При увеличении p_0 значения интенсивностей некоторых ТП будут переходить с нижней границы на верхнюю. Структура решения в данном случае имеет вид: $S(p_0)=\{J^+(p_0), J^-(p_0)\}$,
где $J^+(p_0)=\{j\in J \mid \Delta_j(p_0)\geq 0\}$, $J^-(p_0)=\{j\in J \mid \Delta_j(p_0)<0\}$.

Рассмотрим функции $\Delta_j(p_0)=p_0q_j-p'a_j$. Поскольку $q_j>0\ \forall j\in J$, то линейные функции $\Delta_j(p_0)$, $p_0\geq 0$ являются возрастающими. Пусть $\overline{p}_0$ – значение цены, при которой для некоторого $j_0\in J$ имеем $\Delta_{j_0}(\overline{p}_0)=0$. Поскольку $Q^0(p_0)=q'u^0(p^0)$, то получим

$$\Delta Q^0(\overline{p}_0)=Q^0(\overline{p}_0+0)-Q^0(\overline{p}_0-0)=q_{j_0}\Delta u^0_{j_0}=q_{j_0}\left(d^*_{j_0}-d_{*j_0}\right)>0.$$

Таким образом, предложение выпуска – неубывающая ступенчатая кусочно-постоянная функция.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что для задач (8)–(10) оптимальный спрос на фактор есть кусочно-постоянная невозрастающая функция цены на данный фактор.

Литература

1. *Альсевич В.В.* Математическая экономика. Мн.: Дизайн ПРО, 1998.
2. *Альсевич В.В., Габасов Р., Глушенков В.С.* Оптимизация линейных экономических моделей. Статические задачи. Мн.: БГУ, 2000.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ СТАТИСТИКИ СПЕКТРОВ СИММЕТРИЧНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УСТОЙЧИВЫХ ПОЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ 2П-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОКОН

С. Л. Чехменок

Рассмотрим дискретное однородное симметричное устойчивое с характеристическим показателем α $0<\alpha<2$ случайное поле $X(t)$, $t\in Z^n, Z=\{0,\pm1,\pm2,...\}$ и спектральную плотность $\varphi(\lambda)$, $\lambda\in\Pi^n=[-\pi,\pi]^n$. Пусть на целочисленной решетке $P^n=[-\tau_1;\tau_1]\times\times[-\tau_2;\tau_2]\times\ldots\times[-\tau_n,\tau_n]$, $T_j=2\tau_j+1$, $\left(\tau_j\in N=\{1,2,..\}, j=\overline{1,n}\right)$ n-мерного параллелепипеда задано $T=T_1\times T_2\times\ldots\times T_n$ наблюдений за данным полем:

$$X(-\tau_1,-\tau_2,...,-\tau_n)\ ;\ \ldots\ ;X(0,0,...,0)\ ;\ \ldots\ ;X(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n). \qquad (1)$$

В качестве оценки функции $[\varphi(\lambda)]_{\alpha}^{\frac{p}{}}$, $\lambda \in \Pi^n$ рассмотрим сглажен ную периодограмму вида $\hat{f}_T(\lambda) = \int\limits_{\Pi^n} W_T(\nu) I_T(\lambda + \nu) d\nu$, построенную по T наблюдениям (1), где $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n)$, $d\upsilon = d\upsilon_1 \times d\upsilon_2 \times ... \times d\upsilon_n$. $I_T(\lambda)$ – периодограмма, определенная аналогично [1]. Выражение

$$I_T(\lambda) = k(p, \alpha)\left|d_T(\lambda)\right|^p,$$

где $d_T(\lambda)$ – сглаженное n-мерным окном просмотра данных $h(t_T)$ модифицированное преобразование Фурье наблюдений (1). Функция $W_T(\upsilon)$ имеет вид

$$W_T(\upsilon) = \sum_{l_1 = -M_{T_1}}^{M_{T_1}} \sum_{l_2 = -M_{T_2}}^{M_{T_2}} ... \sum_{l_n = -M_{T_n}}^{M_{T_n}} k_T(l) \exp(-i < \upsilon, l >),$$

где $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$, $k_T(l)$ – n-мерное корреляционное окно, удовлетворяющее следующим свойствам:

$$k_T(l) = k\left(\frac{l}{M_T}\right) = k\left(\frac{l_1}{M_{T_1}}, \frac{l_2}{M_{T_2}}, ... \frac{l_n}{M_{T_n}}\right),$$

где $M_{T_j} \xrightarrow[T_j \to \infty]{} \infty$ $M_{T_j} \in N$, $\frac{M_{T_j}}{T_j} \xrightarrow[T_j \to \infty]{} 0$, а $k(x)$ удовлетворяет условиям:

$\max\limits_{x \in R^n} k(x) = k(0) = 1$

1. $0 \le k(x) \le 1, x \in R^n$.
2. $\int\limits_{R^n} k^2(x) dx < \infty$.
3. $W_T(\upsilon) \ge 0, \upsilon \in \Pi^n$.
4. $\int\limits_{\Pi^n} W_T(\nu) d\nu = 1$, для любого $T = (T_1, T_2, ..., T_n)$, $T_j = 1, 2..$ $j = \overline{1, n}$.
5. $\lim\limits_{T \to \infty} \int\limits_{\Pi^n \setminus \{\|\nu\| \le \delta\}} W_T(\nu) d\nu = 0 \quad 0 < \delta < \pi$.

