Institute of Applied Mathematics and Informatics
Technical University of Sofia
19 -th Summer School "Applications of Mathematics in Engineering"
Varna, 24.08- 02.09.1993

НЕОДНОРОДНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ВЛОЖЕННОЙ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ ОГРАНИЧЕНИЙ

Л.А. Пилипчук

I. Постановка задачи. Рассмотрим конечную ориентированную связную сеть $S=(I,U)$ с множеством узлов I и множеством дуг U, определенных на $I\times I$ $(|I|<\infty,\ |U|<\infty)$. Каждому узлу $i\in I$ сети S поставим в соответствие вектор a_i, $a_i=(a_i^k,\ k\in K)$ $K=\{1,2\}$, называемый вектором интенсивностей, а каждой дуге $(i,j)\in U$ - положительное число d_{ij}, называемое ее пропускной способностью. Без ограничения общности можно предположить, что для компонент векторов интенсивностей выполняются условия $\sum\limits_{i\in I} a_i^k=0,\ k\in K.$

Определение I. Совокупность $x=(x_{ij},\ (i,j)\in U)$, состоящая из векторов $x_{ij}=(x_{ij}^k,\ k\in K)$, определенных на множестве дуг U и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ji}^k=a_i^k,\ i\in I,\ k\in K, \tag{I}$$

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^k\leq d_{ij},\ (i,j)\in U,\ x_{ij}^k\geq 0,\ (i,j)\in U,\ k\in K, \tag{2}$$

и дополнительным ограничениям

$$\sum_{k\in K}\ \sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^{kp}\ x_{ij}^k=\alpha_p,\ p=\overline{1,l},\ |K|\leq 2, \tag{3}$$

называется д в у х п р о д у к т о в ы м (н а г р у ж е нтигаётся минимум в задаче (I)-(4), называется о п т и м а л ь н ы м потоком.

С у б о п т и м а л ь н ы м (ε - о п т и м а л ь н ы м) назовем поток $x^{\varepsilon}=(x^{\varepsilon}_{ij},\ (i,j)\in U)$, $x^{\varepsilon}_{ij}=(x^{\varepsilon}_{ij}, k\in K)$, если

$$\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in(U)} c^{k}_{ij}\ x^{\varepsilon k}_{ij} - \sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in(U)} c^{k}_{ij}\ x^{Ok}_{ij} \leqslant \varepsilon.$$

Цель данной работы - построить п р я м о й, т о ч н ы й, р е л а к с а ц и о н н ы й метод решения задачи (I)-(4). Под п р я м ы м будем понимать метод, на итерациях которого преобразуется информация об исходной (прямой задаче). Прямой метод называется т о ч н ы м, если на его итерациях преобразуются потоки задачи, т.е. на каждой итерации условия баланса (I), дополнительные ограничения (3), а также прямые ограничения (2) выполняются точно. Прямой точный метод называется р е л а к с а ц и о н н ы м, если вдоль потоков, генерируемых методом, значение целевой функции не увеличивается.

2. Опора сети. Критерий опорности. В излагаемом методе основным инструментом преобразования потоков является о п о р а сети.

Определение 2. О п о р о й сети s в задаче (I)-(4) назовем совокупность дуг $U_{On}=\left\{U^{k}_{On},\ k\in K,\ U^{*}\right\}$, $U^{k}_{On}\subseteq U^{k}$, $k\in K, U=\cup_{k\in K} U^{k}$, $U^{*}\subseteq U^{1}_{On}\cap U^{2}_{On}$, для которой при $\tilde{U}=U_{On}$, $\tilde{U}=(\tilde{U}^{k},\ k\in K,\ \tilde{U}^{*})$, $\tilde{U}^{k}\subseteq U^{k}$, $k\in K$, $\tilde{U}^{*}\subseteq U$, система

$$\sum_{j\in I^{+}_{i}(\tilde{U}^{k})} x^{k}_{ij} - \sum_{j\in I^{-}_{i}(\tilde{U}^{k})} x^{k}_{ij}=0,\ i\in I,\ k\in K; \tag{5}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{(ij)\in\tilde{U}^{k}} \lambda^{kp}_{ij}x^{k}_{ij}=0,\ \ p=\overline{1,l}; \tag{6}$$

$$x^{1}_{ij}+x^{2}_{ij}=0\ \ (i,j)\in\tilde{U}^{*}, \tag{7}$$

имеет только тривиальное решение $x_{ij}\equiv0$, $(i,j)\in U$, но имеет не-н ы м) п о т о к о м.

Здесь $I_i^+(U)=\{j:(i,j)\in U\}$, $I_i^-(U)=\{j:(j,i)\in U\}$, λ_{ij}^{kp}, α_p, l - заданные числа. далее предполагается, что ранг системы (I)-(3) равен $2|I|-2+l$, где $|I|$ - число узлов сети S. В дальнейшем для краткости будем называть двухпродуктовый (нагруженный) поток просто потоком.

Число x_{ij}^k (k-ая компонента вектора x_{ij}) называется д у г о в ы м п о т о к о м k-го вида.

Узлы i, для которых выполняется неравенство $a_i^k>0$, называются источниками потока k-го вида, узлы i с $a_i^k<0$ - стоками потока k-го вида, а узлы i, характеристика a_i^k которых равна нулю - транзитными (промежуточными) для потока k-го вида.

Каждой дуге (i,j) поставим в соответствие вектор $c_{ij}=(c_{ij}^k,\ k\in K)$, k-ую компоненту которого назовем стоимостью перемещения (перевозки) единичного потока k-го вида (k-го продукта) по дуге (i,j).

В данной работе исследуются неоднородная (двухпродуктовая) транспортная сетевая задача с дополнительными ограничениями, состоящая в минимизации стоимости потока

$$\sum_{k\in K}\ \sum_{(i,j)\in(U)} c_{ij}^k\ x_{ij}^k \to min, \qquad (4)$$

при условиях (I)-(3).

Функция (4) называется целевой функцией задачи (I)-(4). Ограничения (1) назовем у с л о в и я м и б а л а н с а, ограничения (2) - п р я м ы м и, ограничения (1), (3) в совокупности - о с н о в н ы м и ограничениями задачи (I)-(4). При $|K|=1$ задача (I)-(4) представляет однородную сетевую транспортную задачу с дополнительными ограничениями общего вида.

[illegible] x [illegible] , на котором достривиальное решение для любой из следующих совокупностей дуг:

1) $\tilde{U}=\left\{U^k_{On},\ k\in K;\ U^*\setminus(i,j)\right\}$, где (i,j) – любая дуга из U^*;

2) $\tilde{U}=\left\{U^{k_O}_{On}\cup(i_O,j_O)^{k_O},\ U^{2/k_O}_{On},\ U^*\right\}$, $(i_O,\ j_O)^{k_O}\overline{\in}U^{k_O}_{On}$, $k_O\in K$. (8)

Исследуем структуру опорного множества $U_{On}=\left\{U^k_{On},\ k\in K,\ U^*\right\}$. Для этого сначала приведем некоторые понятия.

Последовательность различных узлов $i_1,\ i_2,\dots,i_m$, таких, что либо $(i_n,i_{n+1})\in U$, либо $(i_{n+1},i_n)\in U$, $n=\overline{1,m-1}$ называется элементарной ц е п ь ю, соединяющей узлы i_1, i_m. Сеть S называется с в я з н о й, если два любых ее узла можно соединить цепью. Цепь, у которой первый и последний узлы совпадают $(i_1=i_m)$, называется ц и к л о м.

Узел сети S называется в и с я ч и м, если он граничен для единственной дуги, которою также назовем в и с я ч е й.

Пусть в множестве U^k_{On} существует l_k дуг $(i,\ j)^k$ таких, что, удаление их из множества U^k_{On} приводит к множеству U^k_D, не содержащему циклов, причем множество $U^k_D\cup(i,\ j)^k$ обязательно содержит один цикл. Положим $U^k_a=U^k_{On}\setminus U^k_D$, $k\in K$.

<u>Определение 3.</u> Дуги $(i,\ j)^k$ из множества U^k_a назовем ц и к л и ч е с к и м и, $k\in K$.

<u>Определение 4.</u> Циклы $j_1,\ j_2,\dots,j_m$ сети $S=\{I,U\}$ называются н е з а в и с и м ы м и, если каждый из них имеет хотя бы одно ребро, не принадлежащее никаким другим циклам и единичные циркуляции [1, 2] на этих циклах образуют линейно-независимую систему векторов.

