў, пры якіх варыяцыйныя прынцыпы для спектральнага радыуса аператара ўзважанага зруху маюць той жа выгляд, што і для непарыўных каэфіцыентаў. Паказана, што для больш шырокіх класаў каэфіцыентаў варыяцыйныя прынцыпы маюць больш складаны выгляд.

2. Атрыманыя умовы на меру, пры якіх сярэдняе геаметрычнае па зададзенай меры непарыўна. Для адвольнай меры знойдзены пункты разрыву сярэдняга геаметрычнага.

3. Упершыню паказана, што мультыплікатыўнае пераўтварэнне Лежандра мае адзіны паўнепарыўны зверху манатонны працяг на паўгрупу неадмоўных непарыўных функцый, які супадае з пашыраным пераўтварэннем Лежандра. Тым самым паказана, што пашыраныя варыяцыйнай прынцыпы справядлівыя для паўнепарыўных зверху манатонных функцыяналаў, у прыватнасці, для спектральнага радыусу аператараў ўзважанага зруху. У ходзе доказу як тэхнічны вынік атрымана абагульненне тэарэмы Дзіні.

Прынцыпова новым з'яўляецца разгляд задачы ў агульнай пастаноўцы, якая дазваляе выявіць найбольш істотныя заканамернасці. Як дадатак атрыманы новыя варыяцыйныя прынцыпы для спектральнага радыуса аператара ўзважанага зруху.

Вынікі дысертацыі могуць быць ужытыя у матэматычным аналізе, тэорыі інтэграла і выкарыстаны у навучальным працэсе пры чытанні спецыяльных курсаў.

SUMMARY

Leonova Eugenia Yurevna

Investigation of variational principles based on Legendre transformations

Keywords: extensions of Legendre transformation, weighted shift operator, variational principles, geometric mean, linear continuous functional, multiplicative functional.

The goal of the thesis is to study the properties of the extended Legendre transformation and to get new variational principles for the spectral radius of functional operators on the basis of those properties. To achieve this goal, the combinations of methods from measure theory, operator theory, and convex analysis are used.

The following new results have been obtained in the thesis:

1. Using the theorem on uniqueness of the extension of a positive linear functional, for the first time the description of the class of discontinuous positive coefficients is obtained, such that the variational principles for the spectral radius of the weighted shift operator with those coefficients have the same form as for continuous coefficients. It is shown that, for broader classes of coefficients, the variational principles have more complex form.

2. Conditions on a measure for which the geometric mean with respect to the given measure is continuous are obtained. For an arbitrary measure, the points of discontinuity of geometric mean are found.

3. For the first time it is shown that for the multiplicative Legendre transformation there exists a unique upper semicontinuous monotone extension onto the semigroup of non-negative continuous functions. Such extension coincides with the extended Legendre transformation. This shows that the extended variational principles are valid for upper semicontinuous and monotone functionals, in particular, for the spectral radius of weighted shift operators. In the course of the proof, as a technical result, a generalization of Dini's theorem is obtained.

The consideration of the problem in a general formulation is fundamentally new, which makes it possible to reveal the most significant regularities. As an application the new variational principles for the spectral radius of the weighted shift operator are obtained.

The results of the thesis can be applied in mathematical analysis, integral theory and can be applied into the educational process when delivering special courses.