ИССЛЕДОВАНИЕ МЕР ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙННЫХ ПРОЦЕССОВ

М. Л. Пономарева, Н. Н. Труш

При исследовании экономических и финансовых временных рядов в последние годы используется аппарат устойчивых стационарных случайных процессов. Данная работа посвящена исследованию свойств мер зависимости таких процессов.

Пусть $\{X_n\}$, $n \in Z$, симметричный устойчивый временной ряд с характеристическим показателем $0 < \alpha \le 2$. Для случая $\alpha < 2$ ковариационная функция не определена, поэтому возникает необходимость введения новых мер зависимости для устойчивых временных рядов, которые являлись бы расширением понятия ковариационной функции.

В качестве таких мер могут выступать функции [1]:
для $0 < \alpha \le 2$

$$I_n(\theta_1,\theta_2) = -\ln E\exp\{i(\theta_1 X_n + \theta_2 X_0)\} + \ln E\exp\{i\theta_1 X_n\} + \ln E\exp\{i\theta_2 X_0\},$$

где $n \in Z$, параметры θ_1 и θ_2 – произвольные действительные числа.
для $1 < \alpha \le 2$

$$CV(n) = \left[X_n, X_0\right]_\alpha = \int_{S_2} x \cdot y^{<\alpha-1>} d\Gamma_{X_0 X_n}(x,y),\ n \in Z,$$

где $\Gamma_{X_0X_n}(x,y)$ – это спектральная мера X_0 и X_n; выражение $y^{<\beta>} = |y|^{\beta-1} \cdot \bar{y}$ определено для любого комплексного *y* и положительного *β*.

Пусть смешанный процесс авторегрессии и скользящего среднего порядка *(p,q)* определяется уравнениями

$$X_n - b_1 X_{n-1} - b_2 X_{n-2} - \ldots - b_p X_{n-p} = \varepsilon_n - a_1\varepsilon_{n-1} - a_2\varepsilon_{n-2} - \ldots - a_q\varepsilon_{n-q}$$

$$a_i, b_j \in R,\ i=1,\ldots,q;\ j=1,\ldots,p;\ n \in Z, \tag{1}$$

где $\{\varepsilon_n\}$ – независимые, одинаково распределенные устойчивые случайные величины с характеристической функцией вида

$$\varphi_{\varepsilon_n}(\theta) = E\exp\{i\theta\varepsilon_n\} = \exp\{-|\theta|^\alpha\},\ 0 < \alpha \le 2,\ n \in Z,\ \theta \in R.$$

Предположим, что многочлены

$$B(z) = 1 - b_1 z - \ldots - b_p z^p, \quad A(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_q z^q,\ z \in C,$$

не имеют общих корней, многочлен $B(z)$ не имеет корней в замкнутом круге $\{z:|z|\le 1\}$. Тогда система (1) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n-j}\,,\ n\in Z\,,\ c_j \in R\,.$$

Действительные коэффициенты являются коэффициентами разложения $\dfrac{A(z)}{B(z)}$ в степенной ряд в области $|z|<1$.

Так как $B(z)$ не имеет корней внутри диска $\{z:|z|\le 1\}$, то каждый из его корней принадлежит одному из трех классов:

1. Положительные действительные числа, большие единицы. Предположим, что у многочлена $B(z)$ ровно s корней из этого класса, каждый корень кратности $l_i, i=\overline{1,s}.$ Для таких корней допустимо представление $e^{k_1}, e^{k_2}, ..., e^{k_s}$, $\quad 0<k_1<k_2<...<k_s$.

2. Отрицательные действительные числа, меньшие –1. Предположим, что у многочлена $B(z)$ ровно r корней из этого класса, каждый корень кратности $g_i, i=\overline{1,r}.$ Для таких корней допустимо представление $-e^{m_1}, -e^{m_2}, ..., -e^{m_r}$, $\quad 0<m_1<m_2<...<m_r$;

3. Пары комплексно-сопряженнных чисел, модуль которых больше единицы. Предположим, что у многочлена $B(z)$ ровно t пар корней из этого класса, каждый корень кратности $\sigma_i, i=\overline{1,t}.$ Для таких корней допустимо представление

$$e^{\lambda_1 \pm i\mu_1}, e^{\lambda_2 \pm i\mu_2}, ..., e^{\lambda_t \pm i\mu_t},\ 0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_t,\ \mu_j \in R,\ j=\overline{1,t}.$$

Для кратностей корней должно выполняться равенство:

$$l_1+...+l_s+m_1+...+m_r+2(\sigma_1+...+\sigma_t)=p\,.$$

Обозначим $k_1,...k_s, m_1,...,m_r, \lambda_1,...,\lambda_t$ через $\omega_1,...,\omega_N$, $N=s+r+t$ таким образом, что $0<\omega_1<..<\omega_N$, т. е. расположим показатели корней в порядке возрастания. Может случиться, что среди чисел $k_1,...k_s$, $m_1,...,m_r, \lambda_1,...,\lambda_t$ найдутся равные величины. Это соответствует случаю, когда у $B(z)$ имеются корни, равные по абсолютному значению. В отсортированном ряду эти числа расположатся друг за другом, т. е. иногда знак «<» может заменяться знаком «=». Такая возможность будет рассматриваться при исследовании свойств указанных функций.

Теорема 1. Пусть $0<\alpha<1$.