Каждой дуге $(i,\ j)$ из множества циклических дуг U^k_a поставим в соответствие один независимый цикл $L^k_{(i,j)}$ опорного множества U^k_{On}, который содержит эту дугу, $k\in K$. Если при некотором k из K множество U^k_{On} – связное, то введенные подобным образом циклы $Z=\left\{L^k_{(i,j)},\ (i,\ j)^k\in U^k_a\right\}$ образуют фундаментальное семейство циклов [3]. Припишем дуге $(i,\ j)^k\in U^k_a$ число $t=t(i,\ j)^k$, $(k-1)l_1+1\le t\le l_1+(k-1)l_2$, $l_k=|U^k_a|$, $k\in K$.

Рассмотрим произвольный цикл L^k_t, $t=t(i,\ j)^k$. Выберем в нем направление обхода таким образом, чтобы дуга $(i,\ j)^k$ была прямой. Обозначим через L^{k+}_t, L^{k-}_t совокупность прямых и обратных дуг цикла L^k_t соответственно.

Определение 5. Число $R_p\left(L^k_t\right)=\sum\limits_{(i,j)\in L^k_t}\lambda^{kp}_{ij}\,sign(i,\ j)^{L^k_t}$, где функция $sign(i,\ j)^{L^k_t}$ определяется соотношением

$$sign(i,\ j)^{L^k_t}=\begin{cases}1, \text{ если } (i,\ j)^k\in L^{k+}_t;\\ -1, \text{ если } (i,\ j)^k\in L^{k-}_t;\\ 0, \text{ если } (i,\ j)^k\overline{\in} K^k_t,\end{cases}$$

назовем детерминантом цикла L^k_t относительно p-го ограничения из числа дополнительных ограничений (3).

Определение 6. Цикл L^k_t назовем вырожденным относительно p-го ограничения из (3), если $R_p(L^k_t)=0$.

Упорядочим произвольным образом дуги множества U^*. Пусть $\tau=\tau(i,\ j)$ – порядковый номер дуги $(i,\ j)$ в U^*, $1\le\tau\le s$, $s=|U^*|$. Положим $\tilde{t}=\sum\limits_{k\in K} l_k$.

Составим матрицу $D=\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}$, где $D_1=(R_p(L^k_t))$, $t=\overline{1,\tilde{t}}$, $p=\overline{1,l})$ – $l\times\tilde{t}$ – матрица, построенная из детерминантов циклов $R_p(L^k_t)$ относительно ограничений из (3) и $D_2=\left\{\sigma_{\tau(i,j)}(L^k_t),\ \tau(i,j)=\overline{1,s};\ t=\overline{1,\ \tilde{t}}\right\}$ – $s\times\tilde{t}$ – матрица с элементами

$$\sigma_{\tau(i,j)}(L_t^k)= \begin{cases} 1, \text{если } (i,j)\cap L_t^k\neq\varnothing,\ (i,j)^k\in L_t^{k+}; \\ -1, \text{если } (i,j)\cap L_t^k\neq\varnothing,\ (i,j)^k\in L_t^{k-}; \\ 0, \text{если } (i,j)\cap L_t^k=\varnothing,\ (i,j)\in U^* \end{cases}$$

$$\tau(i,j)=\tau,(i,j)\in U^*,\ k=\begin{cases} 1, \text{ если } t\le l_1, \\ 2, \text{ если } t>l_1. \end{cases}$$

Если $\tilde{t}\neq 1+|U^*|$, то дополним ее нулями до квадратной матрицы порядка $\max\{\tilde{t},\ 1+|U^*|\}$.

Определение 7. Число $R(U_{on})=\det D$ назовем детерминантом опоры U_{on}.

Лемма 1. Нетривиальное решение системы (5) - (7) на множестве $\tilde{U}=U_{on}$ существует тогда и только тогда, когда уравнение

$$Dh = 0 \qquad (9)$$

относительно $h=(h_t,\ t=\overline{1,\tilde{t}})$ имеет ненулевое решение.

Доказательство. Достаточность. Пусть уравнение (9) имеет ненулевое решение $h\neq 0$, $h=(h_t,\ t=\overline{1,\tilde{t}})$. Покажем, что в этом случае можно построить нетривиальное решение системы (5)-(7). Положим

$$x^k_{\tau\rho}=h^k_t,\ t=t(\tau,\rho)^k,\ (\tau,\rho)^k\in U^k_a,\ \ k=\begin{cases} 1, \text{ если } t\le l_1, \\ 2, \text{ если } t>l_1. \end{cases}$$

При заданных значениях потоков (циркуляций) по дугам множества U^k_a потоки по дугам дерева U^k_D вычисляются по формуле

$$x^k_{ij}=\sum_{(\tau,\rho)\in U^k_a} X^k_{\tau\rho}\ \mathrm{sign}(i,j)^{L^k_{t(\tau,\rho)}},\ \ t(\tau,\rho)=t, \qquad (10)$$

$(k-1)\,l_1+1\le t\le (k-1)\,l_2+l_1$.

Далее, положим $x^k_{ij}=0$, $(i,j)^k\bar{\in} L$. Таким образом, ненулевое решение системы (5)-(7) построено. Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что система (5)-(7) на множестве U_{on} имеет ненулевое решение $x\neq 0$,

$$x = (x_{ij},\ (i,j) \in U),\ x_{ij} = (x^k_{ij},\ k \in K).$$

Среди дуг с нетривиальным потоком не существует висячей дуги, ибо в противном случае было бы нарушено условие баланса (5) для соответствующего висячего узла. Следовательно, существует циклическая дуга $(\rho,\eta)^{k_0}$, для которой $x^{k_0}_{\rho\eta} \neq 0$. По каждому из циклов множества $\tilde{L}$,

$$\tilde{L} = \left\{ L^k_{\tau\rho}\ ,\ (\tau,\rho)^k \in \bigcup_{k\in K} U^k_a \right\}$$

пропустим циркуляцию [1,2] $x^k_{\tau\rho}$. На дугах дерева U^k_D произойдет наложение циркуляций и величина дугового потока x^k_{ij} в этом случае станет равной

$$x^k_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_a^k} x^k_{\tau\rho} \operatorname{sign}(i,j)^{L^k_{t(\tau,\rho)}},\ (i,j)^k \in U^k_D,\ t(\tau,\rho) = t,$$

$(k-1)\,l_1+1 \le t \le l_1+(k-1)l_2,\ k \in K$. Подставим значение x^k_{ij}, $(i,j)^k \in U^k_D$ в уравнения (6),(7) системы (5)-(7):

$$\sum_{k\in K}\ \sum_{(i,j)\in U_{on}} \lambda^{kp}_{ij} x^k_{ij} = \sum_{k\in K}\ \sum_{(i,j)^k \in U^k_D} \lambda^{kp}_{ij} x^k_{ij} +$$

$$+ \sum_{k\in K}\ \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_a^k} \lambda^{kp}_{\tau\rho} x^k_{\tau\rho} = \sum_{k\in K}\ \sum_{(\tau,\rho)\in U_D^k} \lambda^{kp}_{ij} \times$$

$$\times \left[\sum_{(\tau,\rho)^k \in U^k_a} x^k_{\tau\rho} \operatorname{sign}(i,j)^{L^k_{t(\tau,\rho)}} \right] + \sum_{k\in K}\ \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_a^k} \lambda^{kp}_{\tau\rho} x^k_{\tau\rho} =$$

$$= \sum_{k\in K}\ \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_a^k} x^k_{\tau\rho} \left[\sum_{(i,j)^k \in U^k_D} \lambda^{kp}_{ij} \operatorname{sign}(i,j)^{L^k_{t(\tau,\rho)}} + \lambda^{kp}_{\tau\rho} \right] =$$

$$= \sum_{k\in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_{a}^{k}} x_{\tau\rho}^{k} R_p(L^k_{t(\tau,\rho)}) = 0, \; p = \overline{1,l}.$$

Уравнения (7) примут вид

$$\sum_{k\in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_{a}^{k}} x_{\tau\rho}^{k} \delta_{\tau(i,j)}(L^k_{t(\tau,\rho)}) = 0, \quad (i,j) \in U^*.$$

Окончательно,

$$\sum_{k\in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_{a}^{k}} R_p(L^k_t) x_{\tau\rho}^{k} = 0, \; p=\overline{1,l}, \tag{11}$$

$$\sum_{k\in K} \sum_{(\tau,\rho)^k \in U_{a}^{k}} x_{\tau\rho}^{k} \delta_{\tau(i,j)}(L^k_t) = 0, \; (i,j) \in U^*, \; t = t(\tau,\rho).$$

Сравнив систему (9) с (11), заключаем, что они совпадают. Поскольку существует циклическая дуга $(\rho,\eta)^{k_0}$ с $x_{\rho\eta}^{k_0} \neq 0$, то уравнение (9) имеет ненулевое решение. Лемма доказана.

