
Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С δ -ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. Г. КОТ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Описано поведение собственных значений аппроксимирующих операторов и установлено, каким образом в пределе из них получается одно собственное значение. Ранее построены аппроксимации выражения $L_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f$ операторами конечного ранга; найден явный вид резольвенты аппроксимирующего семейства; определен предел резольвенты и выделены случаи резонанса. Продолжено решение поставленной задачи и изложен этап, связанный с описанием спектра построенных предельных операторов и исследованием поведения собственных значений аппроксимирующих операторов, с использованием метода диаграмм Ньютона. В результате были найдены собственные значения оператора.

Ключевые слова: обобщенная функция; собственные значения; метод Ньютона; асимптотическое поведение.

Образец цитирования:

Кот М. Г. Асимптотика собственных значений операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ -образными коэффициентами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 1. С. 4–10.

For citation:

Kot M. G. Asymptotics of the eigenvalues of approximating differential equations with δ -different coefficients. *J. Belarus. State Univ. Math. Inform.* 2017. No. 1. P. 4–10 (in Russ.).

Автор:

Марина Геннадьевна Кот – аспирантка кафедры функционального анализа механико-математического факультета. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Антонец.

Author:

Marina Kot, postgraduate student at the department of functional analysis, faculty of mechanics and mathematics. mtorkaylo@mail.ru

ASYMPTOTICS OF THE EIGENVALUES OF APPROXIMATING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH δ -DIFFERENT COEFFICIENTS

M. G. KOT^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

The overall objective is to describe the behavior of the eigenvalues of approximating operators and figuring out how to limit one turns one's own importance. Earlier we have done the following: built approximation expression $L_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f$ operators of finite rank; explicit form approximating the resolvent family; resolutions and found the limit cases of resonance highlighted. In this article, we will continue to address this problem and set out a step associated with the description of the spectrum constructed limit operators and study the behavior of the eigenvalues of approximating operators, using Newton's diagram method. As a result of eigenvalues of the operator were found.

Key words: generalized function; eigenvalues; Newton's method; asymptotic behavior.

Введение

Уравнения, которые символически записываются в виде

$$L_0 u = -\Delta u + a(\varepsilon)\delta u = f, \quad (1)$$

где δ – δ -функция Дирака, рассматриваются в разных приложениях [1; 2] и интенсивно изучаются [1–3]. Эта запись уравнения символическая потому, что произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций.

Один из основных подходов к определению понятия «решение уравнения» и построению таких решений основан на аппроксимации выражения в левой части (1) семейством корректно заданных операторов L_ε и нахождении предела резольвент

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_\varepsilon - \lambda)^{-1} := R(\lambda).$$

Если такой предел существует, то операторно-значная функция $R(\lambda)$ называется резольвентой некоторого оператора, соответствующего рассматриваемой аппроксимации формального выражения. В случае операторов в пространстве $L_2(R^3)$ скалярных функций было обнаружено, что в типичных случаях $R(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$, но возможны случаи резонанса, когда $R(\lambda)$ есть резольвента некоторого оператора, отличного от $-\Delta$ [1–4]. Резольвента $R_0(\lambda)$ действует по формуле

$$R_0(\lambda)f = E_\lambda^* f,$$

где $*$ – свертка функций; $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u - \lambda u$, заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\operatorname{Re} \mu > 0$. Отметим, что $E_\lambda \in L_2(R^3)$.

Спектр оператора $-\Delta$ есть положительная полупрямая, причем спектр не содержит собственных значений. А у предельных операторов, отличных от $-\Delta$, имеется одно собственное значение. У аппроксимирующего оператора L_ε спектр может содержать в зависимости от выбранного способа аппроксимации конечный или даже бесконечный набор собственных значений. Поэтому общая задача заключается в описании поведения собственных значений аппроксимирующих операторов и выяснении того, как в пределе из них получается одно собственное значение. В настоящей работе найдена асимптотика собственных значений для аппроксимаций, построенных в работе [4].