Если $\omega_1 = k_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $l_1 > g_1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(l_1-1)\alpha} e^{k_1\alpha n} I_n = -\left|\frac{\theta_1 d_{1l_1} e^{-k_1 l_1}}{(l_1-1)!}\right|^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-e^{-k_1\alpha}}.$$

Если $\omega_1 = m_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $g_1 > l_1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(g_1-1)\alpha} e^{m_1\alpha n} I_n = -\left|\frac{\theta_1 b_{1g_1} e^{-m_1 g_1}}{(g_1-1)!}\right|^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-e^{-m_1\alpha}}.$$

Если $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $l_1 = g_1$, тогда $\nu := l_1 = g_1$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(\nu-1)\alpha} e^{\omega_1\alpha n} |I_n| \le \left|\frac{\theta_1 e^{-\omega_1\nu}}{(\nu-1)!}\right|^{\alpha} \left(|d_{1l_1}| + |b_{1g_1}|\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{1-e^{-\omega_1\alpha}}.$$

Если $\omega_1 = \lambda_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = \lambda_1 = \omega_2$ и $\nu_1 > \nu_2$, где ν_1 – кратность первого корня, ν_2 – кратность второго, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(\sigma_1-1)\alpha} e^{\lambda_1\alpha n} |I_n| \le \left|\frac{\theta_1 e_{1\sigma_1} e^{-\lambda_1\sigma_1}}{(\sigma_1-1)!}\right|^{\alpha} \cdot \frac{2}{1-e^{-\lambda_1\alpha}}.$$

Теорема 2. Пусть $1 < \alpha \le 2$.

Если $\omega_1 = k_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $l_1 > g_1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(l_1-1)} e^{k_1 n} I_n = \frac{\alpha\theta_1\theta_2^{<\alpha-1>} d_{1l_1} e^{-k_1 l_1}}{(l_1-1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{<\alpha-1>} e^{-k_1 j}.$$

Если $\omega_1 = m_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $g_1 > l_1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(g_1-1)} e^{m_1 n} I_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha\theta_1\theta_2^{<\alpha-1>} b_{1g_1} e^{-m_1 g_1}}{(g_1-1)!} \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j c_j^{<\alpha-1>} e^{-m_1 j}, \\ \text{для четных } n; \\ -\dfrac{\alpha\theta_1\theta_2^{<\alpha-1>} b_{1g_1} e^{-m_1 g_1}}{(g_1-1)!} \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j c_j^{<\alpha-1>} e^{-m_1 j}, \\ \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Если $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $l_1 = g_1$, тогда $\nu := l_1 = g_1$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(\nu-1)} e^{\omega_1 n} \left| I_n \right| \le \frac{\alpha \left|\theta_1\right| \cdot \left|\theta_2\right|^{\alpha-1} e^{-\omega_1 \nu} \left(\left| d_{1l_1} \right| + \left| b_{1g_1} \right| \right)}{(\nu-1)!} \times \sum_{j=0}^{\infty} \left| c_j \right|^{\alpha-1} e^{-\omega_1 j} .$$

Если $\omega_1 = \lambda_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = \lambda_1 = \omega_2$ и $\nu_1 > \nu_2$, где ν_1 – кратность первого корня, ν_2 – кратность второго, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(\sigma_1-1)} e^{\lambda_1 n} \mid I_n \mid \le \frac{2\alpha \left|\theta_1\right| \left|\theta_2\right|^{\alpha-1} \left| e_{1\sigma_1} \right| e^{-\lambda_1 \sigma_1}}{(\sigma_1 - 1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left| c_j \right|^{\alpha-1} e^{-\lambda_1 j} .$$

Теорема 3. Пусть $1 < \alpha \le 2$.

Если $\omega_1 = k_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $l_1 > g_1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(l_1-1)} e^{k_1 n} CV(n) = \frac{d_{1l_1} e^{-k_1 l_1}}{(l_1 - 1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{<\alpha-1>} e^{-k_1 j} .$$

Если $\omega_1 = m_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $g_1 > l_1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(g_1-1)} e^{m_1 n} CV(n) = \begin{cases} \dfrac{b_{1g_1} e^{-m_1 g_1}}{(g_1 - 1)!} \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j c_j^{<\alpha-1>} e^{-m_1 j}, \\ \qquad \text{для четных } n; \\ -\dfrac{b_{1g_1} e^{-m_1 g_1}}{(g_1 - 1)!} \cdot \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j c_j^{<\alpha-1>} e^{-m_1 j}, \\ \qquad \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Если $\omega_1 = k_1 = m_1 = \omega_2$ и $l_1 = g_1$, тогда $\nu := l_1 = g_1$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(\nu-1)} e^{\omega_1 n} \left| CV(n) \right| \le \frac{e^{-\omega_1 \nu} \left(\left| d_{1l_1} \right| + \left| b_{1g_1} \right| \right)}{(\nu-1)!} \times \sum_{j=0}^{\infty} \left| c_j \right|^{\alpha-1} e^{-\omega_1 j} .$$

Ели $\omega_1 = \lambda_1$ и $\omega_2 > \omega_1$ или $\omega_1 = \lambda_1 = \omega_2$ и $\nu_1 > \nu_2$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(\sigma_1-1)} e^{\lambda_1 n} \mid CV(n) \mid \le \frac{2\alpha \left| e_{1\sigma_1} \right| e^{-\lambda_1 \sigma_1}}{(\sigma_1 - 1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left| c_j \right|^{\alpha-1} e^{-\lambda_1 j} .$$

Литература

1. *Nowick J. and Weron A.* Measures of Dependence for ARMA Models with Stable Innovations, Annals Univ. Marie Curie-Sklodowska. Lublin. Sect.A. Vol.1.1997.