Теорема 1. (критерий опорности). Для того чтобы совокупность дуг

$$U_{on} = \{U_{on}^{k},\ k\in K,\ U^*\}$$

была опорой сети S, необходимо и достаточно выполнения условий:

1) $I(U^k_{on}) = I$, $k\in K$;

2) U^k_{on} – связное множество, $k\in K$;

3) $R(U_{on}) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость.

1). Предположим, что существует такой индекс $k_0 \in K$, для которого $I(U_{on}^{k_0}) \neq I$. Рассмотрим ребро $(i_0, j_0)^{k_0}$, $i_0 \in I(U_{on}^{k_0})$, $j_0 \bar{\in} I(U_{on}^{k_0})$. В силу связности сети такое ребро существует.

Легко видеть, что дуга $(\tau,\rho)^{k_0}$, соответствующая ребру $\{i_0, j_0\}$,^{k_0} не образует цикла с дугами $(i,j)^{k_0} \in U^{k_0}_{on}$. Следовательно, система (5) - (7) имеет только тривиальное решение, что противоречит определению опоры. Итак, $I(U^k_{on}) = I$ для всех $k \in K$.

2). Пусть при некотором $k_0 \in K$ множество $U^{k_0}_{on}$ не связное. Предположим для простоты, что оно состоит из двух компонент связности

$$\bar S = \{ \bar I, \bar U^{k_0}_{on}\} \text{ и } \tilde S = \{ \tilde I, \tilde U^{k_0}_{on} \},\ \bar I \cap \tilde I = \varnothing,\ \bar U^{k_0}_{on} \cap \tilde U^{k_0}_{on} = \varnothing.$$

Добавим к множеству $U^{k_0}_{on}$ дугу $(i_0,j_0)^{k_0}$, дугу $(i_0,j_0)^{k_0}$, $i_0 \in \bar I$, $j_0 \in \tilde I$ (либо $i_0 \in \tilde I$, $j_0 \in \bar I$). В силу связности исходной сети S такая дуга существует.Запишем для полученной сети систему (5)-(7):

$$\sum_{j \in I^+_i(\bar U^{k_0}_{on})} x^{k_0}_{ij} - \sum_{j \in I^-_i(\bar U^{k_0}_{on})} x^{k_0}_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in \bar I,\ i \neq i_0; \\ -x^{k_0}_{i_0 j_0}, & \text{если } i = i_0; \end{cases}$$

$$\sum_{j \in I^+_i(\tilde U^{k_0}_{on})} x^{k_0}_{ij} - \sum_{j \in I^-_i(\tilde U^{k_0}_{on})} x^{k_0}_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in \tilde I,\ i \neq j_0; \\ x^{k_0}_{i_0 j_0}, & \text{если } i = j_0; \end{cases}$$

$$\sum_{j \in I^+_i(U^{2/k_0}_{on})} x^{2/k_0}_{ij} - \sum_{j \in I^-_i(U^{2/k_0}_{on})} x^{2/k_0}_{ji} = 0,\ i \in I;$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in Q} \lambda^{kp}_{ij} x^k_{ij} = 0,\ p = \overline{1,l},\ Q = U_{on} \cup (i_0,j_0)^{k_0};$$

$$x^1_{ij} + x^2_{ij} = 0,\ (i,j) \in U^*.$$

Сложив первые $|\bar I|$ уравнений, получим $x^{k_0}_{i_0 j_0} = 0$. Следовательно, система (12) совпадает с системой (5)-(7). Значит существует такая сеть, у которой $|Q| > |U_{on}|$ и система (5)-(7) имеет ненулевое решение. Полученное противоречие доказывает свойство 2) теоремы 1.

3. Пусть $R(U_{оп})=0$. Возможны случаи: а) $l+s < \sum\limits_{k \in K} l_k$, б) $l+s > \sum\limits_{k \in K} l_k$; в) $l+s = \sum\limits_{k \in K} l_k$. В случае а) система (9) имеет ненулевое решение, т.к. число переменных больше числа линейно независимых уравнений. Согласно лемме 1 и система (5)-(7) на множестве $U_{оп}$ имеет ненулевое решение, а это значит что $U_{оп}$ - не опора. В случае б) матрица D содержит линейно зависимые строки. Без ограничения общности положим, что матрица D содержит только одну линейно зависимую строку с номером m_0, $1 \le m_0 \le l+s$. Выразим строку с номером m_0 через остальные строки матрицы D. Поскольку столбцы матрицы D линейно независимы, то столбцы уменьшенной матрицы $\tilde{D}$ также линейно независимы. Это означает, что уравнение (9) с матрицей $\tilde{D}$ имеет единственное ненулевое решение. По лемме 1 система (5)-(7) имеет нетривиальное решение, что противоречит определнию опоры.

В случае в) построим нетривиальное решение системы (5)-(7). Положим $x^k_{ij} = 0$, $(i,j)^k \bar{\in} L$, $x^k_{ij} = h_t \operatorname{sign}\,(i,j)^{L^k_t}$, $(i,j) \in U^k_a$, $(k-1)\,l_1+1 \le t \le l_1+(k-1)\,l_2$, $k \in K$. Значения дуговых потоков x^k_{ij}, $(i,j)^k \in U^k_D$, вычисляются из условий баланса:

$$x^k_{ij} = \sum_{t=(k-1)l_1+1}^{l_1+(k-1)l_2} h_t \operatorname{sign}(i,j)^{L^k_t},\ k \in K.$$

Подставив значения дуговых потоков построенного ненулевого решения в (6), (7), получим

$$\sum_{k \in K} \sum_{t=(k-1)l_1+1}^{l_1+(k-1)l_2} h^k_t\, R_p(L^k_t) = 0,\ p=\overline{1,l};$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{t=(k-1)l_1+1}^{l_1+(k-1)l_2} h^k_t\, \delta_{\gamma(i,j)}(L^k_t) = 0,\ (i,j) \in U^*.$$

Значит, построено нетривиальное решение системы (9), что противоречит предположению $R(U_{оп})=0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество $U_{on} = \{ U^k_{on},\ k \in K; U^* \}$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3) теоремы 1. Покажем, что на множестве U_{on} существует только тривиальное решение системы (5)-(7). Доказательство проведем методом от противного. Пусть на множестве U_{on} можно построить ненулевое решение системы (5)-(7). Тогда по лемме 1, существует ненулевое решение системы (9). По свойству 3) теоремы выполняется равенство $l+s = \sum_{k\in K} l_k$ и система (9) имеет только тривиальное решение. Полученное противоречие показывает, что на множестве U_{on} существует только тривиальное решение системы (5)-(7).

Покажем, что при выполнении условий 1) - 3) критерия опорности на каждом из множеств $\tilde{U}$ из (8) существует нетривиальное решение системы (5)-(7).

Пусть $\tilde{U} = \{ U^k_{on},\ k \in K;\ U^* \setminus (i,j) \}$, где (i,j) - любая дуга из U^*. В матрице $\tilde{D}$, построенной по множеству $\tilde{U}$, число строк на единицу меньше, чем в матрице D, построенной по множеству U_{on}. Для матрицы $\tilde{D}$ выполнено неравенство $l+s-1 < \sum_{k\in K} l_k$, а значит, уравнение (9) с матрицей $\tilde{D}$ имеет нетривиальное решение, что означает, согласно лемме 1 , что система (5)-(7) допускает нетривиальное решение на множестве $\tilde{U}$.

Докажем, что система (5)-(7) на множестве

$\tilde{U} = \{U^{k_o}_{on} \cup (i_o,j_o)^{k_o},\ U^{2/k_o}_{on},\ U^*\}$, где $(i_o,j_o)^{k_o} \in U^{k_o} \setminus U^{k_o}_{on}$, $k_o \in K$, имеет ненулевое решение. Поскольку $(i_o,j_o)^{k_o} \in U^{k_o}_{on}$ и $U^{k_o}_{on}$ - связное множество, то в множестве $U^{k_o}_{on} \cup (i_o,j_o)^{k_o}$ можно выделить еще один цикл $L^{k_o}_t(i_o,j_o)$, которому соответствует дополнительный столбец матрицы D, в котором содержится информация о новом цикле $L^{k_o}_t(i_o,j_o)$. Для матрицы $\tilde{D}$, построенной по множеству $\tilde{U}$, справедливо неравенство $l+s < \sum_{k\in K} l_k + 1$. Значит, уравнение (9) с матрицей $\tilde{D}$ имеет ненулевое решение, что, в силу леммы 1, эквивалентно существованию ненулевого решения системы (5)-(7). Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства критерия опорности следует, что $|U_{on}| = 2\,|I| + l + s - 2$.