Аппроксимирующее семейство для одной системы уравнений

В [4] рассмотрена система уравнений (1)

$$-\Delta u_1 + a_1(\varepsilon)\delta u_2 = f_1,$$

$$-\Delta u_2 + a_2(\varepsilon)\delta u_1 = f_2,$$

где $u = (u_1, u_2)$ – матрица коэффициентов вида

$$a(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & a_1(\varepsilon) \\ a_2(\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот специальный вид соответствует тому, что в рассматриваемой системе вторая компонента воздействует на первую, а первая – на вторую.

Для построения операторов L_ε в [4] использовались аппроксимации оператора умножения на δ -функцию операторами ранга 2, построенные с помощью финитной функции φ из пространства Шварца $D(\mathbb{R}^3)$ такой, что $\int \varphi(x) dx = 1$. Эти аппроксимации действуют по формуле

$$u \rightarrow \int u(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x),$$

где

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Аппроксимирующее семейство L_ε действует на вектор-функцию $u = (u_1, u_2)$ по формуле

$$L_\varepsilon(u)_1 = -\Delta u_1 + a_1(\varepsilon) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x),$$

$$L_\varepsilon(u)_2 = -\Delta u_2 + a_2(\varepsilon) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x).$$

Резольвента оператора L_ε задается формулой

$$(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} = R_0(\lambda) f - S(\varepsilon, \lambda) \cdot \tilde{f} \cdot (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(x),$$

где

$$R_0(\lambda) f = \begin{bmatrix} R_0(\lambda) f_1 \\ R_0(\lambda) f_2 \end{bmatrix}; \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_1 = \int (R_0(\lambda) f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy, \quad \tilde{f}_2 = \int (R_0(\lambda) f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy;$$

$S(\varepsilon, \lambda)$ – матрица вида

$$S(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{1 - a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon) b^2(\varepsilon, \lambda)} \begin{bmatrix} a_1(\varepsilon) & -a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon) b(\varepsilon, \lambda) \\ -a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon) b(\varepsilon, \lambda) & a_2(\varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$b(\varepsilon, \lambda) = \int (R_0(\lambda) \varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

Резольвента определена, если $\lambda \notin \mathbb{R}^+$ и $1 - a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon) b^2(\varepsilon, \lambda) \neq 0$.

Функция $b(\varepsilon, \lambda)$ является аналитической при $\varepsilon \neq 0$ и для нее имеет место разложение [3]

$$b(\varepsilon, \lambda) = \frac{M_{-1}}{\varepsilon} - \frac{\mu}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \mu^{k+1} \varepsilon^k,$$

где $M_k = \frac{1}{4\pi} \int \left(\int \varphi(y) \bar{\varphi}(x-y) dy \right) \|x\|^k dx$.

Далее, считаем, что

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1, \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2, \quad (2)$$

так как в этой тематике содержательные результаты получаются именно для таких коэффициентов.

Если предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon, \lambda) := D(\lambda) \quad (3)$$

есть нуль, то предел резольвент есть резольвента невозмущенного оператора $-\Delta$. В [4] показано, что для коэффициентов $a_1(\varepsilon)$ и $a_2(\varepsilon)$ вида (2) предел (3) может быть ненулевым только в трех случаях, которые называются *случаями резонанса*:

1) если $k_{-2}^1 = 0$, $k_{-1}^1 = 0$ и $k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2 \neq 0$, т. е. если

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_0^1 + k_1^1 \varepsilon + k_2^1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(\varepsilon),$$

тогда $D(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{k_{-2}^2}{k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

В случае когда $k_0^1 k_{-2}^2 = M_{-1}^2$, предел (3) равен бесконечности;

2) если $k_{-2}^1 = 0$, $k_{-2}^2 = 0$ и при этом $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$,

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1 \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2 \varepsilon + o(\varepsilon),$$

тогда $D(\lambda) = \frac{1}{k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M_{-1} \mu}{2\pi}} \begin{bmatrix} k_{-1}^2 & -M_{-1} \\ -M_{-1} & k_{-1}^1 \end{bmatrix}$;

3) если $k_{-2}^2 = 0$, $k_{-1}^2 = 0$ и $k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}^2 \neq 0$,

$$\frac{1}{a_1(\varepsilon)} = k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_2(\varepsilon)} = k_0^2 + k_1^2 \varepsilon + k_2^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon),$$

следовательно, $D(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{-2}^1}{k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}^2} \end{bmatrix}$.

