Заключение

Новый алгоритм позволяет любому логическому элементу логической схемы получать в текущем «миллитакте» значения своих выходных сигналов по значениям входных сигналов, полученных в этом же «миллитакте». Благодаря этому удалось устранить задержки выходных сигналов относительно входных и обеспечить построение правильных временных диаграмм работы исследуемых схем.

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

О. Г. Казанцева

Математическими моделями многих показателей современного финансового рынка являются случайные процессы и, в частности, процессы с независимыми приращениями, порождаемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Основным рыночным показателем, влияющим на рыночные цены финансовых активов, является так называемая безрисковая процентная ставка $r(t)$. Обычно $r(t)$ рассматривается как диффузионный процесс. Здесь же мы его рассматриваем как составляющую двумерного процесса:

$$\begin{cases} dr(t) = k_1(l(t) - r(t))dt + \sigma_1\sqrt{r(t)+x}dw_1, \\ dl(t) = k_2(\theta - l(t))dt + \sigma_2\sqrt{r(t)+x}dw_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $l(t)$ имеет смысл мгновенного среднего процентной ставки, $(-x)$ – уровень отражающей границы, t обозначает календарное время, $dw_1(t)$, $dw_2(t)$ – независимые винеровские процессы с $E[dw_1(t)] = E[dw_2(t)] = 0$, $Var[dw_1(t)] = Var[dw_2(t)] = dt$. Параметры k_1 и k_2 определяют скорость сходимости соответствующего процесса к долгосрочному среднему (скорость установления стационарного режима), θ – установившееся среднее процессов $r(t), l(t)$. Величины $k_1(l(t) - r(t))$ и $k_2(\theta - l(t))$ являются ожидаемыми мгновенными скоростями изменения роста переменных состояния $r(t)$ и $l(t)$, а $\sigma_1^2(r(t)+x)$ и $\sigma_2^2(r(t)+x)$ являются мгновенными дисперсиями изменений этих двух переменных, причем параметры $k_1, k_2, \sigma_1, \sigma_2$ являются положительными из экономических соображений.

В реальном случае процесс $r(t)$ наблюдается, а в качестве оценки процесса $l(t)$ можно рассматривать тренд процесса $r(t)$. Таким образом, мы имеем дело с двумерным однородным во времени марковским процессом, принимающим значения в некотором открытом подмножестве $D \in R^2$.

Процессы $r(t)$, $l(t)$, определяемые системой (1), относятся к классу диффузионных процессов Орнштейна-Уленбека, имеющих стационарный режим с конечным средним θ и конечными дисперсиями [1].

Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство (Ω, F, $(F_t)_{t\geq 0}$, P), где Ω – состояние рынка в рассматриваемом контексте, сигма-алгебра F – совокупность событий, наблюдаемых на рынке, P – риск-нейтральная вероятностная мера на F, расширяющееся семейство сигма-алгебр F_t – совокупность событий, наблюдаемых на рынке до момента t включительно (для $v \leq t \leq T$, имеем, $F_v \subseteq F_t, F \equiv F$).

Плотность вероятностей перехода $p(t,r,l|v,r,l)$ диффузионного процесса $\{r(t), l(t)\}$ существует, и удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова [2] (аргументы функции p, для краткости, будем опускать, а частные производные будем записывать нижним индексом):

$$(r+x)\left[\frac{\sigma_1^2}{2}p_{rr}+\frac{\sigma_2^2}{2}p_{ll}\right]-k_1(l-r)p_r-k_2(\theta-l)p_l+(k_1+k_2)p=p_t. \quad (2)$$

Как известно, прямое и обратное уравнения Колмогорова в общем случае не могут быть разрешены явно для переходной плотности вероятностей за исключением небольшого числа частных случаев [3]. В данной работе мы понижаем порядок уравнения Колмогорова с помощью преобразования Лапласа.

Из свойства стационарности $p(t,\ r,\ l|v,\ r,\ l)=p(t-v,\ r,\ l|0,\ r,\ l)$. Поэтому, в качестве начального состояния будем рассматривать момент 0, и изучать условную плотность вероятности $p(t,\ r,\ l|0,\ r,\ l)$.

Поскольку начальное состояние марковского процесса $\{r(t), l(t)\}$ предполагается заданным, то функция условной плотности вероятности в начальный момент времени обращается в δ– функцию Дирака:

$$p(t,\ r,\ l\,|0,\ r,\ l)\,|_{t=0}=\delta(r(t)-r(0))\delta(l(t)-l(0)). \quad (3)$$

Граничные условия для любого уравнения Колмогорова фактически являются условиями изолированности области $D\in R^2$ изменения рассматриваемого марковского процесса [4]. Граничными условиями для отражающего барьера являются равенства:

$$k_1(l-r)p-\frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial r}((r+x)p)=0,\ \ k_2(\theta-l)p-\frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial l}((r+x)p)=0, \quad (4)$$

когда r или l попадают на границу области D.