Поэтому для задачи (1) – (4) должно быть выполнено соотношение

$$|U| \geq 2\,|I| + l + s - 2.$$

3. <u>Формула приращения стоимости потока. критерий оптимальности и ε – оптимальности</u>.

Прямой точный метод называется о п о р н ы м, если в нем преобразование потоков осуществляется с помощью опор. В прямых опорных методах опора, преобразуя потоки, сама изменяется на итерациях. Следовательно, основным элементом метода становится о п о р н ы й п о т о к.

<u>Определение</u> 8. Пару $\{x, U_{on}\}$ из потока и опоры сети назовем о п о р н ы м п о т о к о м.

<u>Определение</u> 9. Опорный поток $\{x, U_{on}\}$ назовем н е в ы р о ж д е н н ы м , если выполняются соотношения

$$x_{ij}^{k} > 0,\ (i,j)^k \in U_{on}^{k};\quad \sum_{k\in K} x_{ij}^{k} < d_{ij},\ (i,j) \in U_{on}\backslash U^{*},\ k\in K.$$

Пусть $\{x, U_{on}\}$ – опорный поток. По опоре U_{on} построим потенциалы r_p, $p = \overline{1,l}$, дополнительных ограничений (3), потенциалы r_{p_1}, $p_1 = l+1, l+s$, $s = |U^{*}|$, ограничений $x_{ij}^{1}+x_{ij}^{2} \leq d_{ij}$ и потенциалы u_i^k, $k\in K$, узлов $i\in I$, как решение системы

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^{k} = 0,\ (i,j)^k \in U_{on}^{k} \setminus U^{*},$$

$$k \in K;\ u_i^1 - u_j^1 + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{1p} r_p - c_{ij}^{1} =$$

$$= u_i^2 - u_j^2 + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{2p} r_p - c_{ij}^{2},\ (i,j) \in U^{*}. \qquad (13)$$

Приведем способ решения системы (13). для каждого цикла

$$L_t^k,\ (k-1)\, l_1+1 \leq t \leq l_1 + (k-1)\, l_2,\ k\in K,$$

сложим уравнения системы (13), соответствующие дугам множества L_t^{k+} и вычтем уравнения, соответствующие множеству L_t^{k-}. Получим следующую систему

$$D' r = d \qquad (14)$$

где $r = (r_p,\ p = \overline{1,l};\ r_{p_1},\ p_1 = \overline{l+1,l+s}),\ \alpha = (\alpha_t,\ t=\overline{1,\tilde{t}})$

$$\alpha_t = \sum_{(i,j)\in L_t^{k+}} c_{ij}^k - \sum_{(i,j)\in L_t^{k-}} c_{ij}^k, \quad k = \begin{cases} 1, \text{ если } & t\le l_1 \\ 2, \text{ если } & t> l_1. \end{cases}$$

Система (14) относительно r имеет единственное решение, так как $R(U_{on}) \ne 0$. Величины r_{p_1}, $p_1 = \overline{l+1,l+s}$, вычисленные из системы (14), обозначим через μ_{ij}. Одно из чисел u_i^k, $i\in I$, зададим произвольно, остальные значения потенциалов узлов однозначно вычислим с помощью деревьев U_D^k из системы

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - (c_{ij}^k - \mu_{ij}) = 0,$$

$$(i,j)^k \in U_D^k \cap U^*; \qquad (15)$$

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k = 0,\ (i,j)^k \in U_{on}^k \setminus U^*,$$

как в классическом методе потенциалов, $k\in K$.

По известным значениям потенциалов подсчитаем о ц е н к и для неопорных дуг $(i,j)^k \in U_H^k$, $U_H^k = U\setminus U_{on}^k$, $k\in K$, и дуг $(i,j)\in U^*$:

$$\nabla_{ij}^k = u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k.$$

Пусть $\{x,U_{on}\}$ – начальный опорный поток. Наряду с опорным потоком $\{x,U_{on}\}$ рассмотрим другой поток $\bar{x} = x + \Delta x$, где Δx – приращение потока x: $\Delta x = \bar{x} - x$. Вычислим приращение стоимости потока

$$\sum_{k\in K} \sum_{(i,j)^k\in U^k} c_{ij}^k \Delta x_{ij}^k = -\sum_{(i,j)\in U^*} \nabla_{ij}^k(\Delta x_{ij}^1 + \Delta x_{ij}^2) - \sum_{k\in K} \sum_{(i,j)^k\in U_H^k} \nabla_{ij}^k \Delta x_{ij}^k \qquad (16)$$

Составим для задачи (1)-(4) д в о й с т в е н н у ю з а д а ч у

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I} a_i^k u_i^k + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p - \sum_{(i,j)\in U} \alpha_{ij} w_{ij} \to max \tag{17}$$

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - w_{ij} \leq c_{ij}^k, w_{ij} \geq 0, (i,j)\in U, k\in K \tag{18}$$

<u>Теорема 2 (критерий оптимальности)</u>. Соотношения

$$\begin{aligned} &\nabla_{ij}^k \leq 0 \text{ при } x_{ij}^k = 0 \\ &\nabla_{ij}^k = 0 \text{ при } x_{ij}^k > 0 \end{aligned} \tag{19}$$

на ненасыщенных дугах $(i,j)^k$; $(i,j)\in U, k\in K, (x_{ij}^1 + x_{ij}^2 < d_{ij})$;

$$\begin{aligned} &\nabla_{ij}^1 = \nabla_{ij}^2 \geq 0 \text{ при } x_{ij}^1 > 0, x_{ij}^2 > 0; \\ &\nabla_{ij}^k \geq \nabla_{ij}^{2/k},\ \Delta_{ij}^k \geq 0 \text{ при } x_{ij}^k = d_{ij}, x_{ij}^{2/k} = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

на ненасыщенных дугах $(i,j)\in U (x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = d_{ij})$ достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного потока $\{x, U_{оп}\}$.

Подсчитаем числа $\beta(x), \beta(U_{оп})$:

$$\beta(x) = \sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^{0k},$$

$$\beta(U_{оп}) = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I} a_i^k u_i^{0k} + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p^0 - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij}^0 -$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I} a_i^k u_i^k - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij}$$

где $\beta(x)$ – мера неоптимальности потока x, $\beta(U_{\text{оп}})$-мера неоптимальности опоры, подсчитанная по сопровождающему опору двойственному плану $\lambda=(u,r,w)$ и число β:

$$\beta=-\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in U}\nabla^{k}_{ij}x^{k}_{ij}-\sum_{(i,j)\in U}(\nabla^{2/k0}_{ij}x^{2/k0}_{ij}+\nabla^{k0}_{ij}(x^{k0}_{ij}-d_{ij})), \tag{21}$$

$$max(\Delta^{k}_{ij}, k\in K;0)=0, \quad max(\Delta^{k}_{ij}, k\in K;0)=\nabla^{k0}_{ij}>0 \quad ;$$

которое назовем оценкой субоптимальности опорного потока $\{x,U_{\text{оп}}\}$.

Теорема 3 (критерий ϵ-оптимальности). Если для опорного потока $\{x,U_{\text{оп}}\}$ выполняется неравенство

$$\beta \le \epsilon \tag{22}$$

то x является субоптимальным (ϵ-оптимальным) потоком. Для каждого ϵ-оптимального потока x^{ϵ} существует такая опора $U^{\epsilon}_{\text{оп}}=(U^{k\epsilon}_{\text{оп}}, k\in K; U^{*\epsilon})$, что для опорного потока $\{x^{\epsilon},U^{\epsilon}_{\text{оп}}\}$ выполняется неравенство (22).

Доказательство. Достаточность. В силу теоремы двойственности линейного программирования значения целевых функций прямой (1)-(4) и двойственной (17),(18) задач совпадают на оптимальном потоке x^{0} и оптимальном двойственном плане $\lambda^{0}(u^{0},r^{0},w^{0})$, $u^{0}=(u^{0k}_{i}, k\in K)$, $i\in I$, $r^{0}=(r^{0}_{p}, p=\overline{1,l})$, $w^{0}=(w^{0}_{ij}, (i,j)\in U)$. Заменяя оптимальное значение целевой функции задачи (1)-(4) оптимальным значением двойственной целевой функции задачи (17),(18), получим

$$\beta=\beta(x,U_{\text{оп}})=\beta(x)+\beta(U_{\text{оп}}), \tag{23}$$

где число $\beta(x)$-мера неоптимальности потока, равная

$$\beta(x)=\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in U}c^{k}_{ij}x^{k}_{ij}-\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in U}c^{k}_{ij}\,x^{0k}_{ij},$$

а число $\beta(U_{\text{оп}})$-мера неоптимальности опоры $U_{\text{оп}}$, равная

$$\beta(U_{\text{оп}})=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}a^{k}_{i}u^{0k}_{i}+\sum_{p=1}^{l}\alpha_{p}r^{0}_{p}-\sum_{(i,j)\in U}d_{ij}w^{0}_{ij}-$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I} a_i^k u_i^k - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij}.$$

Используя разложение (23) и неравенство $\beta(U_{оп}) \geq 0$, устанавливаем справедливость неравенства

$$\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^{0k} \leq \beta,$$

которое и доказывает достаточность.