В случае когда $k_0^2 k_{-2}^1 = M_{-1}^2$, предел (3) равен бесконечности.

Из построения резольвенты видно, что при фиксированном ε собственные значения для L_ε определяются из равенства

$$f(\varepsilon, \lambda) := \frac{1}{a_1(\varepsilon) a_2(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon, \lambda) = 0, \quad (4)$$

где $b(\varepsilon, \lambda)$ зависит от способа аппроксимации. Таким образом, данное равенство устанавливает связь между способом аппроксимации и поведением коэффициентов и задает зависимость собственных значений от ε . Здесь левая часть, $f(\varepsilon, \lambda)$, есть аналитическая функция от ε, μ при $\varepsilon \neq 0$. У таких уравнений, как правило, имеется несколько гладких ветвей решений. Задача заключается в описании поведения этих ветвей в зависимости от выбранных коэффициентов и выбранной функции φ .

В настоящей работе исследуется поведение собственных значений аппроксимирующих операторов, показано, что для этого применим метод диаграмм Ньютона, причем разным случаям резонанса соответствуют разные диаграммы.

Метод диаграмм Ньютона

Пусть переменные x и y связаны уравнением

$$f(x, y) = 0,$$

где $f(x, y) = \sum c_{kj} x^k y^j$ – аналитическая функция. Задача заключается в построении неявных функций, заданных этим уравнением, представимых в виде рядов по дробным степеням независимой переменной:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{v_k}. \quad (5)$$

В этой записи предполагается, что показатели степени x – числа v_k – возрастают ($v_{k+1} > v_k$) и коэффициенты α_k ненулевые. Если f является полиномом, сформулированная задача решается с помощью метода диаграмм Ньютона [5–8].

Основной шаг заключается в нахождении главного члена разложения, т. е. чисел v_0 и α_0 . Для краткости обозначим эти коэффициенты через v и α ; будем искать решения вида

$$y(x) = \alpha x^v + o(x^v), \quad \alpha \neq 0. \quad (6)$$

Подставив $y(x)$ вида (6) в уравнение (5) и преобразовав его, получаем выражение вида

$$\sum c_{kj} x^k (\alpha x^v)^j = \sum \sum c_{kj} \alpha^j (x^{k+vj} + o(x^{k+vj})). \quad (7)$$

Далее, рассматриваются только те k, j , при которых показатель $k + vj$ имеет наименьшее значение θ , так как главный член разложения зависит только от этих слагаемых. Легко видеть, что если такая пара k, j только одна, то решения требуемого вида не существует. Таким образом, искомое v может существовать только тогда, когда таких пар несколько.

В случае многочлена для выбора тех значений v , которые дают решение, Ньютон предложил следующий геометрический прием. На плоскости xu рассматривается множество точек (k, j) , соответствующих ненулевым коэффициентам c_{kj} . Выпуклая оболочка множества таких точек называется многогранником Ньютона для полинома $f(x, y)$. Тогда искомые числа v могут быть только тангенсами угла наклона сторон полученного многогранника, данных чисел может быть только конечное число и при таких v уравнение для нахождения коэффициента α содержит конечное число слагаемых, т. е. α находится как корень некоторого многочлена.

