*Таблица 2*

| Число переменных | Степень определенности ЧБФ (в %) | Вероятность «1» функции (в %) | Время получения решения (в сек.) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Точным методом | Приближенным методом | Методом «оценок» |
| 3 | 50 | 50 | <1 | <1 | <1 |
| 4 | 50 | 50 | <1 | <1 | 19 |
| 5 | 70 | 50 | 1 | 1 | 10 |
| 5 | 60 | 65 | 6 | <1 | 25 |
| 6 | 50 | 50 | 7 | 1 | 45 |

**Литература**


1. *Green D. H.* Reed–Muller expansions of incompletely specified functions // IEE Proc.E. Computer & Digital Techniques. 1987. pp. 228–236.
2. *Sasao T.* Easily testable realizations for generalized Reed–Muller expressions // IEEE Trans. On Computers, № 6. June 1997. pp. 709–716.
3. *Sasao T.* Representation of logic functions using EXOR operators // IFIP WG.10.5 Workshop on Applications of the Reed–Muller Expansions in Circuit Design. August 1995. Makuhari. Chiba. Japan. pp. 11–22.
4. *Закревский А. Д., Торопов Н. Р.* Полиномиальная реализация частичных булевых функций и систем. Мн. Ин–т техн. кибернетики НАН РБ. 2001. С. 47–87.


# ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ В *A*-АДИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ


**А. А. Кулага**


В данной работе предлагается подход к представлению так называемых номинальных данных, то есть объектов, не поддающихся упорядочению. Таковыми, например, являются многие социологические данные: «Пол», «Область проживания» и т. д.

Пусть $a=(a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots)$ последовательность целых чисел, больших единицы. Интерпретируем ее как своеобразное переменное основание системы счисления, и тогда любое натуральное число *M* может быть однозначно представлено в виде $M=x_0+x_1a_0+\cdots+x_ma_0\cdots a_{m-1}$, где $x_i\in\{0,1,\ldots a_i-1\}$ – цифры числа *M*, которые могут быть найдены последовательным делением. Запишем теперь *M* в виде последовательности $M=(x_0,x_1,\ldots,x_m,0,\ldots)$. Таким образом, с помощью последовательности *a* построено взаимно однозначное соответствие между множеством неотрицательных целых чисел и множеством финитных последовательностей.

*Определение 1.* Множество $\mathrm{Z}_a=\prod_{n=0}^{\infty}\{0,1,\ldots,a_n-1\}$ называется множеством *a*-адических целых чисел.

В виде $a$-адических целых чисел можно представлять ответы респондентов социологического исследования: $a_i$ задает количество градаций признака, $x_i$ кодируют саму градацию.

Существенно, что элементы $Z_a$, вообще говоря, – не финитные, а бесконечные последовательности.

Пусть $x, y \in Z_a$. Определим функцию $\rho : Z_a \times Z_a \to R$ по правилу $\rho(x, y) = 2^{-\gamma}$, где $\gamma$ – номер первой несовпадающей цифры чисел x и y. Нетрудно показать (см. [1, теорема 10.5]), что эта функция является ультраметрикой, то есть в отличие от обычной метрики для $\rho$ справедливо усиленное неравенство треугольника: $\rho(x, y) \le \max\{\rho(x, z), \rho(y, z)\}$ для любых x,y,z$\in Z_a$.

На множестве $Z_a$ определяются операции сложения и умножения (см. [1]), которые в случае финитности последовательностей соответствуют сумме и произведению целых неотрицательных чисел. Причем $(Z_a, +, \cdot)$ является коммутативным кольцом с единицей (см. [1, теорема 10.6]).

Последовательность a можно продолжить в обратную сторону, то есть взять ее в виде $a = (\ldots, a_{-n}, \ldots a_{-1}, a_0, \ldots a_n, \ldots)$, и рассмотреть такие $x = (\ldots, 0, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots)$, где $x_l = 0$ при l<m (m – некоторое целое число) из декартова произведения $\prod_{n \in Z} \{0, 1, \ldots, a_n - 1\}$. Такое множество будем обозначать $Q_a$ и называть множеством a-адических чисел. Любое число x из $Q_a$ можно записать в виде $x = (x_{-k} \ldots x_{-1}, x_0 \ldots x_k \ldots)$, где цифры в дробной части $(x_{-k} \ldots x_{-1})$ в вещественном смысле означают числа $\dfrac{x_{-i}}{a_{-1} \ldots a_{-i}}$.