Необходимость. При доказательстве достаточности было показано, что для оценки ε - оптимальности β справедливо разложение (23). Если для потока x^ε взять опору $U^0_{оп}$, сопровождающую оптимальный двойственный план $\lambda^0 = (u^0, r^0, w^0)$, получим $\beta(U_{оп}) = 0$. Следовательно, $\beta(x, U_{оп}) = \beta(x)$, а это означает, что для опорного потока $\{x^\varepsilon, U^0_{оп}\}$ выполняет неравенство (22). Теорема доказана.

4. Итерация метода. Введем понятие допустимого направления. Вектор $y=(y_{ij}, (i,j)\in U)$; $y_{ij}=(y_{ij}^k, k\in K)$, называется **допустимым направлением** для потока $x=(x_{ij}, (i,j)\in U)$; $x_{ij}=(x^k_{ij}, k\in K)$, если найдется такое число $\theta^0 > 0$, что все векторы $x(\theta) = x+\theta y$, $0 \leq \theta \leq \theta^0$, являются потоками задачи (1)-(4).

Из доказательства критерия оптимальности (теорема 2) следует что для потока x при нарушении соотношений (19),(20) существует такое (подходящее) допустимое направление $y =(y_{ij}, (i,j)\in U)$; $y_{ij}=(y^k_{ij}, k\in K)$, вдоль которого целевая функция убывает. Значит, опорный поток $\{x,U_{оп}\}$ можно заменить на новый опорный поток $\{\bar{x},\bar{U}_{оп}\}$, на котором значение целевой функции меньше, чем на $\{x,U_{оп}\}$.

Совокупность операций по замене опорного потока $\{x,U_{оп}\}$ на другой опорный поток $\{\bar{x},\bar{U}_{оп}\}$ назовем **итерацией** метода и будем обозначать $\{x,U_{оп}\} \longrightarrow \{\bar{x},\bar{U}_{оп}\}$. Опишем итерацию $\{x,U_{оп}\} \longrightarrow \{\bar{x},\bar{U}_{оп}\}$ прямого опорного метода.

Из вида системы (15) следует, что для дуг множества $T = (\bigcup_{k\in K} U^k_{оп})\backslash U^*$ соотношения (19), (20) выполняются. Анализируя формулу (16), выберем из множества $\bar{T} = U\backslash T$

дугу (i_0, j_0) для варьирования потока на текущей итерации.

При нарушении соотношений (19) для насыщенной дуги $(i,j)\in\bar{T}$ отметим число ∇^k_{ij}. В случае нарушения соотношений (20) для насыщенной дуги $(i, j)\in\bar{T}$ помети число $\nabla^k_{ij}-\nabla^{2/k}_{ij}$, если $max(\nabla^k_{ij}, \nabla^{2/k}_{ij})=\nabla^k_{ij}>0$; число ∇^k_{ij}, если $max(\nabla^k_{ij}, \nabla^{2/k}_{ij})=\nabla^k_{ij}<0$, $x^k_{ij}>0$, $k\in K$. Обозначим через v^0 максимальное по модулю число среди отмеченных чисел и пусть оно находится на дуге (i_0, j_0). Возможны случаи: 1) $v^0=\nabla^{k_0}_{i_0j_0}$, $(i_0, j_0)\bar{\in}U^*$;

2) $v^0=\nabla^{k_0}_{i_0j_0}$, $(i_0, j_0)\in U^*$;

3) $v^0=\nabla^{k_0}_{i_0j_0}-\nabla^{2/k_0}_{i_0j_0}$, $\nabla^{k_0}_{i_0j_0}=max(\nabla^{k_0}_{i_0j_0}, k\in K)$, $\nabla^{k_0}_{i_0j_0}>0$.

Рассмотрим случай 1): $v^0=\nabla^{k_0}_{i_0j_0}$, $(i_0, j_0)\bar{\in}U^*$, $k^0\in K$.

З а м е н а п о т о к а. Найдем числа $(y^k_{ij}, (i,j)^k\in U^k_{On}, k\in K;\ y^{k_0}_{i_0j_0})$, удовлетворяющие системе (5)-(7), записанной относительно множества $\tilde{U}=\left\{U^{k_0}_{On}\cup(i_0,j_0)^{k_0}, U^{2/k_0}_{On}, U^*\right\}$, и условию $y^{k_0}_{i_0j_0}=sign\nabla^{k_0}_{i_0j_0}$. Приведем способ решения полученной системы.

Рассмотрим цикл $L^{k_0}_0$, составленный из дуг дерева $U^{k_0}_D$ и неопорной дуги $(i_0,j_0)^{k_0}$. Составим вектор $\varphi=\left\{\varphi_p, p=\overline{1,l}; \varphi_{ij}, (i,j)\in U^*\right\}$: $\varphi_p=-R_p(L^{k_0}_0)sign\nabla^{k_0}_{i_0j_0}$, $p=\overline{1,l}$, $\varphi_{ij}=-\Phi_{ij}sign\nabla^{k_0}_{i_0j_0}$, где

$$
\varphi_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } (i_0,j_0)^{k_0}\in U^{*}\cap L^{k_0} \text{ и направления дуг } (i,j)^{k_0} \text{ и} \\ \quad (i_0,j_0)^{k_0} \text{ совпадают;} \\ -1, \text{ если } (i_0,j_0)^{k_0}\in U^{*}\cap L^{k_0} \text{ и направления дуг } (i,j)^{k_0} \text{ и} \\ \quad (i_0,j_0)^{k_0} \text{ противоположны;} \\ 0, \text{ если } (i,j)^{k_0}\bar{\in} U^{*}\cap L^{k_0}. \end{cases}
$$

По лемме I и в силу невырожденности матрицы D вектор $h=(h_t,\ t=\overline{1,\tilde{t}})$, $h_t=(y^k_{ij},(i,j)^k\in U^k_a)$, $k=1,t\leqslant l_1$; $k=2,t>l_1$, $\tilde{t}=\sum\limits_{k\in K} l_k$, однозначно найдем из уравнения

$$
Dh=\varphi \tag{24}
$$

Компоненты вектора $y(U^k_D)=(y^k_{ij},\ (i,j)^k\in U^k_D)$, соответствующие дугам дерева U^k_D, вычислим из условий баланса, $k\in K$.

Новый поток $\bar{x}$ строим в виде $\bar{x}^k_{ij}=x^k_{ij}+\theta_0 y^k_{ij}$, $(i,j)^k\in U^k_{0n}$, $k\in K$; $\bar{x}^{k_0}_{i_0j_0}=x^{k_0}_{i_0j_0}+\theta_0\, y^{k_0}_{i_0j_0}$; $\bar{x}^k_{ij}=x^k_{ij}$, $(i,j)^k\in U^k\setminus U^k_{0n}$, $k\in K$, где θ_0 – максимально допустимый шаг, равный

$$
\theta_0=\min\left\{\theta^{p_0}_{i_1j_1},\ \theta_{i_2j_2}\right\},\ \theta^{p_0}_{i_1j_1}=\min\theta^k_{ij},\ (i,j)^k\in Q_1,
$$

$$
Q_1=\left[U^{k_0}_{0n}\cup(i_0,j_0)^{k_0}\right]\cup U^{2/k_0}_{0n},
$$

$$
\theta_{i_2j_2}=\min\theta_{ij},\ (i,j)\in Q_2;\ Q_2=\left[U^1_{0n}\cap U^2_{0n}\right]\cup U^k_{0nH0},\ k\in K,
$$

$$
\left[U^1_{0n}\cap U^2_{0n}\right]\cup U^k_{0nH},\ k\in K;
$$

$$
U^k_{0nH}=\left\{(i,j)\in U:(i,j)^k\in U^k_{0n},\ (i,j)^{2/k}\in U^{2/k}_{0n}\right\};
$$

$$
\theta^k_{ij}=-x^k_{ij}/y^k_{ij},\ \text{если } y^k_{ij}<0;
$$

$$
\theta^k_{ij}=\infty,\ \text{если } y^k_{ij}\geqslant 0;\ \theta_{ij}=(d_{ij}-\sum_{k\in K}x^k_{ij})/\sum_{k\in K}y^k_{ij} \text{ если}
$$

$$
\sum_{k\in K}y^k_{ij}>0
$$

Из формулы (16) следует, что при переходе к потоку $\bar{x}$ стоимость потока уменьшилась на величину $\theta_0|\nabla^{k_0}_{i_0j_0}|$. Если для потока $\bar{x}$ условие ε - оптимальности (теорема 3) выполняется, то $\bar{x}$ является ε - оптимальным потоком задачи (1)-(4). В противном случае перейдем к замене опоры.

