Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе

________________ А.Л. Толстик
«__30__» ________________ 2015 г.

Регистрационный № УД-1659 /уч.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 01 Математика (по направлениям)
(1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность))

2015г.

Учебная программа составлена на основе типовой учебной программы по дисциплине «Математический анализ», утвержденной 20.10.2014, регистрационный № ТД-G.490/тип. и учебного плана, утвержденного 30.05.2013, регистрационный № G31-140/уч. по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) (направление специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)).

СОСТАВИТЕЛИ:
Александр Антонович Пекарский – профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;
Вениамин Григорьевич Кротов – заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;
Наталья Владимировна Бровка – профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:
Кафедрой теории функций
(протокол № _11___ от __06.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета Белорусского государственного университета
(протокол № __6__ от _29.06.2015)

Заведующий кафедрой теории функций
Кротов В.Г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление». При изучении математического анализа студенты знакомятся с основами дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления являются базовыми для освоения указанных выше математических дисциплин.

Элементы теории предела и дифференциального исчисления используются при изучении дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики». Базовые конструкции интегрального исчисления используются при решении интегральных уравнений в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ», при создании вариационных принципов в задачах математической физики (дисциплина «Уравнения математической физики»), при изучении геометрии гладких поверхностей в рамках дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология», при построении необходимых и достаточных условий оптимальности в задачах оптимизации (дисциплина «Экстремальные задачи и вариационное исчисление»).

Основными методами изучения дисциплины «Математический анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, компьютерного тестирования, самостоятельных работ и опросов на практических занятиях.

Методы привития студентам практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических занятий в форме проверки домашних заданий, компьютерного тестирования, а также на контрольных работах и зачетах.

Данная дисциплина тесно является продолжением дисциплины «Математический анализ».

Цель дисциплины «Математический анализ»: создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Математический анализ»:

− формирование у студентов понятия числа;

− изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики;

− изучение основ дифференциального исчисления, использование элементов дифференциального исчисления при решении экстремальных задач и других задач современной математики;

− использование основ интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

– основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;

– новейшие достижения в области математического анализа и их приложения в задачах естествознания;

уметь:

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в математике;

владеть:

– основными методами интегрирования и дифференцирования функций, рядов и интегралов;

– методами доказательств и аналитического исследования функций, рядов и интегралов на непрерывность, сходимость, равномерную сходимость;

– навыками самообразования и способами использования аппарата математического анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Учебная программа предназначена для студентов 2 курса (4 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 236 часов, в том числе 136 часов аудиторных занятий, из них лекционных – 68 часов, лабораторных занятий – 64 часа, УСР – 4 часа. Форма отчетности – экзамен, зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Функции ограниченной вариации

Функции ограниченной вариации. Полная вариация, примеры.

Аддитивность и непрерывность вариации. Теорема Жордана.

Спрямляемый путь и его длина. Критерий Жордана спрямляемости.

Тема 2. Интеграл Римана-Стилтьеса

Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрировании по частям)

Условия существования интеграла Стилтьеса, оценка интеграла.

Формулы для вычисления с помощью интеграла Римана.

Тема 3. Ряды Фурье

Ряды Фурье. Примеры
Теорема Дирихле-Жордана.

Средние Фейера и их интегральное представление. Теорема Фейера.

Тема 4. Операции с числовыми рядами

Понятие о суммируемости числовых рядов.

Ряды со скобками. Перестановки ряда

Сумма перестановки абсолютно сходящегося ряда.

Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Тема 5. Пространство непрерывных функций

Пространство C[0,1], норма, сходимость, полнота.

Теорема Вейерштрасса о плотности алгебраических полиномов в пространстве непрерывных функций.

Пример Ван дер Вардена непрерывной нигде не дифференцируемой функции.

Тема 6. Наилучшие приближения тригонометрическими многочленами

Модули непрерывности

Ядра Джексона и их свойства. Теорема Джексона.

Теорема Лебега.

Тема 7. Система функций Хаара

Двоичные отрезки и их свойства. Пространства ступенчатых функций.

Определение системы Хаара, ортогональность, ряды Фурье.

Ядра Дирихле системы Хаара. Сходимость рядов Фурье непрерывных функций. Теорема Джексона для системы Хаара.

Система функций Фабера-Шаудера. Ряды Фурье и их сходимость.

