ИССЛЕДОВАНИЕ *G*-СТРУКТУР НА ОСНОВЕ ГРУППОИДОВ ЛИ

А. С. Андреев

Понятие главного расслоения имеет большое значение при изучении геометрических структур на дифференцируемых многообразиях. Основные определения и результаты сформулированы в терминах главных расслоений. Другой подход к изучению этой теории основан на идеях Э. Картана и был разработан Ш. Эресманом [1]. Понятие главного расслоения в нем заменено на понятие группоида Ли. Хотя главное расслоение и группоид Ли различаются только формально [2], использование группоидов Ли допускает более эффективные применения теории групп Ли.

Наша цель – изложение базовой теории *G*-структур при помощи метода Эресмана. Первой проблемой является построение геометрических структур на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ *k*-струй локальных диффеоморфизмов многообразия B ($\dim B = n$)

$$\Pi^k(B) = \left\{ j_x^k \varphi \middle| x \in B, \varphi \in Diff_{loc} B \right\}.$$

Среди прочих отметим следующие:

1. канонический морфизм группоидов Ли

$$\pi_{k-1}^k : \Pi^k(B) \to \Pi^{k-1}(B) \colon \ j_x^k \varphi \mapsto j_x^{k-1} \varphi;$$

2. представление алгеброида Ли $A\Pi^k(B)$ как алгеброида Ли $J^k TB$ *k*-струй векторных полей на B;
3. скобка с усечением $A\Pi^k(B) \wedge A\Pi^k(B) \to A\Pi^{k-1}(B)$, являющаяся морфизмом векторных расслоений;
4. представление группоида Ли $\Pi^k(B)$ как группоида Ли изоморфизмов слоев векторного расслоения, сохраняющих скобку с усечением;
5. фундаментальная форма на $\Pi^k(B)$ со значениями в алгеброиде Ли $A\Pi^{k-1}(B)$.

Перечисленные структуры являются обобщениями аналогичных структур на расслоениях реперов высшего порядка.

В локальных координатах *k*-струя $j_x^k \varphi$ определяется набором частных производных

$$\left\{ x, \varphi(x), \partial_j \varphi_x^i, \partial_{j_1 j_2} \varphi_x^i, \ldots, \partial_{j_1 \ldots j_k} \varphi_x^i \right\}.$$

Структура группоида Ли на $\Pi^k(B)$ определяется обычным способом. Отображение усечения

$$\pi_{k-1}^k : \Pi^k(B) \to \Pi^{k-1}(B) : \ j_x^k \varphi \mapsto j_x^{k-1} \varphi$$

является морфизмом группоидов Ли.

Отображения в исток, устье задаются следующим образом: $\alpha : \Pi^k(B) \to B, j_x^k \varphi \mapsto x$ и $\beta : \Pi^k(B) \to B, j_x^k \varphi \mapsto \varphi(x)$. Частичное произведение *k*-струй в $\Pi^k(B)$ определяется как *k*-струя их композиции следующим образом. Если $\left(j_y^k \psi, j_x^k \varphi\right) \in \Pi^k(B) * \Pi^k(B)$, то определена *k*-струя композиции отображений φ и ψ.

Вершинная группа G_x^x группоида Ли $\Pi^k(B)$ изоморфна дифференциальной группе G_n^k. Любой α-слой $\alpha^{-1}(x)$ является главным расслоением $\Pi^k(B)_x\left(B, \beta, G_x^x\right)$. Это расслоение изоморфно главному расслоению реперов порядка *k* на *B*.

Для любой *k*-струи $u \in \Pi^k(B)_x^y$ *правый сдвиг*

$$R_u : \Pi^k(B)_y \to \Pi^k(B)_x : v \mapsto vu$$

есть изоморфизм главных расслоений. Отметим, что правый сдвиг определен только на α-слое.

Левый сдвиг на $\Pi^k(B)$ характеризуется не элементом из $\Pi^k(B)$, а допустимой секущей.

Определение. Левый сдвиг на $\Pi^k(B)$ – это пара диффеоморфизмов

$$\Phi : \Pi^k(B) \to \Pi^k(B), \ f : B \to B,$$

таких что *f* – β-проекция Φ, $\alpha \circ \Phi = \alpha$ и Φ – левое умножение на каждом β-слое.

Алгеброид Ли $A\Pi^k(B)$ определяется α-вертикальными право-инвариантными векторными полями на $\Pi^k(B)$. Среди таких полей выделяют векторные поля $X^{(k)}$, являющиеся продолжениями векторных полей на многообразии *B*. Поток векторного поля $X^{(k)}$ определяется следующим образом

$$\exp_t X^{(k)}\left(j_x^k \varphi\right) = j_x^k\left(\exp_t X \circ \varphi\right). \ (1)$$

Установленное соответствие

$$X^{(k)} \mapsto j^k X : \Gamma A \Pi^k(B) \to \Gamma J^k TB$$

определяет изоморфизм алгеброида Ли $A\Pi^k(B)$ и алгеброида Ли J^kTB k-струй векторных полей на B.

Алгеброид Ли J^kTB наделяется *скобкой с усечением*. Эта скобка перенесена на алгеброид Ли $A\Pi^k(B)$. Скобка с усечением имеет большое значение для следующей теоремы.