Замена опоры. Пусть шаг θ_0 достигается на дуге $(i_*,j_*)\neq(i_0,j_0)$. Дугу $(i_0,j_0)^{k_0}$ вводим в множество $U^{k_0}_{On}$. На дуге (i_*,j_*) возможны ситуации: 1) дуговой поток $\bar{x}^{p_0}_{i_*j_*}$ стал нулевым; 2) дуга (i_*,j_*) стала насыщенной $\left[(i_*,j_*)\bar{\in}U^*\right]$.

Дальнейшее изменение состава опорного множества U_{On} проводим по правилам:

а). Из множества $U^{p_0}_{On}$ выводим дугу $(i_*,j_*)^{p_0}$, если $\bar{x}^{p_0}_{i_*j_*}=0$, $(i_*,\ j_*)\bar{\in}U^*$;

б). Из множества U^1_{On}, U^2_{On}, U^* выводим дуги $(i_*,\ j_*)^1$, $(i_*,j_*)^2$, (i_*,j_*) соответственно, если $\bar{x}^{p_0}_{i_*j_*}=0$, $(i_*,j_*)\in U^*$;

в). Дугу (i_*,j_*) вводим в множество U^*, если $\bar{x}^1_{i_*j_*}+\bar{x}^2_{i_*j_*}=$

$$=d_{i_*j_*},\ (i_*,j_*)^k\in U^k_{On},\ k=1,2; \tag{26}$$

г). Дугу $(i_*,j_*)^k$ выводим из опоры, если $\sum\limits_{k\in K}\bar{x}^k_{i_*j_*}=$ $=d_{i_*j_*}$, $(i_*,j_*)^k\in U^k_{On}$, $(i_*,j_*)^{2/k}\in U^{2/k}_{On}$.

Рассмотрим случай 2): $v^0=\nabla^{k_0}_{i_0j_0}$, $(i_0,\ j_0)\in U^*$. Замена потока. Найдем числа $\left\{y^k_{ij},\ (i,j)^k\in U^k_{On},\ k\in K\right\}$, удовлетворяющие системе (5)-(7), записанной относительно множества

$\tilde U=\left\{U^k_{On},\ k\in K;\ U^*\setminus(i_O,\ j_O)\right\}$, и условию $y^1_{i_O\ j_O}+y^2_{i_O\ j_O}=-1$. Положим $\varphi_p=0,\ p=\overline{1,l};\ \varphi_{ij}=0,\ (i,j)\in U^*\setminus(i_O,\ j_O);\ \varphi_{i_Oj_O}=-1$. Из уравнени: (24) однозначно вычислим вектор $h=(h\ ,\ t=\overline{1,\bar t})$. Компоненты вектора $y(U^k_D)=\left\{y^k_{ij},\ (i,j)^k\in U^k_D,\ k\in K\right\}$ вычислим из условий баланса. Построим множество $Q_1=\cup_{k\in K} U^k_{On}$. Новый поток $\bar x$ строим в виде $\bar x^k_{ij}=x^k_{ij}+\theta_O y^k_{ij},\ (i,j)^k\in U^k_{On},\ \ \bar x^k_{ij}=x^k_{ij},\ (i,j)^k\bar\in U^k_{On},\ k\in K$, где θ_O - максимально допустимый шаг, вычисленный по формулам (25). Легко видеть, что при переходе к $\bar x$ стоимость потока уменьшилась на величину $\theta_O|\nabla^{k_O}_{i_Oj_O}|$. З а м е н а о п о р ы. Пусть шаг θ_O - достигнут на дуге $(i_*,j_*)\neq(i_O,j_O)$. Опору меняем следующим образом: дугу (i_O,j_O) выводим из множества U^*, с дугой (i_*,j_*) поступаем согласно правил (26).

Рассмотрим случай 3): $v^O=\nabla^{k_O}_{i_Oj_O}-\nabla^{2/k_O}_{i_Oj_O},\ \ \nabla^{k_O}_{i_Oj_O}=max(\nabla^{k_O}_{i_Oj_O},\ k\in K),\ \nabla^{k_O}_{i_Oj_O}>0$. З а м е н а п о т о к а. Найдем числа $\left\{y^k_{ij},\ (i,j)^k\in U^k_{On},\ k\in K;\ y^1_{i_Oj_O},\ y^2_{i_Oj_O}\right\}$, удовлетворяющие условиям $y^{k_O}_{i_Oj_O}=sign v^O,\ y^{2/k_O}_{i_Oj_O}=-sign v^O$, и системе (5)-(7), записанной относительно множества $\tilde U=\left\{U^k_{On}\cup(i_O,\ j_O)^k,\ k\in K\right\}$. Укажем способ решения полученной системы. Числа y^k_{ij} можно представить в виде суммы $y^k_{ij}=y^k_{ij(1)}+y^k_{ij(2)}$, где $\left\{y^k_{ij(1)},\ (i,j)^k\in U^k_{On},\ k\in K;\ y^{k_O}_{i_Oj_O(1)}\right\}$ - решение системы (5)-(7) на множестве $\tilde U=\left\{U^{k_O}_{On}\cup\right.$ $\left.\cup(i_O,\ j_O)^{k_O},U^{2/k_O}_{On},\ U^*\right\}$ при условии $y^{k_O}_{i_Oj_O}=sign v^O$; $\left\{y^k_{ij(2)},\right.$

$(i,j)^k \in U^k_{on}$, $k \in K$; $y^{2/k_0}_{i_0 j_0 (2)}\Big]$ – решение системы (5)-(7) на множестве $U=\left\{U^{k_0}_{On},\ U^{2/k_0}_{On} \cup (i_0,\ j_0)^{2/k_0},\ U^*\right\}$ при условии $y^{2/k_0}_{i_0 j_0 (2)}=-\mathrm{sign}\, v^0$. метод решения таких систем описан выше (см. случай I)). Построим множество $Q_1=\bigcup_{k\in K}\left\{U^k_{On} \cup (i_0, j_0)^k\right\}$. Новый поток $\bar{x}$ строим в виде: $\bar{x}^k_{ij}=x^k_{ij}+\theta_0 y^k_{ij}$, $(i,j)^k \in Q_1$, $\bar{x}^k_{ij}=x^k_{ij}$, $(i,j)^k \bar{\in} U^k_{On} \cup (i_0, j_0)^k$, $k \in K$, где θ_0 – максимально допустимый шаг, вычисленный по формулам (25). Из (I6) следует, что при переходе к новому потоку $\bar{x}$ стоимость потока уменьшилась на величину $\theta_0 |v^0|$. $v^0=\nabla^{k_0}_{i_0 j_0} - \nabla^{2/k_0}_{i_0 j_0}$. З а м е н а о п о р ы. Осуществим процедуру замены для случая $(i_*, j_*) \neq (i_0, j_0)$, где (i_*, j_*) – дуга, на которой достигается шаг θ_0. В множества U^1_{on}, U^2_{on}, U^* вводим дуги $(i_0,j_0)^1$, $(i_0,j_0)^2$, (i_0,j_0) соответственно. С дугой (i_*, j_*) поступаем согласно правил (26).

Рассмотрим ситуацию, когда $(i_*, j_*)=(i_0, j_0)$. В этом случае осуществим следующую замену опоры:

а) дугу $(i_0,j_0)^{2/k}$ вводим в множество $U^{2/k}_{On}$, дугу (i_0,j_0) вводим в U^*, если $x^1_{i_0 j_0}+x^2_{i_0 j_0} < d_{i_0 j_0}$, $(i_0,\ j_0)^k \in U^k_{On}$, $(i_0,\ j_0)^{2/k} \notin U^{2/k}_{On}$, $\bar{x}^1_{i_0 j_0}+\bar{x}^2_{i_0 j_0}=d_{i_0 j_0}$;

б) дугу $(i_0,j_0)^k$ выводим из множества U^k_{On}, дугу $(i_0,j_0)^{2/k}$ вводим в множество $U^{2/k}_{On}$, если $x^1_{i_0 j_0}+x^2_{i_0 j_0} < d_{i_0 j_0}$, $(i_0,j_0)^k \in U^k_{On}$, $(i_0,j_0)^{2/k} \bar{\in} U^{2/k}_{On}$, $\bar{x}^k_{i_0 j_0}=0$;

в) дуги $(i_0,j_0)^{p_0}$, (i_0,j_0) выводим из множеств $U^{p_0}_{On}$, U^*

соответственно, если $(i_0,j_0)\in U^*$, $\bar{x}^{p_0}_{i_0 j_0}=0$;

г) в остальных случаях опора не меняется.