Введем в рассмотрение последовательности L_{T_j} $j = \overline{1, n}$, удовлетворяющие следующим условиям: $L_{T_j} \in N$, $L_{T_j} \xrightarrow[T_j \to \infty]{} \infty$, $\frac{L_{T_j}}{T_j} \xrightarrow[T_j \to \infty]{} 0$,

$\frac{M_{T_j}}{L_{T_j}} \xrightarrow[T_j \to \infty]{} 0$. Произведем разбиение j координаты параллелепипеда Π^n на L_{T_j} равных частей. Получим

$$L = \prod_{j=1}^{n} L_{T_j} \tag{2}$$

параллелепипедов. Пронумеруем их числами от 1 до L. Обозначим через Q – множество получившихся параллелепипедов. Пусть

$$\Delta_k \tag{3}$$

элемент множества Q с номером k, $k = \overline{1, L}$.

Теорема. Пусть спектральная плотность $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Pi^n$ ограничена на Π^n, положительна и непрерывна в точке $\lambda_0 \in \Pi^n$, выражение $\left|H_T(\lambda)\right|^\alpha$ является положительным ядром на множестве Π^n,
где $H_T(\lambda)$ – преобразование Фурье окна просмотра данных $h(t_T)$ и $\max\limits_{\substack{s,t=\overline{1,L}\\ s\neq t}} \operatorname{cov}\{I_T(\lambda_0 + \upsilon_s); I_T(\lambda_0 + \upsilon_t)\} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$,

где L_T удовлетворяет (2), $\upsilon_s \in \Delta_s$, $\upsilon_t \in \Delta_t$; Δ_p, $p = \overline{1, L_T}$ определяются соотношением (3), тогда

$$D\widehat{f}_T(\lambda_0) = O\left(\frac{L_T}{M_T}\right) + O\left(\int_{\Pi^n} \left|H_T(\upsilon_s - \upsilon) H_T(\upsilon_r - \upsilon)\right|^{\frac{\alpha}{2}} d\upsilon\right).$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение Q области Π^n. Пусть $\nu_s \in \Delta_s$, $\nu_r \in \Delta_r$. Тогда

$$D\widehat{f}_T(\lambda_0) = D\left(\int_{\Pi^n} W_T(\upsilon) I_T(\lambda_0 + \upsilon)\, d\upsilon\right) \underset{T\to\infty}{\cong}$$

$$\underset{T\to\infty}{\cong} D\left(\sum_{s=1}^{L_T} W_T(\upsilon_s) I_T(\lambda_0 + \upsilon_s) \frac{(2\pi)^n}{L_T}\right) \underset{T\to\infty}{\cong}$$

$$\underset{T\to\infty}{\cong} \left(\frac{(2\pi)^n}{L_T}\right)^2 \sum_{s=1}^{L_T} W^2{}_T(\upsilon_s) V(p,\alpha) \left[\psi_T(\lambda_0 + \upsilon_s)\right]^{\frac{2p}{\alpha}} +$$

$$+\left(\frac{(2\pi)^n}{L_T}\right)^2\sum_{s=1}^{L_T}\sum_{\substack{r=1\\ s\neq r}}^{L_T}W_T(\upsilon_s)W_T(\upsilon_r)\operatorname{cov}\{I_T(\lambda_0+\upsilon_s),I_T(\lambda_0+\upsilon_r)\}\leq$$

$$\leq\frac{(2\pi)^n}{L_T}\int\limits_{\Pi^n}W_T^2(\upsilon)\ \ V(p,\alpha)\left[\psi_T(\lambda_0+\upsilon)\right]^{\frac{2p}{\alpha}}d\upsilon+$$

$$\max_{\substack{s,t=\overline{1,L_T}\\ s\neq r}}\operatorname{cov}\left\{I_T(\lambda_0+\upsilon_s),I_T(\lambda_0+\upsilon_r)\right\}*$$

$$*\left(\frac{(2\pi)^n}{L_T}\right)^2\sum_{s=1}^{L_T}\sum_{\substack{r=1\\ s\neq r}}^{L_T}W_T(\upsilon_s)\ \ W_T(\upsilon_r)\ =S_1+S_2,$$