Асимптотика собственных значений

При рассмотрении аналитических функций часть из приведенных выше рассуждений сохраняются. Пусть теперь f есть функция из левой части (4). Аналогично случаю полинома рассмотрим множество M_f , состоящее из точек (k, j) , соответствующих ненулевым коэффициентам c_{kj} . Функция f имеет разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1(\epsilon) a_2(\epsilon)} - b^2(\epsilon, \lambda) &= k_{-2}^1 k_{-2}^2 \frac{1}{\epsilon^4} + (k_{-2}^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2) \frac{1}{\epsilon^3} + \\ &+ (k_{-2}^1 k_0^2 + k_{-1}^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2) \frac{1}{\epsilon^2} + \left(k_{-2}^1 + k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + k_{-1}^1 k_{-2}^2 + \frac{M_{-1} \mu}{2\pi} \right) \frac{1}{\epsilon} + \\ &+ \left(k_{-2}^1 k_2^2 + k_{-1}^1 k_1^2 + k_1^1 k_{-1}^2 + k_0^1 k_0^2 + k_2^1 k_{-2}^2 - \frac{\mu^2}{16\pi^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2} \epsilon^k, \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты C_k выражаются через M_k .

В общем случае диаграмма Ньютона M_f имеет вид, представленный на рис. 1, а. Здесь первое слагаемое в сумме (8) растет быстрее остальных, откуда следует, что при малых ϵ оператор L_ϵ не имеет собственных значений. Геометрически это проявляется в следующем. Граница выпуклой оболочки множества M_f содержит полупрямую $y = x + 3, x \geq -3$, а на этой полупрямой есть только одна точка из множества M_f . Поэтому уравнение для нахождения первого члена асимптотики содержит только одно слагаемое и не имеет решения.

Первому случаю резонанса соответствует диаграмма Ньютона на рис. 1, б. Диаграммы на рис. 1, а, и 1, б, отличаются только отрезком $[-3; -2]$. Но диаграмма на рис. 1, б, содержит часть прямой $\mu = 2 + \epsilon$, лежащую на границе выпуклой оболочки. Поэтому могут быть решения, у которых главный член асимптотики имеет вид $\mu(\epsilon) = \alpha \epsilon^{-1}, \alpha \neq 0$.

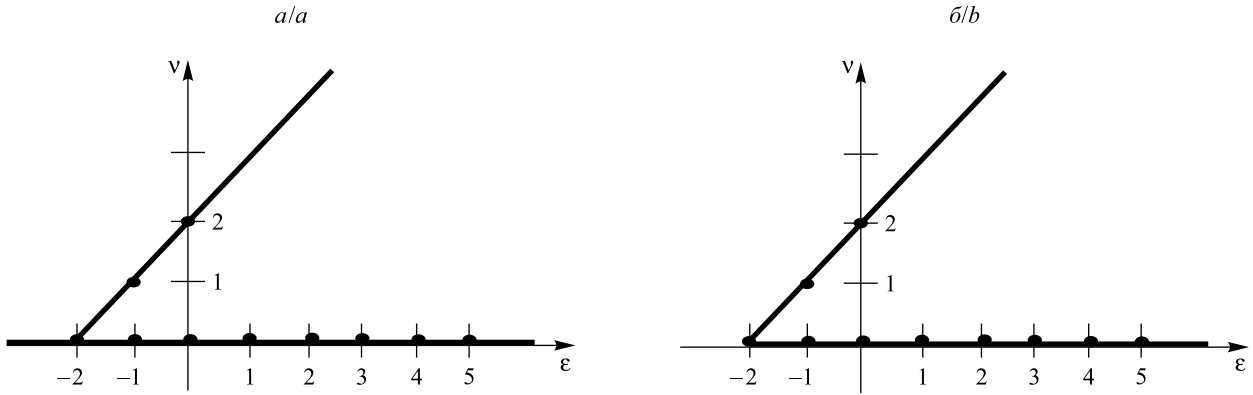


Рис. 1. Диаграмма Ньютона: а – для уравнения (8); б – для уравнения (8) в случае первого резонанса
Fig. 1. Newton's diagram: a – for the equation (8); б – for the equation (8) in the case of the first resonance