5. Пересчет обратной матрицы. При замене опоры могут встретиться различные случаи изменения рабочей опорной матрицы D и заключительным этапом итерации $\left\{x,\ U_{On}\right\}\to\left\{\bar{x},\ \bar{U}_{On}\right\}$ является процедура получения новой обратной матрицы $\bar{D}^{-1}$.

Под элементарным преобразованием элементов обратной матрицы D^{-1} будем понимать рекуррентные соотношения, связывающие элементы матриц D^{-1} и $\tilde{D}^{-1}$ и полученные в результате следующих случаев:

1) $rank\ \tilde{D}=rank\ D$;

2) окаймление матрицы: $rank\ \tilde{D}=rank\ D+1$;

3) усечение матрицы: $rank\ \tilde{D}=rank\ D-1$.

Полный переход от D^{-1} к $\bar{D}^{-1}$ может быть получен путем комбинации элементарных преобразований в определенном порядке.

Введем следующие обозначения $D^{-1}=\left\{v_{pq},\ p=\overline{1,t},\ q=\overline{1,t}\right\}$; $\tilde{D}^{-1}=\left\{\tilde{v}_{pq},\ p=\overline{1,t},\ q=\overline{1,t}\right\}$; $\left(i_0,j_0\right)^{k_0}$ – дуга, вводимая в опору U_{On}; $\left(i_*,j_*\right)^{l_0}$ – дуга, выводимая из опоры $L^{k_0}_{i_0 j_0}$ – цикл, соответствующий дуге $\left(i_0,j_0\right)^{k_0}$.

Рассмотрим случай 1). Возможны подслучаи:

а) $(i_0,j_0)\in U^*$, $(i_*,j_*)\in U^*$. Элементы опорного множества преобразуем по правилам: $\tilde{U}^k_a=U^k_a$, $\tilde{U}^k_D=U^k_D$, $k\in K$; $\tilde{U}^*=(U^*\setminus(i_*,j_*))\cup$ $\cup(i_0,j_0)^*$. Можно убедиться, что элементы матрицы $\tilde{D}^{-1}$ вычисляются по формулам:

$$\tilde{v}_{pq}=v_{pq}-\varkappa_{i_q j_q}/\varkappa_{i_\mu j_\mu}v_{p\mu},\ q\neq\mu,\ q=\overline{1,t};$$

$$\tilde{v}_{p\mu}=v_{p\mu}/\varkappa_{i_\mu j_\mu},\ p=\overline{1,t};\ \varkappa'=b'D^{-1},\ b'=(\sigma^{(L^k_1)}_{\tau(i_0,j_0)},\dots,\sigma_{\tau(i_0,j_0)}$$

$(L^k_t))$, μ – номер заменяемой строки, $\mu > l$.

б) $(i_*,j_*)^{l_0} \in U_a^{l_0}$. Элементы опоры преобразуются по правилим $\tilde U_a = (U_a \setminus (i_*,j_*)^{l_0}) \cup (i_0,j_0)^{k_0}$; $\tilde U^k_D = U^k_D$, $k \in K$; $\tilde U^* = U^*$. Поскольку во множестве циклов $Z = \left\{L^k_t,\ t=\overline{1,\bar t}\right\}$, $k = \begin{cases} 1, t \le l_1 \\ 2, t > l_1 \end{cases}$, цикл $L^{l_0}_{i_*j_*}$ заменяется на $L^{k_0}_{i_0j_0}$, то матрицы D и $\tilde D$ отличаются одним столбцом, номер которого обозначим через μ. Легко получить элементы матрицы $\tilde D^{-1}$:

$$\tilde v_{\mu t} = \frac{\mathrm{sign} v^{k_0}_{i_0j_0} v_{\mu t}}{h^{l_0}_{i_*j_*}},\quad t=\overline{1,\bar t};\quad \tilde v_{qt} = v_{qt} - \frac{h^k_q}{h^{l_0}_{i_*j_*}} v_{\mu t},\quad q=\overline{1,\bar t},$$

$$q \ne \mu,\quad t=\overline{1,\bar t}, \tag{27}$$

$$k = \begin{cases} 1, & \text{если } t \le l_1, \\ 2, & \text{если } t > l_1. \end{cases}$$

в) $(i_*,j_*)^{l_0} \in U_D^{l_0}$, $(i_*,j_*)^{l_0} \in L^{k_0}_{i_0j_0}$, $(i_*,j_*)^{l_0} \in Z$. Очевидно, что $l_0 = k_0$; $\tilde U_{On} = U_{On}$, т.к. дуга $(i_*,j_*)^{l_0}$ не входит в состав множества циклов Z. Следовательно, $\tilde D = D$, а значит, и $\tilde D^{-1} = D^{-1}$.

г) $(i_*,j_*)^{l_0} \in U_D^{l_0}$, $(i_*,j_*)^{l_0} \in L^{k_0}_{i_0j_0}$, $(i_*,j_*)^{l_0} \in Z$. Очевидно, что $l_0 = k_0$. Без ограничения общности положим $l_0 = 1$. Пусть дуга $(i_*,j_*)^1$ входит в первые r циклов, L^1_z, $z=\overline{1,r}$, $r \le l_1$. Следовательно, матрицы D и $\tilde D$ различаются первыми r столбцами. Опору меняем следующим образом: $\tilde U_D^{l_0} = (U_D^{l_0} \setminus (i_*,j_*)^{l_0}) \cup (i_0,j_0)^{k_0}$. $\tilde U_D^{2/l_0} = U_D^{2/l_0}$, $\tilde U^* = U^*$, $\tilde U^k_a = U^k_a$, $k \in K$. Для циклов $\left\{\tilde L^1_z,\ z=\overline{1,r}\right\}$, построенных по новому дереву $\tilde U^1_D = \left\{I,\ \tilde U^1_{On}\right\}$ справедливы соотношения

$$R_p(\tilde L^1_z) = R_p(L^1_z) + R_p(L^1_{i_0j_0})\,\mathrm{sign}(i_0,j_0)^{\tilde L^1_z},\quad p=\overline{1,l};$$

$$\sigma_{\tau(i,j)}(\widetilde{L}^1_z)=\sigma_{\tau(i,j)}(L^1_z)+\sigma_{\tau(i,j)}(L^1_{i_0 j_0})sign(i_0,j_0)^{\widetilde{L}^1_z},$$
$$(i,j)\in U^*,\ z=\overline{1,r} \tag{28}$$

Найдем из (28) величины $R_p(L^1_z)$, $\sigma_{\tau(i,j)}(L^1_z)$, подставим их в (24) получим:

$$\sum_{z=1}^{r} R_p(\widetilde{L}^1_z)h^1_z+\sum_{z=r+1}^{t} R_p(L^k_z)h^k_z=-R_p(L^1_{i_0 j_0})T,\ p=\overline{1,l};$$
$$\sum_{z=1}^{r} \sigma_{\tau(i,j)}(\widetilde{L}^1_z)\ h^1_z+\sum_{z=r+1}^{t} \sigma_{\tau(i,j)}(L^k_z)h^k_z=-\sigma_{\tau(i,j)}(L^1_{i_0 j_0})T,$$
$$(i,j)\in U^*, \tag{29}$$

где $T=sign\nabla^1_{i_0 j_0}-\sum_{z=1}^{r} h^1_z\ sign(i_0,j_0)^{\widetilde{L}^1_z}$. С учетом равенств

$$sign(i_0,j_0)^{\widetilde{L}^1_z}=-sign(i_*,j_*)^{L^1_{i_0 j_0}}sign(i_*,j_*)^{L^1_z},\ sign\nabla^1_{i_0 j_0}=h^1_{i_0 j_0},$$

выражение T может быть преобразовано к виду

$$T=sign\nabla^1_{i_0 j_0}+\sum_{z=1}^{r} h^1_z sign(i_*,j_*)^{L^1_{i_0 j_0}}sign(i_*,j_*)^{L^1_z}=$$
$$=sign(i_*,j_*)^{L^1_{i_0 j_0}}h^1_{i_* j_*}.$$