Тема 8. Выпуклые функции

Определение выпуклости, условия выпуклости в терминах производных.

Свойства выпуклых функций (существование односторонних производных, дифференцируемость всюду, кроме счетного множества, непрерывность).

Неравенство Йенсена и его приложения.

Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского

Тема 9. Критерий интегрируемости Лебега

Колебание функции в точке и его свойства. Множества меры нуль, примеры.

Теорема Лебега.

Тема 10. Преобразование Фурье

Интегрирование комплекснозначных функций. Ступенчатые функции иих свойства.

Определение преобразования Фурье, примеры.

Связь преобразования Фурье с операциями над функциями.

Тема 11. Формула Стирлинга

Формулы Валлиса.

Доказательство формулы Стирлинга

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Номер раздела, темы	**Название раздела, темы**	**Количество аудиторных часов**					**Количество часов по УСР**	**Формы контроля знаний**
		лекции	**практические занятия**	**семинарские занятия**	**лабораторные занятия**	**Иное**		
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	**Тема 1. Функции ограниченной вариации**	**6**			**10**			
1.1	Функции ограниченной вариации. Полная вариация, примеры.	4			8			Проверка индивидуальных заданий с их устной защитой
1.2	Аддитивность и непрерывность вариации. Теорема Жордана.	1						
1.3	Спрямляемый путь и его длина. Критерий Жордана спрямляемости.	1			2			
2	**Тема 2. Интеграл Римана-Стилтьеса**	**6**			**8**			
2.1	Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрировании по частям)	2						
2.2	Условия существования интеграла Стилтьеса, оценка интеграла.	2						
2.3	Формулы для вычисления с помощью интеграла Римана.	2			8			Проверка индивидуальных заданий с их устной защитой
3	**Тема 3. Ряды Фурье**	**4**			**10**			

3.1	Ряды Фурье. Примеры Теорема Дирихле-Жордана.	2			8			Проверка индивидуальных заданий с их устной защитой
3.2	Средние Фейера и их интегральное представление. Теорема Фейера.	2			2			
4	**Тема 4. Операции с числовыми рядами**	**8**			**6**			
4.1	Понятие о суммируемости числовых рядов.	1						
4.2	Ряды со скобками. Перестановки ряда	1						
4.3.	Сумма перестановки абсолютно сходящегося ряда.	2						
4.4.	Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.	2						
4.5	Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.	2			6			Проверка индивидуальных заданий с их устной защитой
5	**Тема 5. Пространство непрерывных функций**	**6**						
5.1	Пространство C[0,1], норма, сходимость, полнота.	2						
5.2	Теорема Вейерштрасса о плотности алгебраических полиномов в пространстве непрерывных функций.	2						
5.3	Пример Ван дер Вардена непрерывной нигде не дифференцируемой функции.	2						
6	**Тема 6. Наилучшие приближения тригонометрическими многочленами**	**6**						
6.1	Модули непрерывности	2						
6.2	Ядра Джексона и их свойства. Теорема Джексона.	2						

6.3	Теорема Лебега.	2						
7	**Тема 7. Система функций Хаара**	**8**			**10**		**2**	Коллок-виум
7.1	Двоичные отрезки и их свойства. Пространства ступенчатых функций.	2			2			
7.2	Определение системы Хаара, ортогональность, ряды Фурье.	2						
7.3	Ядра Дирихле системы Хаара. Сходимость рядов Фурье непрерывных функций. Теорема Джексона для системы Хаара.	2			8			Проверка индивидуальных заданий с их устной защитой
7.4	Система функций Фабера-Шаудера. Ряды Фурье и их сходимость.	2						
8	**Тема 8. Выпуклые функции**	**8**			**10**			
8.1	Определение выпуклости, условия выпуклости в терминах производных.	2			10			Проверка индивидуальных заданий с их устной защитой
8.2	Свойства выпуклых функций (существование односторонних производных, дифференцируемость всюду, кроме счетного множества, непрерывность).	2						
8.3	Неравенство Йенсена и его приложения.	2						
8.4	Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского	2						
9	**Тема 9. Критерий интегрируемости Лебега**	**4**						
9.1	Колебание функции в точке и его свойства. Множества меры нуль, примеры.	2						
9.2	Теорема Лебега.	2						
10	**Тема 10. Преобразование Фурье**	**10**			**10**		**2**	Коллок-виум

10.1	Интегрирование комплекснозначных функций. Ступенчатые функции иих свойства.	2						
10.2	Определение преобразования Фурье, примеры.	4			10			Проверка индивидуальных заданий с их устной защитой
10.3	Связь преобразования Фурье с операциями над функциями.	4						
11	**Тема 11. Формула Стирлинга**	**4**						
11.1	Формулы Валлиса.	2						
11.2	Доказательство формулы Стирлинга	2						
	Всего	**68**			**64**		**4**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Список литературы

Основная литература

1 Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.

