МЕТОД ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ТЕПЛОВЫМ ПОЛЕМ В СРЕДЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская, Ю.В. Пулко (Минск, Беларусь)

В пространстве $\mathbb{R}^3$ разместим плоский экран $D = \{0 < z < \Delta\}$, выполненный из материала с запаздыванием электрической и магнитной поляризаций и токов проводимости. В полупространствах $D_1(z < 0)$, $D_2(z > \Delta)$ среда характеризуется диэлектрической проницаемостью ε_j, магнитной проницаемостью μ_j и удельной электрической проводимостью γ_j $(\gamma_1 = 0, \gamma_2 \neq 0)$. Из полупространства D_1 на слой D воздействует электромагнитное первичное поле $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$, которое через слой D проникает в область D_2. При этом на плоскостях раздела сред $\Gamma_1(z = 0)$, $\Gamma_2(z = \Delta)$ выполняются граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих поля. Образовавшееся в слое D поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ подчиняется уравнениям Максвелла [1]

$$\operatorname{rot}\vec{H}(t) = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(t)}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}(t)}{\partial t} + \vec{J}(t),$$
$$\operatorname{rot}\vec{E}(t) = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}(t)}{\partial t} - \frac{\partial\vec{m}(t)}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\vec{E}(t)\Big|_{t\leqslant 0} = 0$; $\vec{H}(t)\Big|_{t\leqslant 0} = 0$; $\vec{P}(t) = \varepsilon_0\kappa\vec{E}(t - t_1)$ – электрическая поляризация; $\vec{J}(t) = \gamma\vec{E}(t - t_0)$ – плотность токов проводимости среды в D; $\vec{m}(t) = \mu_0\chi\vec{H}(t - t_2)$ – магнитная поляризация; t_0, t_1, t_2 – времена запаздывания среды.

В результате распространения поля $\vec{E}$, $\vec{H}$ в слое D электромагнитная энергия преобразуется в тепловую и наоборот. При этом будем считать, что плотность источников тепла, создаваемых полем, определяется выражением $Q = \left(\vec{E}, \dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}, \dfrac{\partial\vec{m}}{\partial t}\right) + \left(\vec{E}, \vec{J}\right)$, а тепловой процесс описывается уравнением [2]

$$C\rho\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}(k\operatorname{grad} w) = Q, \tag{2}$$

где w – температура среды в области D, а плотность среды ρ не изменяется при нагревании. В простейшем случае, когда поля $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ параллельны слою D, т. е. $\vec{E}_0 = u_0(z,t)\vec{e}_x$, $\vec{H}_0 = v_0(z,t)\vec{e}_y$, и удовлетворяют уравнениям Максвелла в D_1, тогда $\vec{E} = u(z,t)\vec{e}_x$, $\vec{H} = v(z,t)\vec{e}_y$. Учитывая уравнения (1), (2) и граничные условия сопряжения на плоскостях Γ_j, сформируем математическую модель.

Модель 1. Нагревание слоя из материала с запаздыванием при воздействии электромагнитного импульса $u_0 = f\left(\left(\dfrac{z}{a_1} - t\right)\Big/\tau\right)$, $f(x) \neq 0$, $-h < x < 0$; $f(x) = 0$, $x \leqslant -h$, $x \geqslant 0$, определяется решением начально-краевой задачи

$$\varepsilon_0 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa(w)u(t-t_1)\right) + \gamma(w)u(t-t_0) + \frac{\partial v(t)}{\partial z} = 0,$$
$$\mu_0 \frac{\partial v(t)}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\chi(w)v(t-t_2)\right) + \frac{\partial u(t)}{\partial z} = 0, \quad 0 < z < \Delta, \quad t > 0; \tag{3}$$
$$\left(u(t) + a_1\mu_1 v(t)\right)\Big|_{z=0} = F(t), \quad t \geqslant 0, \quad a_j = 1/\sqrt{\varepsilon_j \mu_j},$$
$$\left(u(t) - \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}\int\limits_0^t e^{-c(t-\eta)} I_0(c(t-\eta))\frac{\partial v(\eta)}{\partial \eta}d\eta\right)\Bigg|_{z=\Delta} = 0, \quad t \geqslant 0;$$
$$u\big|_{t\leqslant 0} = 0, \quad v\big|_{t\leqslant 0} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant \Delta, \quad c = \gamma_2/(2\varepsilon_2);$$
$$C\rho\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(k(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial u^2(t)}{\partial t} - \frac{\mu_0}{2}\frac{\partial v^2(t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left(u(t)v(t)\right), 0 < z < \Delta, t > 0; \tag{4}$$
$$k(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=0} = p_1, \quad k(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=\Delta} = -p_2, \quad t \geqslant 0, \quad w\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant \Delta, \tag{5}$$

где $F(t) = \left(u_0 - a_1\int\limits_0^t \dfrac{\partial u_0}{\partial z}\,dt\right)\Bigg|_{z=0} = 2f\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

Исключая из уравнений (3) функцию v, придем к следующей модели.

Модель 2. В случае постоянных величин κ, χ, γ при $\gamma_2 = 0$ нагревание слоя D при воздействии импульса $u_0(z,t)$ определяется решением задачи

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + \kappa\frac{\partial^2 u(t-t_1)}{\partial t^2} + \chi\frac{\partial^2 u(t-t_2)}{\partial t^2} + \kappa\chi\frac{\partial^2 u(t-\eta_1)}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\frac{\partial u(t-t_0)}{\partial t} +$$
$$+\frac{\gamma\chi}{\varepsilon_0}\frac{\partial u(t-\eta_2)}{\partial t} - a_0^2\frac{\partial^2 u(t)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < \Delta, \quad t > 0; \tag{6}$$
$$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} + \chi\frac{\partial u(t-t_2)}{\partial t} - \frac{a_1\mu_1}{\mu_0}\frac{\partial u(t)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=0} = G(t),$$
$$\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} + \chi\frac{\partial u(t-t_2)}{\partial t} + \frac{a_2\mu_2}{\mu_0}\frac{\partial u(t)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=\Delta} = 0, \quad t \geqslant 0;$$
$$u\big|_{t\leqslant 0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t\leqslant 0} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant \Delta, \quad \eta_1 = t_1 + t_2, \quad \eta_2 = t_0 + t_2,$$

где $G = \left(\frac{\partial u_0(t)}{\partial t} - a_1 \frac{\partial u_0(t)}{\partial z} + \chi \frac{\partial u_0(t-t_2)}{\partial t} - a_1 \chi \frac{\partial u_0(t-t_2)}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}$.

К уравнениям (6) добавляются уравнения (4), (5).

В разработанных моделях исключаются вычисления полей в областях D_1 и D_2 с помощью введения специальных граничных условий импедансного типа. Строятся другие модели и исследуются методы численной реализации моделей.

Литература

1. Ерофеенко В. Т, Козловская И. С. *Математические модели в электродинамике.* Минск: БГУ, 2004.

2. Гринчик Н. Н., Достанко А. П. *Влияние тепловых и диффузионных процессов на распределение электромагнитных волн в слоистых материалах.* Минск: ИТМО НАН Беларуси, 2005.