На это множество легко переносится операция сложения, относительно которой $Q_a$ является абелевой группой. Со множества a-адических целых чисел переносится и ультраметрика, определяемая по тому же правилу. О метрических и топологических свойствах $Q_a$ см., например, [1], [2]. В частности, $Z_a$ компактно в $Q_a$, а $Q_a$ вполне несвязно. Хотя алгебраическая структура a-адических целых чисел довольно стройна, этого нельзя сказать о более широком множестве $Q_a$. В частности, для произвольной последовательности a нельзя определить произведение дробных элементов.

Пример 1. Пусть последовательность $a = (\ldots 3\,3\,2, 2\,3\,3 \ldots)$. Числу $1/2$ в $Q_a$ соответствует (1, 0 0…)=1 $\cdot$ $1/2$, но произведение $1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \notin Q_a$.

Предположим противное, пусть $\exists y = (y_{-N} \dots y_{-1}, y_0 \ \ y_1 \dots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, тогда $1 = 4 \cdot y$, но при любых ненулевых $y_{-N}, \dots, y_{-2}$ произведение $4 \cdot (y_{-n} \dots y_{-2})$ будет дробным, а при нулевых $4 \cdot (y_{-1}, y_0 \ \ y_1 \dots) = 2y_{-1} + 4 \cdot (y_0 \ \ y_1 \dots) \neq 1$.

Таким образом, мы показали, что операция умножения в $Q_a$ не является замкнутой, а также тот факт, что в общем случае $Q \not\subset Q_a$. Не является достаточным условием корректности умножения и требование $a_{-1} = a_{-2} = \dots = a_{-n} = \cdots$.

*Пример 2.* Пусть $a = (\dots 2\,2\,2, 3\,3\,3 \dots)$, $x = (1, 0 \dots)$, $y = (1 \ 1 \ 1 \dots) \in \mathrm{Z}_a$.

Попытаемся вычислить произведение *xy*. По определению, это должно было быть $z = \lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} y^{(m)} = \frac{1}{2} \lim\limits_{m \to \infty} y^{(m)}$, но $y^{(1)} = 1$, $y^{(2)} = 4$, $y^{(3)} = 13, \dots$. Наблюдая за $z_{-1}$, получим последовательность, не имеющую предела $\{1,0,1,0,\dots\}$, то есть произведение *xy* в $Q_a$ не определено.

Необходимо также сказать о некорректности формального суммирования, столь распространенного в *p*-адическом случае.

*Пример 3.* Пусть опять $a = (\dots 2\,2\,2, 3\,3\,3 \dots)$, $x = (1, 1\ 1 \dots)$. Просуммируем формально, тогда $x = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} 3^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{1-3} = 0$.

В то же время, если $a = (\dots a_n \dots a_0, a_0 \dots a_n \dots)$ – симметричная последовательность, то в $Q_a$ можно определить операцию умножения в случае, когда один из сомножителей целый, а другой дробный.

Перейдем теперь к вопросу приближений функциональных зависимостей между *a*-адическими числами. В последнее время разрабатывается и находит широкое прикладное применение теория так называемых искусственных нейронных сетей или просто нейросетей [3], одним из разделов которой является приближение числовых функций. Основу каждой нейросети составляют относительно простые элементы (ячейки), имитирующие работу нейронов мозга: каждый из них обладает группой входных связей, соединенных с выходами других нейронов, а также имеет выходную связь, с которой сигнал (возбуждения или торможения) поступает на входы следующих нейронов. Искусственный нейрон характеризуется своим текущим состоянием по аналогии с нервными клетками головного мозга, которые могут быть возбуждены или заторможены, а также обладает набором весов и пороговой чувствительностью, то есть способностью возбуждаться. Работает же нейросеть так: умножая каждый свой входной сигнал на соответствующий вес и суммируя эти произведения, нейрон приходит в состояние возбуждения, если сила сигнала превысит пороговую чувствительность, и передает сигнал на свой выход, в противном случае сигнал на выход не поступает. Сегодня искусственные нейронные сети находят свое применение и в социологии (см., например, [4]). Однако традиционная конструкция нейросети разработана только для вещественных чисел. Попытаемся построить ее и для $a$-адических чисел. Но множество $a$-адических чисел лишено естественного порядка, поэтому классический нейрон здесь не имеет смысла: уже нельзя сравнивать преобразованный в соответствии с весом входной сигнал с пороговой чувствительностью, необходимо определенное обобщение. В качестве функции активации, непосредственно производящей это сравнение, можно взять функцию, обозначаемую $\sigma$, но реагирующую уже не на силу входного сигнала, а на его отличие от некоторого базисного. Пусть этим базисным для простоты будет $0=(0,\ldots,0,\ldots)\in Z_a$.