2 В.А. Зорич. Математический анализ (2 тома). М.: Наука, 1981 и другие издания.

3 Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. М.: Высшая школа, Т. 1, 2. 1981 и другие издания.

4 С.М. Никольский. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука. 1990.

5 Б.П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

6 Э.И. Зверович. Вещественный и комплексный анализ. Т. 1–6. Минск: Вышэйшая школа, 2008.

7 Сборник задач по математическому анализу /Под ред. Л.Д. Кудрявцева, М.: Наука, Т. 1. – 1984, Т. 2. – 1986, Т. 3 – 1994 и другие издания.

Дополнительная литература

8 Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. М.: Наука. 1969 и другие издания.

9 В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Математический анализ. М.: Наука, 1979.

10 А.М. Тер-Крикоров, И.И. Шабунин. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

11 У. Рудин. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

12 Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.

13 Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Контрольные мероприятия УСР по дисциплине «Дополнительные главы математического анализа» проводятся преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий.

Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Примерный перечень вопросов для коллоквиумов

Тема «Система функций Хаара»

1. Двоичные отрезки и их свойства.
2. Пространства ступенчатых функций.
3. Определение системы Хаара.
4. Ортогональность системы.
5. Ряды Фурье.
6. Ядра Дирихле системы Хаара.
7. Сходимость рядов Фурье непрерывных функций.
8. Теорема Джексона для системы Хаара.
9. Система функций Фабера-Шаудера.
10. Ряды Фурье и их сходимость.
11. Разложение конкретных функций по системе Хаара.
12. Разложение конкретных функций по системе Фабера-Шаудера.

Тема «Преобразование Фурье»

1. Интегрирование комплекснозначных функций.
2. Ступенчатые функции и их свойства.
3. Определение преобразования Фурье.
4. Примеры вычисления преобразования Фурье.
5. Функция Гаусса-Вейрштрасса.
6. Связь с операциями в области определения функций (сдвиги и растяжения).
7. Свертки.
8. Преобразование Фурье свертки.
9. Преобразование Фурье дифференцируемой функции.
10. Дифференцирование преобразования Фурье.

Примерный перечень индивидуальных заданий
для самостоятельной работы студентов

Индивидуальные задания для самостоятельной работы включают выполнение лабораторных заданий, которые сдаются на проверку в письменном виде с последующей защитой.

Тема «Функции ограниченной вариации»

1. Проверить ограниченность вариации функции.
2. Вычислить полную вариацию функции.
3. Представить функцию в виде разности монотонных.
4. Проверить спрямляемость пути.

Тема «Интеграл Римана-Стилтьеса»

1. Проверить условия существования интеграла Римана-Стилтьеса.
2. Вычислить интегралы от конкретных функций.
3. Применить интегрирование по частям для вычисления интегралов.
4. Дать оценку для интеграла.

Тема «Операции над числовыми рядами»

1. Проверить абсолютную сходимость ряда.
2. Выполнить умножение рядов.

Тема «Выпуклые функции»

1. Проверить выпуклость функции с помощью первой производной.
2. Проверить выпуклость функции с помощью второй производной.
3. Оценить суммы с помощью неравенства Юнга.
4. Оценить суммы с помощью неравенства Гельдера.

Перечень используемых средств диагностики результатов учебной деятельности

Для диагностики используются следующие формы:
1. Устная форма.
2. Устно-письменные формы.

К устной форме диагностики относятся:
1. Коллоквиумы.
2. Устные зачеты.
3. Устные экзамены.

К устно-письменной форме диагностики относятся:
1. Проверка индивидуальных заданий с их устной защитой.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Математический анализ	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (прот. № 11 от 06.05.2015)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
на _____/_____ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры (протокол № ____ от ________ 20_ г.)

Заведующий кафедрой

________________________ _________________ ___________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

________________________ _________________ ___________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)