где $V(p,\alpha)=\dfrac{(k(p,\alpha))^2}{(k(2p,\alpha))^2}-1$. Поскольку $\psi_T(\lambda)$ ограничена на Π^n и $\dfrac{(2\pi)^n}{L_T}\int\limits_{\Pi^n}W_T^2(\upsilon)d\upsilon\underset{T\to\infty}{\cong}\dfrac{M_T}{L_T}\int\limits_{R^n}k_T^2(x)dx$, то $S_1=O\left(\dfrac{M_T}{L_T}\right)$. Рассмотрим S_2.

$$S_2=\left(\frac{(2\pi)^n}{L_T}\right)^2\sum_{s=1}^{L_T}\sum_{\substack{r=1\\ s\neq r}}^{L_T}W_T(\upsilon_s)W_T(\upsilon_r)\leq\left(\frac{(2\pi)^n}{L_T}\right)^2\sum_{s=1}^{L_T}\sum_{r=1}^{L_T}W_T(\upsilon_s)W_T(\upsilon_r)=$$

$$=\left(\left(\frac{(2\pi)^n}{L_T}\right)\sum_{s=1}^{L_T}W_T(\upsilon_s)\right)^2\underset{T\to\infty}{\cong}\left(\int\limits_{\Pi^n}W_T(\upsilon)d\upsilon\right)^2=1.$$ Из [1] следует, что $\operatorname{cov}\{I_T(\lambda_0+\upsilon_s);I_T(\lambda_0+\upsilon_t)\}=O\left(\int\limits_{\Pi^n}\left|H_T(\upsilon_s-\upsilon)H_T(\upsilon_r-\upsilon)\right|^{\frac{\alpha}{2}}d\upsilon\right)$. Собирая все воедино, получаем требуемый результат.

Следствие. Пусть в условии теоремы $H_T(\mu)=\prod_{j=1}^{n}H_{T_j}(\mu_j)$, где $H_{T_j}(\mu_j)$ – одномерные положительные ядра на Π для всех $j=\overline{1,n}$, тогда

$$D\hat{f}_T(\lambda_0)=O\left(\frac{L_T}{M_T}\right)+O\left(\max_{\substack{j=\overline{1,n};s,t=\overline{1,L_T}\\ s\neq t}}\left(\int\limits_{\Pi}\left|H_T(\upsilon_s-\upsilon_j)H_T(\upsilon_r-\upsilon_j)\right|^{\frac{\alpha}{2}}d\upsilon_j\right)\right).$$

Доказательство. В данном случае $\int\limits_{\Pi^n}\left|H_T(\upsilon_s-\upsilon)H_T(\upsilon_r-\upsilon)\right|^{\frac{\alpha}{2}}d\upsilon$ будет представлять собой произведение n одномерных интегралов вида

$$\int\limits_{\Pi}\left|H_T\left(\upsilon_s-\upsilon_j\right)H_T\left(\upsilon_r-\upsilon_j\right)\right|^{\frac{\alpha}{2}}d\upsilon_j\,,$$

каждый из которых равен единице, если $\nu_s=\nu_r$ и стремится к нулю в противном случае. Поэтому

$$\int\limits_{\Pi^n}\left|H_T\left(\upsilon_s-\upsilon\right)H_T\left(\upsilon_r-\upsilon\right)\right|^{\frac{\alpha}{2}}d\upsilon=$$

$$=O\left(\max_{\substack{j=\overline{1,n};\,s,t=\overline{1,L_T}\\ s\neq t}}\left(\int\limits_{\Pi}\left|H_T\left(\upsilon_s-\upsilon_j\right)H_T\left(\upsilon_r-\upsilon_j\right)\right|^{\frac{\alpha}{2}}d\upsilon_j\right)\right).$$

С учетом теоремы получаем требуемый результат.

Литература

1. *Труш Н. Н. , Орлова Е. Н.* Статистические свойства периодограммы устойчивого случайного поля // Вести АН Беларуси 1994Сер. физ.-мат. наук. № 2. С. 33–41.

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ α-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. С. Шмуратко

Пусть $X_1,X_2,\ldots$ – последовательность случайных величин с $EX_j=0,j\geq 1$, $\alpha(n)$ – коэффициент сильного перемешивания.

Обозначим

$$\sigma_n^2=E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2,\quad S_n=\frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n}X_k,\quad F_n(x)=P(S_n<x),$$

$$G_n(x)=\Phi(x)-\frac{ES_n^3}{6}\varphi(x)\left(x^2-1\right),\quad \rho(F_n,G_n)=\sup_{x\in R}\left|F_n(x)-G_n(x)\right|,$$

$$f_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_n(x),\quad g_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG_n(x)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1-\frac{it^3}{6}ES_n^3\right),$$