Запишем сумму членов разложения функции f из (4), соответствующих прямой $\mu = 2 + \varepsilon$. Получаем, что эта сумма имеет вид

$$\left(k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2\right) \frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{M_{-1} \mu}{2\pi}\right) \frac{1}{\varepsilon} + \left(-\frac{\mu^2}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2} \varepsilon^k = \mu^2 \psi(\varepsilon \mu),$$

где $\psi(\varepsilon) = \left(k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2\right) \frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{M_{-1}}{2\pi}\right) \frac{1}{\varepsilon} + \left(-\frac{1}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varepsilon^k$.

При подстановке $\mu(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^{-1}$, $\alpha \neq 0$, получаем равенство $\mu^2 \psi(\alpha) = 0$. Таким образом, если $\psi(\alpha) = 0$, то $\mu(\varepsilon) = \alpha \varepsilon^{-1} + o(\varepsilon)$, $\alpha \neq 0$, является главным членом асимптотики собственного значения. Функция ψ определяется способом аппроксимации, каждый корень уравнения $\psi(\alpha) = 0$ порождает собственное значение, стремящееся к бесконечности, $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом не существует других решений, имеющих степенную асимптотику. Это согласовано с тем, что предельный оператор в этом случае резонанса не имеет собственных значений.

Наиболее интересным является второй случай резонанса, когда $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$.

Теорема. В случае выполнения условий второго резонанса существует одна ветвь решения уравнения (4), которое имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, а остальные ветви уходят на бесконечность со скоростью $\frac{1}{\varepsilon}$.

Доказательство. Для этого случая диаграмма Ньютона выглядит следующим образом (рис. 2).

Различие в виде диаграмм приводит к разному поведению собственных значений – корней уравнения (4).

На полученной диаграмме Ньютона имеется вертикальный отрезок, которому соответствуют, как и в случае многочленов, ветви решений, имеющие конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Асимптотическое поведение этих ветвей определяется из уравнения, соответствующего этому вертикальному отрезку:

$$\left(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M_{-1} \mu}{2\pi}\right) \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

У этого уравнения имеется решение

$$\mu_0 = -\frac{2\pi(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2)}{M_{-1}}.$$

Заметим, что это число есть единственное собственное значение предельного оператора, соответствующего этому случаю резонанса. Таким образом, у аппроксимирующих операторов существуют собственные значения, стремящиеся к собственному значению предельного оператора.

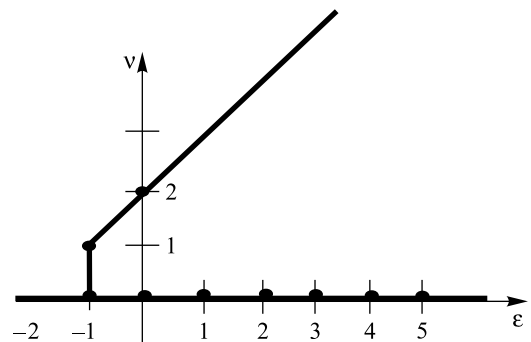


Рис. 2. Диаграмма Ньютона для уравнения (8) в случае второго резонанса
Fig. 2. Diagram of Newton's equation (8) for the second resonance

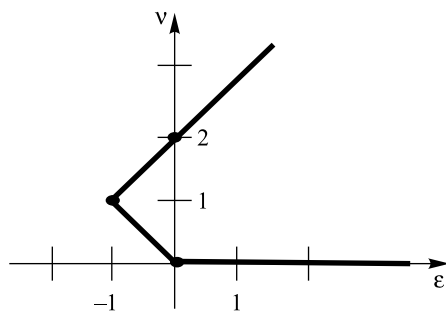


Рис. 3. Диаграмма Ньютона для нахождения $\mu_1(\epsilon)$

Fig. 3. Newton's diagram to find $\mu_1(\epsilon)$

Одной из граней выпуклой оболочки, как и в случае первого резонанса, является бесконечная полупрямая. Уравнение, соответствующее этой грани, имеет вид

$$\left(-\frac{\mu^2}{16\pi^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \mu^{k+2} \epsilon^k = \mu^2 \psi_1(\epsilon \mu).$$

