$$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),$$

$$V=-\pi/2+\pi(0{,}5+k1)/32768;\ \ W=-\ln\left((0{,}5+k2)/32768\right).$$

$$C_{\alpha,\beta}=\frac{\operatorname{arctg}\left(\beta\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha};\ \ D_{\alpha,\beta,\sigma}=\sigma\left(\cos\left(\operatorname{arctg}(\beta\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2})\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

$$\text{а) } \alpha\neq 1,\ \ X=D_{\alpha,\beta,\sigma}\frac{\sin\alpha(V+C_{\alpha,\beta})}{(\cos V)^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos(V-\alpha(V+C_{\alpha,\beta}))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+\mu;$$

$$\text{б) } \alpha=1,\ \ X=\sigma\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta V\right)\operatorname{tg}V-\beta\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}W\cos V}{\frac{\pi}{2}+\beta V}\right)\right]+\mu+\frac{2}{\pi}\beta\sigma\ln(\sigma).$$

УДК 517.966

В.В. КРАХОТКО, Г.П. РАЗМЫСЛОВИЧ

ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ НА ПОДПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

The necessary and sufficient conditions of the complete controllability for the linear systems with a delay in the control are investigated.

Рассмотрим систему управления вида

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B_1u(t)+B_2u(t-h)+\int_0^h B(s)u(t-s)ds,\ \ t\geq 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x_0=x(0),\ u_0(\cdot)=\{u(t)=\varphi(t),\ t\in[-h,0)\},$$

где $x\in R^n$, $u\in R^r$; A, B_1, B_2 - постоянные матрицы соответствующих размеров; $B(t)$ - $(n\times r)$-матричная функция; x_0 - заданный n-вектор; $\varphi(t)$ - кусочно-непрерывная n-вектор-функция.

Пусть H - некоторая постоянная $m\times n$-матрица.

Определение 1. Систему (1) назовем полностью H-управляемой, если для любого вектора $x_0\in R^n$ и любой кусочно-непрерывной функции $\varphi(t)$, $t\in[-h,\ 0)$, существуют моменты времени t_1, $0< t_1 < +\infty$, и управление $u(t)$, $t\in[0, t_1-h)$, $u(t)\equiv 0$, $t\ge t_1-h$, такие, что траектория $x(t)$, $t\ge 0$, системы (1) обладает свойством $x(0) = x_0$, $Hx(t)\equiv 0$, $t\ge t_1$.

Допустим, что в любой момент времени t, $t\ge 0$, измерению доступно не состояние $x(f)$ системы (1), а выход

$$y(t) = Hx(t),\ t\ge 0,\ y_0 = y(0), \tag{2}$$

и управление $u\, t\ge 0$, выбирается из условия, что известен выход системы (1).

Определение 2. Систему (1) назовем полностью управляемой по выходу (2), если для любых m-вектора y_0 и кусочно-непрерывной функции $\varphi(t)$, $t\in[-h, 0)$, существуют момент времени t_1, $0 < t_1$, $< +\infty$, и управление $u(t)$, $t\in[0, t-h)$, $u(t)\equiv 0$, $t\ge t_1-h$, такие, что $y(t)\equiv 0$ при $t\ge t_1$.

Теорема 1. Система (1) полностью H-управляема тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\operatorname{rank}\ \{\bar H A^i B_h,\ i=\overline{0,k-1}\} = \operatorname{rank}\ \bar H, \tag{3}$$

где $B_h = B_1 + e^{-Ah}B_2 + \int_0^h e^{-As}B(s)ds$, $\bar H = \begin{bmatrix} HA^i \\ \overline{i-0,k-1} \end{bmatrix}$, k – степень минимального многочлена матрицы А.