**Теорема 1.** Пусть $a=(\ldots a_n \ldots a_0, a_0 \ldots a_n \ldots)$ – симметричная последовательность, $f: \mathrm{Z}_a \to \mathrm{Z}_a$ – непрерывная функция. Тогда можно построить двухслойную нейросеть $N(x)$, первый слой которой состоит из $n$ нейронов, принимающих входной сигнал, второй слой содержит единственный выходной нейрон. $N(x)$ действует по правилу $N(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i \sigma(\omega_i x-\omega_i^0)$, где $\sigma(x)=\begin{cases}1, x\in B[0,1]=Z_a\\ 0, x\notin B[0,1]\end{cases}$ – функция активации нейрона, $\omega_i, \omega_i^0 \in Q_a$ – веса, $b_i \in Z_a$, причем $\forall\varepsilon>0 \ \ \forall x\in Z_a \ \ \rho(f(x),N(x))\le\varepsilon$.

*Доказательство*. Воспользуемся тем фактом, что в ультраметрическом пространстве $Q_a$ единичный шар компактен (см. [1]), тогда функция $f$ равномерно непрерывна, следовательно, $\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta>0 \ \ \forall x,y\in Z_a$: $\rho(x,y)\le\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(y))\le\varepsilon$. Выберем $\delta_0 = 1/2^k \le \delta$ и тогда $\mathrm{Z}_a = B[0,1]=\coprod_{i=1}^{n} B_i$, где $B_i = B[x_i,\delta_0]$. Положим $N(x)=f(x)$, если $x\in B_i$ и обозначим $\mathrm{X}_i(x)$ $\mathrm{Z}_a$-значную характеристическую функцию шара $B_i$, тогда пусть $N(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathrm{X}_i(x)$.

Имеем: $\forall x\in \mathrm{Z}_a \ \ \exists B_i \ni x: \rho(f(x),N(x))=\rho(f(x_i),f(x))\le\varepsilon$, то есть $N(x)$ равномерно приближает $f(x)$.

Покажем теперь, что $\mathrm{X}_i(x)=\sigma(\omega_i x-\omega_i^0)$. Несложно видеть, что утверждение $x\in B_i$ равносильно $(x-x_i)(a_0 a_1 \cdots a_{k-1})^{-1}\in B[0,1]$. Тогда, выбрав $\omega_i=(a_0 a_1\cdots a_{k-1})^{-1}$, $\omega_i^0=(a_0 a_1\cdots a_{k-1})^{-1}x_i$, $b_i=f(x_i)$, запишем $N(x)$ в искомом виде.

**Литература**

1. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. – М., 1975.
2. *Khrennikov A.* Non-Archimedean Analisis: Quantum Paradoxes, Dinamical Systems and Biological Models. – Kluwer Academic Publishers, 1997.
3. *Бэстенс Д.–Э., Ван ден Берг В.–М., Вуд Д.* Нейронные сети и финансовые рынки. – М., 1997.
4. *Леонов Н. Н.* Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход. – Мн., 2002.


# ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДИКИ УКРУПНЕНИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ ПРИ ОБУЧЕНИИ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ


**Ю. Н. Лыскович**


Добиться того, чтобы учащийся за меньшее, чем прежде, время овладевал большим объемом глубоких и действенных знаний – одна из важнейших задач дидактики. Опыт показывает, что трудности с освоением математических знаний в современной школе и вопросы повышения эффективности обучения математике связаны с проблемой отбора и структурирования учебного материала, а также с разработкой качественных учебников. В этой связи эффективной выступает система укрупнения дидактических единиц (УДЕ), которая разрабатывалась и внедрялась в школьную практику более тридцати лет академиком П. М. Эрдниевым и его последователями.

Главной целевой установкой теории и методики УДЕ является перестройка традиционной дидактической структуры учебного материала, направленная на отбор и структурирование содержания обучения в укрупненные дидактические единицы. Основным средством переструктурирования математического материала и отличительной особенностью теории УДЕ является метод противопоставления [2, с. 130], который реализуется в следующих направлениях:

- совместное и одновременное изучение взаимно обратных действий и операций: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня, логарифмирование и потенцирование и др;
- сравнение противоположных понятий при одновременном их рассмотрении: прямая и обратная теоремы, прямая и противоположная теоремы, прямая и обратная функции, периодические и непериодические функции, возрастающие и убывающие функции;
- сопоставление родственных и аналогичных понятий: уравнение и неравенство, арифметическая и геометрическая прогрессии, определение