Аналогично получаем, что решения, соответствующие этой грани, есть функции вида $\mu = \frac{\alpha}{\epsilon}$, где α – корень уравнения $\psi_1(\alpha) = 0$. Все такие решения уходят на бесконечность при $\epsilon \rightarrow 0$.

Как и в классическом случае многочлена, может быть найден второй и последующие члены разложения. Для нахождения второго члена разложения будем искать решение в виде $\mu(\epsilon) = \mu_0 + \gamma(\epsilon)$, где главный член $\mu_1(\epsilon)$ разложения $\gamma(\epsilon) = \mu_1 \epsilon + o(\epsilon)$ определяется из диаграммы Ньютона (рис. 3).

Таким образом, в данной работе описано поведение собственных значений аппроксимирующих операторов в различных случаях резонанса.

Библиографические ссылки

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альберверо [и др.]. М., 1991.
2. Антоневиц А. Б., Романчук Т. А. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. Гродн. гос. ун-та им. Я. Купалы / редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. Гродно, 2008. С. 11–28.
3. Антоневиц А. Б., Романчук Т. А. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций. Саарбрюккен, 2012.
4. Кот М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений δ -образными коэффициентами // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 3. С. 111–117.
5. Кащенко И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений. Ярославль, 2011.
6. Васильев В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 3. С. 1–11.
7. Забрейко П. П., Кривко-Красько А. В. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые // Тр. Ин-та матем. 2014. Т. 22, № 2. С. 32–45.
8. Забрейко П. П., Кривко-Красько А. В. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые. II // Тр. Ин-та матем. 2015. Т. 23, № 1. С. 64–75.

References

1. Al'beverio S., Gestezi F., Kheeg-Kron R., et al. Reshaemye modeli v kvantovoi mekhanike. Moscow, 1991 (in Russ.).
2. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. Approssimatsii operatorov s del'ta-obraznymi koeffitsientami [On a construction of the solution of some elliptic equations with generalized coefficients]. *Aktual. probl. mat.* : collect. of sci. proc. of the Yanka Kupala State Univ. of Grodno. Grodno, 2008. P. 11–28 (in Russ.).
3. Antonevich A. B., Romanchuk T. A. Uravneniya s del'ta-obraznymi koeffitsientami: metod konechno-mernykh approssimatsii. Saarbryukken, 2012 (in Russ.).
4. Kot M. G. About resolvent convergence of operator approximating system of equations with δ -shaped coefficients. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. No. 3. P. 111–117 (in Russ.).
5. Kashchenko I. S. Asimptoticheskoe razlozhenie reshenii uravnenii. Yaroslavl', 2011 (in Russ.).
6. Vasil'ev V. A. Asimptotika eksponentsial'nykh integralov, diagramma N'yutona i klassifikatsiya toчек minimum [Asymptotic exponential integrals, Newton's diagram and classification of minimum points]. *Funkts. anal. i ego prilozh.* 1977. Vol. 11, issue 3. P. 1–11 (in Russ.).
7. Zabreiko P. P., Krivko-Kras'ko A. V. Diagrammy N'yutona i algebraicheskie krivye [Newton diagrams and algebraic curves]. *Tr. Inst. mat.* 2014. Vol. 22, No. 2. P. 32–45 (in Russ.).
8. Zabreiko P. P., Krivko-Kras'ko A. V. Diagrammy N'yutona i algebraicheskie krivye. II [Newton diagrams and algebraic curves. II]. *Tr. Inst. mat.* 2015. Vol. 23, No. 1. P. 64–75 (in Russ.).