Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________________ А.Л. Толстик
« 31 » ______________ 2015 г.

Регистрационный № УД-714 /уч.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

2015г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02 (30.08.2013) и учебного плана (регистрационный № G-31-136/уч.; 30.05.2013) для специальности 1-31 03 02 Механика и математическое моделирование.

СОСТАВИТЕЛИ:

Радыно Я.В. – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Антоневич А.Б. – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Мазель М.Х. – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета;

Леонов Н.Н. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа
(протокол № 10 от 25.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № 6 от 26.05.2015)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Функциональный анализ изучает множества с согласованными между собой алгебраическими и топологическими структурами, их отображения, а также методы, с помощью которых сведения об этих структурах применяются к конкретным задачам.

Среди областей применения функционального анализа можно указать математическую физику, теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, теорию вероятностей, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других направлений. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление», «Численные методы».

В данном курсе излагаются основы теории меры и интеграла Лебега, метрические и нормированные пространства и операторы в них, основные принципы линейного функционального анализа. В качестве одного из примеров приложений рассматриваются интегральные уравнения.

Основными методами изучения дисциплины «Функциональный анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, компьютерного тестирования, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы обучения студентов практическим навыкам использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на лабораторных занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время лабораторных занятий в форме проверки математических диктантов, лабораторных работ, домашних заданий, а также на контрольных работах, коллоквиумах и зачетах.

Цель дисциплины «Функциональный анализ»: освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Образовательная цель: изложение основ теории меры и интеграла Лебега, изучение функциональных метрических пространств, теории нормированных, в частности, гильбертовых, пространств, теории линейных операторов и операторных уравнений.

Развивающая цель: формирование у студентов основ современного математического мышления, обучение методам математических, изучение конкретных функционально-аналитических конструкций.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ»:

– формирование у студентов понятия меры и интеграла Лебега;

– изучение непрерывных, равномерно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица, в функциональных пространствах;

– применение принципа сжимающих отображений к различным задачам;

– изучение основных свойств нормированных и гильбертовых пространств;

– изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов;

– изучение компактных операторов и теории Рисса-Шаудера в гильбертовых пространствах;

– изучение альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

– основные понятия и результаты теории меры и интеграла Лебега;

– основные понятия и результаты теории нормированных пространств и операторов в них;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа.

уметь:

– выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;

– устанавливать свойства отображений в функциональных пространствах;

– применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

– основными методами вычисления интегралов Лебега;

– методами доказательств и аналитического исследования отображений на непрерывность, равномерную непрерывность, выполнение условия Липшица;

– методами исследования разрешимости и нахождения решения операторных уравнений;

– навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

Учебная программа предназначена для студентов 3 курса (5 семестр) дневной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 132 часа, в том числе аудиторных занятий – 50 часов, из них лекционных – 28 часов, практические занятия – 20 часов, УСР – 2 часа. Рекомендуемая форма отчетности – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Наименование тем и разделов

Тема 1. Метрические пространства. Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Основные примеры функциональных метрических пространств. Полные пространства. Теорема о пополнении.

Тема 2. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения. Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.

Тема 3. Мера и интеграл Лебега. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры. Общее понятие меры. Сигма-аддитивные меры Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой. Измеримые функции, простые функции. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Тема 4. Нормированные пространства и линейные операторы. Векторные, нормированные, банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах. Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза

Тема 5. Гильбертовы пространства. Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.

Тема 6. Линейные уравнения в банаховых пространствах. Обратимые операторы. Теоремы об обратимости. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.

Тема 7. Сопряженные пространства и сопряженные операторы. Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения

Тема 8. Уравнения с компактными операторами. Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Критерий конечномерности нормированного пространства. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1 семестр							
1	**Тема 1. Метрические пространства**	**2**	**2**					
1.1	Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Основные примеры функциональных метрических пространств. Полные пространства. Теорема о пополнении.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
2	**Тема 2. Непрерывные, равно-мерно непрерыв- ные и липши-цевы отображения**	**2**	**2**					
2.1	Теоремы о продолжении. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
3	**Тема 3. Мера и интеграл Лебега**	**6**	**4**					
3.1	Задача о пополнении пространства непрерывных функций с интегральной метрикой. Общее понятие меры. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры	2						Коллоквиум.
3.2	Сигма-аддитивные меры. Сигма-аддитивность длины. Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой. Измеримые функции, простые функции. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
3.3	Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. Пространства $L_p[T,m]$. Их полнота. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям в $L_p[T,m]$.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
4	**Тема 4. Нормированные**	**4**	**2**					

	пространства							
4.1	Векторные, нормированные, банаховы пространства. Ряды в банаховых пространствах	2						
4.1	Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза	2	2					Проверка индивидуальных заданий Контрольная работа
5	**Тема 5. Гильбертовы пространства**	**2**	**2**					
5.1	Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье	2	2					Проверка индивидуальных заданий
6	**Тема 6. Линейные уравнения в банаховых пространствах**	**4**	**2**					
6.1	Обратимые операторы. Теоремы об обратимости.	2						
6.2	Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора	2	2					Проверка индивидуальных заданий
7	**Тема 7. Сопряженные пространства и сопряженные операторы**	**4**	**4**					
7.1	Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.	2	2					Коллоквиум
7.2	Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения	2	2					Проверка индивидуальных заданий
8	**Тема 8. Уравнения с компактными операторами**	**4**	**2**				**2**	
8.1	Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Критерий конечномерности нормированного пространства.	2						
8.2	Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве. Альтернатива Фредгольма для интегральных	2	2				2	Проверка индивидуальных заданий Контрольная работа

	уравнений в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.							
	Всего по курсу	**28**	**20**				**2**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Список литературы

Основная литература:

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006.
2. Антоневич А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2011.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2004.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.

Дополнительная литература:

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ю., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. Киев, Выща школа, 1990.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Теория вероятностей	Кафедра функционального анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 25.05.2015)
Математическая статистика	Кафедра функционального анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 25.05.2015)
Уравнения математической физики	Кафедра математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 25.05.2015)
Экстремальные задачи и вариационное исчисление	Кафедра нелинейного анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 25.05.2015)
Методы оптимизации	Кафедра нелинейного анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 25.05.2015)
Численные методы	Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 25.05.2015)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
на _____/_____ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № ____ от ________ 20 г.)

Заведующий кафедрой

член-корреспондент НАН Беларуси,

доктор физ.-мат наук, профессор ___________________ Я.В. Радыно

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

канд. физ.-мат. наук, доцент ___________________ Д.Г. Медведев