Учитывая, что $T\neq 0$ и используя (28), (29), первые l уравнений системы $DD^{-1}=E$ приведем к виду

$$\sum_{z=1}^{r} R_p(\widetilde{L}^1_z)+\Big\{1/T\Big[\sum_{z=1}^{r} R_p(\widetilde{L}^1_z)h^1_z+\sum_{z=r+1}^{\widetilde{t}} R_p(L^k_z)h^k_z\Big]\Big]sign(i_0,j_0)^{\widetilde{L}^1_z}\Big\}\nu_{zp}+$$
$$+\sum_{z=r+1}^{\widetilde{t}} R_p(L^k_z)\nu_{zp}=\sum_{z=1}^{r} R_p(\widetilde{L}^1_z)-sign(i_*,j_*)^{L^1_z}/h^1_{i_* j_*}\times\Big[\sum_{z=1}^{r} R_p(\widetilde{L}^1_z)h^1_z+$$
$$+\sum_{z=r+1}^{\widetilde{t}} R_p(L^k_z)h^k_z\Big]\Big]\nu_{zp}+\sum_{z=r+1}^{\widetilde{t}} R_p(L^k_z)\nu_{zp}=\sum_{z=1}^{r} R_p(\widetilde{L}^1_z)\Big[\nu_{zp}-h^1_z T_p/h^1_{i_* j_*}\Big]+$$

$+\sum_{z=r+1}^{\widetilde{t}} R_p(L_z^k)\left[v_{zp}-h_z^k T_p/h^1_{i_*j_*}\right]=e_p$, $p=\overline{1,l}$, где e_p – единичный l -вектор, $T_p=\sum_{z=1}^{r} v_{zp}\, sign(i_*,j_*)^{L_z^1}$. Рассуждая аналогично, преобразуем остальные $|u^*|$ уравнений системы $DD^{-1}=E$ и сравним результаты с системой $\widetilde{D}\widetilde{D}^{-1}=E$:

$$\widetilde{v}_{pq}=v_{pq}-h_q^k T_p/y^{l_0}_{i_*j_*},\ T_p=\sum_{z=1}^{r} v_{zp}\, sign(i_*,j_*)^{L_z^{l_0}},\ q=\overline{1,\widetilde{t}},\ p=\overline{1,\widetilde{t}}.$$

д) $(i_*,j_*)^{l_0}\in U_D^{l_0}$, $(i_*,j_*)^{l_0}\in L^{l_0}_{i_0 j_0}$. Нетрудно убедиться, что $(i_*,j_*)^{l_0}\in Z$. Процедуру вывода дуги $(i_*,j_*)^{l_0}$ из множества $U_D^{l_0}$ проведем в два этапа. На первом этапе опора преобразуется следующим образом: $\widetilde{\widetilde{U}}_a=\left[U_a\setminus(\tau,\rho)^{l_0}\right]\cup(i_*,j_*)^{k_0}$, $\widetilde{\widetilde{U}}_D^{l_0}=\left[U_D^{l_0}\setminus(i_*,j_*)^{l_0}\right]\cup$ $\cup(\tau,\rho)^{l_0}$, $(\tau,\rho)^{l_0}\in U_a^{l_0}$ и $(i_*,j_*)^{l_0}\cap L^{l_0}_{\tau\rho}\neq\emptyset$, $\widetilde{\widetilde{U}}_D^{2/l_0}=U_D^{2/l_0}$, $\widetilde{\widetilde{U}}^*=U^*$. Элементы матрицы $\widetilde{\widetilde{D}}^{-1}=\left\{v_{pq},\ q=\overline{1,t},\ p=\overline{1,t}\right\}$ (результат первого этапа) вычислим по формулам $\widetilde{\widetilde{v}}_{\mu p}=\sum_{z=1}^{r} v_{zp}\, sign(i_*,j_*)^{L_z^1}$, μ-номер строки матрицы, равный порядковому номеру цикла $L^{l_0}_{\tau\rho}(i_*,j_*)^{L_0}\cap$ $\cap L^{l_0}_{\tau\rho}\neq\emptyset$. На 2-ом этапе опора преобразуется по правилам: $\widetilde{U}_a=\left[\widetilde{\widetilde{U}}_a\setminus(i_*,j_*)^{l_0}\right]\cup(i_0,j_0)^{k_0}$, $\widetilde{U}_D^k=\widetilde{\widetilde{U}}_D^k$. . Для перехода $\widetilde{\widetilde{D}}^{-1}\to\widetilde{D}^{-1}$ воспользуемся формулами (27).

Рассмотрим случай 2): $rank\ \widetilde{D}=rank\ D+1$. Пусть $(i_*,j_*)^{l_0}$, (i_0,j_0) – дуги, вводимые в множества $U_a^{l_0}$, U^* соответственно. Для вычисления элементов матрицы $\widetilde{D}^{-1}$ воспользовавшись методом окаймления, получим следующие рекуррентные формулы:

$$\tilde{v}_{\tilde{t}+1,\tilde{t}+1}=h^{l_O}_{i_*j_*}/M;\quad \tilde{v}_{q,\tilde{t}+1}=h^k_q/M;$$

$$\tilde{v}_{\tilde{t}+1,p}=-A_p h^{l_O}_{i_*j_*}/M;\quad \tilde{v}_{q,p}=v_{q,p}-h^k_q A_p/M,\quad q=\overline{1,\tilde{t}},\quad p=\overline{1,\tilde{t}},$$ где

$$A_p=\sum_{z=1}^{\tilde{t}}\sigma_{\tau(i_O,j_O)}(L^k_z)v_{zp},\quad p=\overline{1,\tilde{t}};$$

$$M=\sigma_{\tau(i_O,j_O)}\left[L^{l_O}_{i_*j_*}\right]h^{l_O}_{i_*j_*}+\sum_{z=r+1}^{\tilde{t}}\sigma_{\tau(i_O,j_O)}(L^k_z)h^k_z,$$

$k=\begin{cases}1, & \text{если } t\leqslant l_1,\\ 2, & \text{если } t>l_1.\end{cases}$

Рассмотрим, наконец, случай 3). Возможны подслучаи:

а) $(i_*,j_*)^{l_O}\in U^{l_O}_a$, $(i_O,j_O)\in U^*$. Обозначим через η и μ номера столбца и строки матрицы D, соответствующие циклу $L^{l_O}_{i_*j_*}$ и элементу $(i_O,j_O)\in U^*$. Элементы опоры меняем согласно правилам: $\tilde{U}^{l_O}_a=U^{l_O}_a\setminus(i_*,j_*)^{l_O}$, $\tilde{U}^{2/l_O}_a=U^{2/l_O}_a$, $\tilde{U}^k_D=U^k_D$, $k\in K$, $\tilde{U}^*=U^*\setminus(i_O,j_O)$. Форсмулы, связывающие элементы матриц $\tilde{D}^{-1}$ и D^{-1}, имеют вид:

$$\tilde{v}_{pq}=v_{pq}-h^k_q/h^{l_O}_\mu v_{\mu p},\quad q=\overline{1,\tilde{t}},q\neq\mu,\quad p=\overline{1,\tilde{t}};p=\eta.$$

б) $(i_*,j_*)^{l_O}\in U^{l_O}_D$, $(i_O,j_O)\in U^*$. Воспользуемся той же схемой получения элементов матрицы $\tilde{\tilde{D}}$, что и в случае a (I этап). Теперь можно воспользоваться формулами, выведенными в случае а) (для ситуации уменьшения (усечения) матрицы).

6. <u>О конечности метода.</u>

<u>Теорема 4.</u> Пусть в процессе решения задачи (I)-(4) вырожденный двухпродуктовый поток встречается конечное число раз. Тогда с помощью описанного прямого точного релаксационного метода оптимальный поток x^O получается за

конечное число итераций.

Доказательство. При описании итерации метода было показано, что значение целевой функции задачи (I)-(4) убывает на величину $e_0|v^0|$. Для невырожденного потока величина $e_0|v^0|$ строго положительна. В вырожденном случае шаг e_0 может быть равен нулю. А поскольку вырожденный поток встречается конечное число раз, то целевая функция является монотонно невозрастающей. Следовательно, ни один опорный поток не может повториться бесконечное число раз. Процесс решения задачи закончится либо на опорном потоке, либо приведет к базисному потоку. Конечность метода в этом случае следует из конечности симплекс метода для невырожденных базисных потоков. Теорема доказана.

Литература

I. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования. ч.2. Транспортные задачи. -Мн.: Изд-во БГУ, 1978.-239 с.

2. Ермольев Ю.М., Мельник И.М. Экстремальные задачи на графах и сетях.- Киев, Наукова думка; 1968.- 176 с.

3. Харари Ф. Теория графов.- М.: Мир, 1973.- 302 с., ил.

220080 г. Минск
Проспект Ф. Скорины, 4
Белгосуниверситет,
факультет прикладной математики и информатики