Теорема 1. Группоид Ли $\Pi^k(B)$ изоморфен группоиду Ли линейных изоморфизмов слоев $A\Pi^{k-1}(B)$, сохраняющих скобку с усечением.

Следовательно, любой элемент $u = j_x^k\psi \in \Pi^k(B)_x^y$ может быть рассмотрен как линейный изоморфизм

$$u : A\Pi^{k-1}(B)_x \to A\Pi^{k-1}(B)_y :\ X_{\tilde{x}}^{(k-1)} \mapsto (\psi_* X)_{\tilde{y}}^{(k-1)}.$$

Таким образом, имеется представление группоида Ли $\Pi^k(B)$ на векторном расслоении $A\Pi^{k-1}(B)$

$$\Pi^k(B) \underset{(\alpha,\pi)}{*} A\Pi^{k-1}(B) \to A\Pi^{k-1}(B).$$

При изучении псевдогрупп Эли Картан ввел фундаментальную форму, которая на данный момент играет основную роль при исследовании псевдогрупп и G-структур [3]. Кроме того, мы можем деформировать псевдогрупповые структуры изменяя фундаментальную форму. Также мы можем дать обобщения G-структур и изучать их посредством этой формы.

Фундаментальная форма θ на $\Pi^k(B)$ – это α-вертикальная форма со значениями в алгеброиде Ли $A\Pi^{k-1}(B)$. Значение формы θ на векторе $p \in T_u^\alpha \Pi^k(B)$ определяется следующим образом. Пусть $u = j_x^k\psi$ – элемент группоида Ли $\Pi^k(B)$ с истоком в точке x и устьем в точке $y = \psi(x)$. Тогда можно представить вектор $p \in T_u^\alpha \Pi^k(B)$ в виде $p = X_u^{(k)}$, для векторного поля $X^{(k)}$. Из (1) следует, что

$$X_u^{(k)} = X_{\tilde{y}}^{(k)} \cdot u \ \text{ и } \ X_{\tilde{y}}^{(k)} \in A\Pi^k(B).$$

Таким образом, отображение θ_u определено точной последовательностью следующих отображений:

$$\theta_u : p = X_u^{(k)} \xrightarrow{R_{u^{-1}}} X_{\tilde{y}}^{(k)} \xrightarrow{\pi_{k-1}^{k}} X_{\tilde{y}}^{(k-1)} \xrightarrow{u^{-1}} \left(\psi_*^{-1} X\right)_{\tilde{x}}^{(k-1)}.$$

Важным свойством фундаментальной формы θ является ее левоинвариантность

$$\left(\Phi^{*}\theta\right)_{u}(p)=\theta_{\Phi(u)}\left(\Phi_{*}p\right)=\theta_{u}(p),$$

где $\Phi=L\left(j^{k}\varphi\right)$ – левый сдвиг.

Форма θ характеризует продолжения диффеоморфизмов базы B.

Теорема 2. Пусть ψ – локальный диффеоморфизм группоида Ли $\Pi^{k}(B)$, который сохраняет α-слои и фундаментальную форму. Тогда ψ совпадает с локальным левым сдвигом группоида Ли $\Pi^{k}(B)$, определенным локальным диффеоморфизмом $\beta\circ\psi\circ\varepsilon$.

Тогда G-структура порядка k на многообразии B определяется подгруппоидом Ли Ω группоида Ли $\Pi^{k}(B)$. Сужение формы θ является фундаментальной формой G-структуры Ω.

Литература

1. *Белько И.В.* Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии. Мн. Белгосуниверситет. 1977.
2. *Mackenzie K.* Lie groupoids and Lie algebroids in Differential geometry. Cambridge: Univ. Press. 1987.
3. *Guillemin V., Sternberg S.* Deformation theory of pseudogroup structures// Mem. Amer. Math. Soc. 1966. №64. P.1–80.

ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ВАЛЕНТНОСТИ ДВА НА МНОГООБРАЗИЯХ ПАР ПЛОСКОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

О. Л. Андык

Пусть $\boldsymbol{R}_{1}^{4}$ – четырехмерное векторное пространство Минковского, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ – фиксированный базис пространства $\boldsymbol{R}_{1}^{4}$, в котором скалярное произведение приводится к нормальному виду

$$(\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=\varepsilon_3^2=1;\ \varepsilon_4^2=-1;\ \varepsilon_i\varepsilon_j=0,\ 1\le i<j\le 4).$$

Группа всех изометрий пространства $\boldsymbol{R}_{1}^{4}$ может быть отождествлена с псевдоортогональной группой

$$G=O(3,1)=\{A\in GL(4,\mathbf{R})|\ A^{T}E_{1,3}A=E_{1,3},\ E_{1,3}=diag(1,1,1,-1)\}.$$

Пусть M – множество пар $\{V_1, V_2\}$ ненулевых взаимно дополнительных ортогональных подпространств (плоскостей) пространства $\boldsymbol{R}_{1}^{4}$. Группа $O(3,1)$ естественным образом действует на множестве M. Из теоремы Витта [1] следует, что относительно этого действия M разбивается на три орбиты: $M=M_1\cup M_2\cup M_3$, где M_1 – орбита элемента $m_1=\{\langle\varepsilon_1, \varepsilon_2,$