Проведем замену переменных. Перейдем от $r(t)$, $l(t)$, θ к $\tilde{r}(t)=r(t)+x$, $\tilde{l}(t)=l(t)+x$, $\tilde{\theta}(t)=\theta+x$. Тогда уравнение (2) запишется в виде (опускаем волну над новыми переменными, но будем помнить о том, что мы сделали замену):

$$\frac{\sigma_1^2 r}{2} p_{rr} + \frac{\sigma_2^2 r}{2} p_{ll} + (k_1(r-l) + \sigma_1^2) p_r + k_2(l-\theta) p_l + (k_1 + k_2) p = p_t, \quad (5)$$

Оно является дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка. С помощью преобразований Лапласа можно понизить порядок этого уравнения.

Применим к уравнению (5) преобразование Лапласа [5] по t с параметром $q > 0$: $Y(q, r, l) = \int\limits_0^{+\infty} p(t, r, l \mid 0, r, l) e^{-qt} dt$.

Учитывая начальное условие (3), имеем,

$$\frac{\sigma_1^2 r}{2} Y_{rr} + \frac{\sigma_2^2 r}{2} Y_{ll} + (k_1(r-l) + \sigma_1^2) Y_r + k_2(l-\theta) Y_l + (k_1 + k_2 - q) Y = 0. \quad (6)$$

Далее используем преобразование Лапласа по переменной r с параметром $g > 0$: $U(q, g, l) = \int\limits_0^{+\infty} Y(q, r, l) e^{-gr} dr$.

Учитывая начальное (3) и граничные условия (4), получим:

$$-\frac{\sigma_2^2}{2} (U_g)_{ll} + k_2(l-\theta) U_l - (k_1 g l + q - k_2) U - (k_1 g + \frac{\sigma_1^2 g^2}{2}) U_g = 0. \quad (7)$$

К этому уравнению также применим преобразование Лапласа по переменной l с параметром $m > 0$: $V(q, g, m) = \int\limits_0^{\infty} U(q, g, l) e^{-ml} dl$.

После чего, учитывая (4), будем иметь квазилинейное уравнение первого порядка с частными производными относительно $V(q, g, m)$:

$$\frac{\partial V}{\partial g} (\sigma_2^2 m^2 + \sigma_1^2 g^2 + 2k_1 g) + 2 \frac{\partial V}{\partial m} (k_2 m - k_1 g) = -2(q + k_2 m \theta) V. \quad (8)$$

Чтобы найти плотность $p(t, r, l \mid v, r, l)$, надо решить уравнение (8), выполнить обратные преобразования Лапласа и вернуться к исходным переменным.

Литература

1. *Медведев Г. А.* Математические модели финансовых рисков. Мн.: БГУ, 1999.
2. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., 1965. С. 478–486.
3. *Wong E.*, The construction of a class of stationary Markov processes// Proc. of Symposia in Applied Mathematics, XVI, 1964. P. 264–276.

4. *Волков И. К.* Случайные процессы М., 2000. С. 299.
5. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974, С. 228.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ ТЕСТ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Д. В. Кишилов

Введение

На практике возникают ситуации, когда целесообразно провести несколько последовательных проверок со сравнительно небольшой средней длиной выборки, чтобы на основании их результатов вынести решение в пользу той или иной гипотезы. В частности, такой подход может потребоваться, когда последовательный тест применяется к выборке, объем которой ограничен снизу некоторым числом N. В этом случае, если проверка заканчивается на наблюдении с номером $n < N$, можно для повышения точности начать новую процедуру проверки с *(n+1)*-го наблюдения. Таким образом процесс может продолжаться до тех пор, пока количество наблюдений не превысит *N*. Рассмотрим такую проверку гипотез на примере биномиальной модели наблюдений.

1. Описание модели и построение теста

Пусть наблюдения $x_1, x_2, \ldots$ независимы и распределены по закону Бернулли с параметром $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, $\theta_0, \theta_1 \in [0,1]$, $\theta_0 < \theta_1$, то есть

$$\begin{aligned} p_j(0) &= P(x_i = 0 \mid \theta = \theta_j) = 1 - \theta_j, \\ p_j(1) &= P(x_i = 1 \mid \theta = \theta_j) = \theta_j,\ j \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Проверяется гипотеза $H_0 : \theta = \theta_0$ против гипотезы $H_1 : \theta = \theta_1$.

Пусть к наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_N$ применялся последовательный тест Вальда с порогами C_-, C_+, для которого известны оценки вероятностей ошибок первого и второго рода α_0, β_0.

Пусть α и β – «желаемые» вероятности ошибок при принятии решения по всей выборке, P_{H_i}, $i = 0,1$, – априорная вероятность того, что будет верна гипотеза H_i, $P_{H_0} + P_{H_1} = 1$. Обозначим

$$P(H_0, n, m) = \frac{(1-\alpha_0)^n \beta_0{}^m}{(1-\alpha_0)^n \beta_0{}^m P_{H_0} + \alpha_0{}^n (1-\beta_0)^m P_{H_1}}, \tag{2}$$