Доказательство. Пусть

$$x(t) = p(t) + \int_0^h M(s)u(t-s)ds,\ t\ge 0, \tag{4}$$

где $p(t)$ - некоторая n-вектор-функция, а $M(t)$, $t\in[0, h]$, - некоторая $n\times r$-матрица. Тогда с использованием соотношения (4) система (1) приобретает вид

$$\begin{gathered}\dot p(t) + M(0)u(t) - M(h)u(t-h) + \int_0^h M'(s)u(t-s)ds = \\ = Ap(t) + \int_0^h AM(s)u(t-s)ds + B_1u(t) + B_2u(t-h) + \int_0^h B(s)u(t-s)ds.\end{gathered} \tag{5}$$

Теперь предположим, что $n\times r$-матричная функция $M(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM(s)}{ds} = AM(s) + B(s),\ s\in[0, h], \tag{6}$$

с начальным условием

$$M(h) = -B_2. \tag{7}$$

Исходя из (6) и (7), имеем

$$M(s) = -e^{A(s-h)}B_2 + \int_h^s e^{A(s-\tau)}B(\tau)d\tau.$$

Но тогда на основании равенства (5) получаем, что n-вектор-функция $p(t)$, $t\ge 0$, удовлетворяет системе управления вида

$$\dot p(t) = Ap(t) + (B_1 + e^{-Ah}B_2 + \int_0^h e^{-As}B(s)ds)u(t) \tag{8}$$

с начальным условием

$$p(0) = x_0 + \int_0^h (-e^{-A(s+h)}B_2 + \int_h^{-s} e^{-A(s+\tau)}B(\tau)d\tau)\varphi(s)ds.$$

Ясно, что система (1) полностью H-управляема тогда и только тогда, когда полностью H-управляема система (8). В свою очередь система (8), согласно результатам работы [3], полностью H-управляема тогда и только тогда, когда выполняется равенство (3). Теорема доказана.

Теорема 2. Для того чтобы система (1) при условии, что $B(s)\equiv 0,\ s\in[0,\ h]$, была полностью управляемой по выходу (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{rank}\ \{\bar{H}A^iB_h^*,\ i=\overline{0,k-1}\}=\operatorname{rank}\ \{\bar{H},\ H_{B_1},\ H_{B_2},\ \bar{H}A^iB_h^*,\ i=\overline{0,k-1}\},$$

где $H_{B_i}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & HB_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & HB_i & \dots & HA^{k-3}B_i \\ HB_i & HAB_i & \dots & HA^{k-2}B_i \end{bmatrix}$, $i=1,\ 2;\ B_h^*=B_1+e^{-Ah}B_2$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М, 1971.
3. Крахотко В.В., Размыслович Г.П.// Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 9. С. 1707.
4. Крахотко В.В., Размыслович Г. П. // Там же. 2005. Т. 41. № 9. С. 1291.

Поступила в редакцию 05.12.05.

Валерий Васильевич Крахотко - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

Георгий Прокофьевич Размыслович - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.

$$Z^m(A,\ b):\min\ \{f(x,\ A,\ b):x\in X\},$$

$$f(x,\ A,\ b)=(|\ A_1x+b_1\ |,|\ A_2x+b_2\ |,\dots,|\ A_mx+b_m\ |),\ X$$

$$X\subseteq \mathbf{E}^n=\{0,1\}^n,\ |\ X\ |\ge 2,\ n\ge 2,\ A=[a_{ij}]_{m\times n}\in\mathbf{R}^{m\times n},\ A_i$$

$$A,\ i\in N_m=\ \{1,2,\dots,m\},\ \ m\ge 1,\ \ b=(b_1,b_2,\dots,b_m)^T\in\mathbf{R}^m,\ x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T.$$

$$x\in P^m(A,b)\Leftrightarrow\{x'\in X:f(x,A,b)\ge f(x',A,b)\ \ \&\ \ f(x,A,b)\ne f(x',A,b)\}=\varnothing.$$

$$1<|\ X\ |<\infty$$

$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ и $b\in\mathbf{R}^m$.

$$Ax+b=\mathbf{0}^{(m)},\ \ x\in X, \tag{1}$$

где $\mathbf{0}^{(m)}=(0,0,\dots,0)\in\mathbf{R}^m$.