ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С БИВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

В.И. Корзюк, Е.С. Чеб (Минск, Беларусь)

В теории уравнений с частными производными интересен класс корректно поставленых задач. Авторами данного сообщения исследовались краевые задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка с биволновым оператором [1-3]. Специфика задачи Гурса состоит в том, что она рассматривается в нецилиндрической области, ограниченной характеристическими поверхностями. Для биволнового оператора имеется два семейства характеристических конусов. Методом энергетических неравенств и операторов осреднения с переменным шагом [4] доказывается теорема существования и единственности сильного решения задачи Гурса для указанного оператора.

Относительно независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ в области Q $n+1$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с кусочно-гладкой границей ∂Q рассматривается следующее гиперболическое уравнение:

$$\mathcal{L}u \equiv \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - a^2\Delta\Big)\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - b^2\Delta u\Big) + A^{(3)}u = f(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A^{(3)}u = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant 3} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\alpha_i (i = 0, \ldots, n)$ – целые неотрицательные числа, $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u = \partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}u/\partial x_0^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}$, $a^2 > b^2$, $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x})$ – заданные в Q функции.

Граница ∂Q области Q является кусочно-гладкой характеристической поверхностью. Для каждой точки $\boldsymbol{x} \in \partial Q$ и единичного вектора $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = \big(\nu_0(\boldsymbol{x}), \nu_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \nu(\boldsymbol{x})\big)$ выполняется соотношение характеристических направлений

$$\nu_0^2 - a^2\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2 = 0. \tag{2}$$

Граница ∂Q разбивается на две части $\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(2)}$, где для $\boldsymbol{x} \in \Gamma^{(1)}$ и соответствующего вектора нормали $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ выполняется равенство (2) и направляющий косинус $\nu_0(\boldsymbol{x}) > 0$, для $\boldsymbol{x} \in \Gamma^{(2)}$ и $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ – $\nu_0(\boldsymbol{x}) < 0$. На $\Gamma^{(2)}$ задаются однородные граничные условия

$$u\big|_{\Gamma^{(2)}} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big|_{\Gamma^{(2)}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\Big|_{\Gamma^{(2)}} = 0. \tag{3}$$

Поскольку ∂Q является только характеристической, то она внизу сходится в одну точку $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_0^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, т. е. $x_0^{(0)} = \inf\limits_{\boldsymbol{x}\in Q} x_0$. Предположим, что $x_0^{(0)} = 0$. Область Q может быть неограниченной. Обозначим через Q^T часть области Q высотой T, $Q^T = \{\boldsymbol{x} \in Q \,|\, 0 < x_0 < T\}$, где T любое конечное число из $(0, \infty)$.

Оператор $\mathcal{L}$ уравнения (1) имеет область определения $\mathcal{D}(\mathcal{L})$, состоящую из функций $u \in C^4_{\text{гр}}(\overline{Q^T})$, удовлетворяющих условиям (3).

Пусть $\Omega(x_0)$ – сечение области Q гиперплоскостью $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_0 = \text{const}\}$. Обозначим через B банахово пространство, получаемое замыканием множества $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ по норме

$$\|u\|_B = \sup_{0\leqslant x_0\leqslant T}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant 3}\|\mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u\|_{L_2(\Omega(x_0))}, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_{L_2\left(\Omega(x_0)\right)}$ – норма квадратично суммируемых по Лебегу функций, заданных на $\Omega(x_0)$.

Задачу (1)–(3) рассматриваем как операторное уравнение (1) из B в $L_2(Q)$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$.

Теорема 1. *Для оператора $\mathcal{L} : B \supset \mathcal{D}(\mathcal{L}) \ni u \to \mathcal{L}u \in L_2(Q^T)$ справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_B \leqslant c^{(0)} \|\mathcal{L}u\|_{L_2(Q^T)} \tag{5}$$

для любой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, где положительная константа $c^{(0)}$ не зависит от u.

Оператор $\mathcal{L}$, как оператор из B в $L_2(Q^T)$ допускает замыкание $\overline{\mathcal{L}}$.

Решение операторного уравнения

$$\overline{\mathcal{L}}u = f, \quad f \in L_2(Q^T)$$

называется сильным решением задачи Гурса (1)–(3).

Путем предельного перехода неравенство (5) распространяется и на оператор $\overline{\mathcal{L}}$ для любой функции $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{L}})$ и той же константы $c^{(0)}$.

Теорема 2. *Предположим, что коэффициенты $a^{(\alpha)}$ уравнения (1) суммируемы и ограничены. Тогда для любого элемента $f \in L_2(Q^T)$ существует и единственно сильное решение задачи (1)–(3) из банахова пространства B и справедлива оценка*

$$\|u\|_B \leqslant c^{(0)} \|f\|_{L_2(Q^T)}, \tag{6}$$

где $c^{(0)}$ – константа из энергетического неравенства (5).

Литература

1. Корзюк В.И., Чеб Е.С. *Смешанная задача для гиперболического уравнения четвертого порядка*// Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. №2. С.9–13.

2. Корзюк В.И., Чеб Е.С. *Смешанные задачи для биволнового уравнения*// Вестник Белорус. ун-та. Сер.1. 2005. №1. С.63–68.

3. Корзюк В.И., Чеб Е.С. *Задача Коши для уравнения четвертого порядка с биволновым оператором*// Дифференц. уравнения. 2007. Т.43, №5. С.669–676.

4. Корзюк В.И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения*// Вестник Белорус. ун-та. Сер.1. 1996. №3. С.55–71.