РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИЕ МЕТОДЫ

Д. Ю. Сахоненко

Обратимся к исследованию сходимости итерационных методов решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах. Таким образом, рассмотрим операторное уравнение:

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где $F : D \to Y$, $D \subset X$, X, Y – банаховы пространства.

Центральное место в этой теории занимает метод Ньютона, который Л.В. Канторович обобщил на решение операторных уравнений. В условиях Канторовича предполагается ограниченность нормы второй производной оператора. Мы же будем доказывать сходимость методов при более слабом ограничении, а именно условии Гельдера.

По методу Ньютона мы задаем нулевое приближение $x_0 \in D$, а затем последующие x_n вычисляем по формулам

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} \cdot F(x_n). \tag{2}$$

При практическом использовании метода Ньютона в сложных задачах вычисление производной нелинейного оператора часто бывает затруднено, а иногда и невозможно. Поэтому рассмотрим так называемый квазиньютоновский метод решения нелинейных операторных уравнений, в котором оператор F' заменяется близким линейным оператором A. Для этого случая также доказана теорема о сходимости этого метода, в котором предполагается близость линейного оператора A с оператором F'. Квазиньютоновский метод строится по следующей схеме:

$F'(x) \approx A(x)$ – некоторый линейный оператор, (3)

$$x_{n+1} = x_n - [A(x_n)]^{-1} \cdot F(x_n). \tag{4}$$

При этом в доказательствах используется следующий результат:

$$\|F(x+\Delta x) - F(x) - F'(x)\Delta x\| \le \frac{K}{1+\alpha}\|\Delta x\|^{1+\alpha}, \tag{5}$$

где оператор $F : D \to Y$ дифференцируем по Фреше, F' удовлетворяет условию Гельдера.

Подобные методы не позволяют добиться монотонного убывания нормы $\|F(x_n)\|$. Это особенно портит процесс на первых шагах.

Рассмотрим теперь ньютоновский и квазиньютоновский методы, введя релаксационный множитель β_n. При сходимости $x_n \to x^*$, где x^* –

решение уравнения (1), не всегда имеет место монотонная сходимость $\|F(x_n)\|$ к нулю. Введение релаксационного множителя β_n на каждом шаге ($0 < \beta_n \le 1$) позволяет эту монотонность получить. Таким образом, можно построить итерационный процесс Ньютона с релаксацией:

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n [F'(x_n)]^{-1} \cdot F(x_n). \tag{6}$$

Доказана теорема о его сходимости при выполнении условия Гельдера для производной оператора.

Теорема 1. Пусть оператор F определен в шаре $S = \{x : \|x - x_0\| \le r\}$ и удовлетворяет условиям:

1. $\left\|[F'(x)]^{-1}\right\| \le B$, $\forall x \in S$;
2. $\|F'(x) - F'(y)\| \le K\|x - y\|^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$;
3. $\beta_n = \min\left\{1, \left(\frac{1}{(1+\alpha)h_n}\right)^{1/\alpha}\right\}$, где $h_n = \frac{1}{1+\alpha} B^{1+\alpha} K \|F(x_n)\|^{\alpha}$ и $r \ge \frac{1+\alpha}{\alpha} B \|F(x_0)\|$.

Тогда последовательность (6) корректно определена, то есть $x_n \in S$ для $\forall n \in N$, сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, а $F(x^*) = 0$.

Теперь добавим релаксацию в квазиньютоновский метод. Рассмотрим:

$F'(x) \approx A(x)$ – некоторый линейный оператор, (7)

$x_{n+1} = x_n - \beta_n [A(x_n)]^{-1} \cdot F(x_n)$, $0 < \beta_n \le 1$. (8)

Докажем теорему о сходимости данного метода, опять налагая условие Гельдера на производную оператора F.

Теорема 2. Рассмотрим шар $S = \{x : \|x - x_0\| \le r\}$, в котором выполняются условия:

1. $\left\|[A(x)]^{-1}\right\| \le B$, $\forall x \in S$;
2. $\|F'(x) - F'(y)\| \le K\|x - y\|^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$ (условие Гельдера);
3. $\|F'(x) - A(x)\| \le \varepsilon$, $B\varepsilon < \frac{1}{1+\alpha}$;

4. $\beta_n = \min\left\{1, \left(\frac{1 - B\varepsilon(1+\alpha)}{(1+\alpha)(h_n - B\varepsilon)}\right)^{1/\alpha}\right\}$, где $h_n = \frac{1}{1+\alpha} B^{1+\alpha} K \|F(x_n)\|^{\alpha} + B\varepsilon$ и $r \ge \frac{1+\alpha}{\alpha} B \|F(x_0)\|$.

Тогда последовательность (8) корректно определена, то есть $x_n \in S$ для $\forall n \in N$, сходится и $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, а $F(x^*) = 0$.

Доказательство:

При доказательстве воспользуемся леммой (доказательство тривиально).

Лемма. Пусть $0 < \beta_n \le 1$, $0 < \alpha \le 1$. Тогда последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha\beta_i}{1+\alpha}\right)$ монотонно возрастает и ограничена сверху, то есть является сходящейся.

Оценим $\|x_1 - x_0\| = \left\|\beta_0 \cdot \left[A(x_0)\right]^{-1} \cdot F(x_0)\right\| \le \beta_0 B \|F(x_0)\| \le \frac{\alpha \cdot r}{1+\alpha} < r$, следовательно $x_1 \in S$. Теперь оценим:

$$\|F(x_1)\| = \left\|F(x_1) - \left(F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0)\right) + \left(F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0)\right)\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{1+\alpha} K \beta_0^{1+\alpha} B^{1+\alpha} \|F(x_0)\|^{1+\alpha} + (1 - \beta_0)\|F(x_0)\| + \beta_0 \|F(x_0)\| B\varepsilon \le$$

$$\le \|F(x_0)\| \cdot \left[\beta_0\left(h_0 \beta_0^{\alpha} + B\varepsilon\left(1 - \beta_0^{\alpha}\right)\right) + (1 - \beta_0)\right] \le \left(1 - \frac{\alpha\beta_0}{1+\alpha}\right) \cdot \|F(x_0)\|$$

Получим оценку:

$$\|F(x_1)\| \le \left(1 - \frac{\alpha\beta_0}{1+\alpha}\right) \cdot \|F(x_0)\|.$$

Предположим по индукции, что для индекса n выполняется условие $\|F(x_n)\| \le \left(1 - \frac{\alpha\beta_{n-1}}{1+\alpha}\right) \cdot \|F(x_{n-1})\|$ и $x_n \in S$. Оценим норму:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \beta_n B \|F(x_n)\| \le \ldots \le B\|F(x_0)\|(S_n - S_{n-1}).$$

$$\|x_{n+1} - x_0\| = \|x_{n+1} - x_n + x_n - \ldots - x_1 + x_1 - x_0\| \le \sum_{k=0}^{n} \|x_{k+1} - x_k\| \le B\|F(x_0)\| \cdot$$

$$\cdot \left[S_n - \beta_1\left(1 - \frac{\alpha\beta_0}{1+\alpha}\right) + \beta_0\right] \le B\|F(x_0)\|\left(\frac{1+\alpha}{\alpha} - \beta_0 + \beta_0\right) = \frac{1+\alpha}{\alpha} B \|F(x_0)\| \le r.$$

То есть $x_{n+1} \in S(x_0, r)$.

Оценим норму $\|F(x_{n+1})\|$. Как и при оценке $F(x_1)$, получим:

$$\|F(x_{n+1})\| \le \|F(x_n)\| \cdot \left[\beta_n \left(h_n \beta_n^{\alpha} + B\varepsilon \left(1 - \beta_n{}^{\alpha} \right) \right) + (1 - \beta_n) \right] \le \left(1 - \frac{\alpha\beta_n}{1+\alpha} \right) \cdot \|F(x_n)\|.$$

Таким образом $\|F(x_{n+1})\| \le \left(1 - \dfrac{\alpha\beta_n}{1+\alpha} \right) \cdot \|F(x_n)\|$.

$$\|x_{n+p} - x_n\| \le \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \le B\|F(x_0)\|(S_{n+p-1} - S_{n-1}) \xrightarrow[n\to\infty,\, p\to\infty]{} 0.$$

Из фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ и замкнутости S следует, что существует $x^* \in S$.

$\|F(x_n)\| \le \|F(x_0)\| \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \dfrac{\alpha\beta_k}{1+\alpha} \right)$, т.к. $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \dfrac{\alpha\beta_k}{1+\alpha} \right) \le 1$, то для любого n получим оценку: $\|F(x_n)\| \le \|F(x_0)\| = q$. А так как существует такое $q > 0$ (мажоранта): $\|F(x_k)\| \le q$ для любого k, то $\dfrac{1 - B\varepsilon(1+\alpha)}{(1+\alpha)(h_k - B\varepsilon)} =$

$$= \frac{1 - B\varepsilon(1+\alpha)}{B^{1+\alpha} K \|F(x_k)\|^{\alpha}} \ge \frac{1 - B\varepsilon(1+\alpha)}{B^{1+\alpha} K q^{\alpha}}, \text{ и } \beta_k = 1 \text{ либо } \beta_k \ge \frac{\left(1 - B\varepsilon(1+\alpha)\right)^{1/\alpha}}{Bq(BK)^{1/\alpha}}.$$

Из последней оценки следует: $\left(1 - \dfrac{\alpha\beta_k}{1+\alpha} \right) \le 1 - \dfrac{\alpha}{(1+\alpha)} \dfrac{\left(1 - B\varepsilon(1+\alpha)\right)^{1/\alpha}}{Bq(BK)^{1/\alpha}} < 1$.

Поэтому получим: $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \dfrac{\alpha\beta_k}{1+\alpha} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, следовательно, $\|F(x_n)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\left\| F\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \right) \right\| = 0$, $F\left(x^*\right) = 0$.

Теорема доказана.

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПРЕПРЕГОВ

С. В. Сахоненко

Современные композиционные материалы обладают не только широким спектром свойств, выгодно отличающим их от традиционных ма-