О РЕШЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЛАГРАНЖИАНОМ

М. И. Тлеубергенов, Д. Т. Ажымбаев (Алматы, Казахстан)
marat207@mil.ru

По заданному стохастическому уравнению Ито первого порядка строится эквивалентное стохастическое уравнение лагранжевой структуры. Строится линейная по скоростям функция Лагранжа. Приводятся иллюстрирующие примеры построения систем стохастических уравнений с вырожденным лагранжианом.

1. Постановка стохастической задачи Гельмгольца. Классическая задача Гельмгольца [1] – это задача построения по заданным уравнениям движения механической системы в форме Ньютона эквивалентных уравнений движения в форме Лагранжа. И уравнения, для которых такой переход возможен, называются системами Гельмгольца. В работах Майера [2] и Суслова [3] независимо друг от друга показано, что классические условия Гельмгольца являются не только необходимыми, но и достаточными условиями перехода от ньютоновых уравнений к лагранжевым.

С результатами по дальнейшему исследованию задачи Гельмгольца можно ознакомиться по работам [4, 5, 6], в которых наряду с собственными исследованиями, в основном, в классе ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений) и ДУЧП(дифференциальных уравнений с частными производными) приводится исторический обзор по развитию и обобщению указанной задачи.

Решение задачи Гельмгольца в том или ином классе дифференциальных уравнений позволяет распространить на этот класс уравнений хорошо развитые математические методы классической механики.

Особое место по разнообразию аспектов исследования задачи Гельмгольца и полноте изложения материала занимает двухтомная монография Р.М. Сантилли [4, 5], посвященная задаче представления обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в виде уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа. В монографии А.С. Галиуллина [7] рассматривается обобщение гамильтоновых систем в смысле приводимости уравнений движения неконсервативных механических систем к классическим уравнениям динамики, и решается, в частности, задача гамильтонизации уравнений систем программного движения.

Задачу Гельмгольца в классе стохастических уравнений условно можно разбить на две взаимосвязанные подзадачи: **задачу 1** – по заданному стохастическому дифференциальному уравнению Ито второго порядка требуется построить эквивалентное ему стохастическое уравнение лагранжевой (гамильтоновой или биркгофиановой) структуры; и **задачу 2** – построить функционал, принимающий стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения лагранжевой структуры.

Вопросам разрешимости стохастической задачи 1 с невырожденным лагранжианом посвящены работы [8–16].

Пусть заданы уравнения

$$d\dot{y} = Y_1(y, \dot{y}, t)dt + Y_2(y, \dot{y}, t)d\xi, \tag{a}$$

$$d\dot{z} = Z_1(z, \dot{z}, t)dt + Z_2(z, \dot{z}, t)d\xi. \tag{b}$$

Определение 1. Будем говорить, что уравнения (a) и (b) эквивалентны п. н., если из $y(t_0) = z(t_0)$, $\dot{y}(t_0) = \dot{z}(t_0)$ п. н. следует $y(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = = z(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$, $\dot{y}(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = \dot{z}(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ п. н. при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 2. Будем говорить, что уравнения (a) и (b) *d-эквивалентны* (или *эквивалентны по распределению*), если для $(y(t_0)^T,$ $\dot{y}(t_0)^T)^T$ и $(z(t_0)^T, \dot{z}(t_0)^T)^T$ с одинаковыми начальными распределениями на R^{2n} совпадают законы распределения процессов $(y(t)^T, \dot{y}(t)^T)^T$ и $(z(t)^T, \dot{z}(t)^T)^T$ в пространстве $W^{2n} = C([0, \infty) \to \mathbb{R}^{2n})$.

Определение 3. Будем говорить, что уравнения (a) и (b) *эквивалентны в среднем*, если из $My(t_0) = Mz(t_0)$, $M\dot{y}(t_0) = M\dot{z}(t_0)$ следует $My(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = Mz(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$, $M\dot{y}(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = M\dot{z}(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 4. Будем говорить, что уравнения (a) и (b) *эквивалентны в среднем квадратическом*, если из $My^2(t_0) = Mz^2(t_0)$, $M\dot{y}^2(t_0) = M\dot{z}^2(t_0)$ следует $My^2(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = Mz^2(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$, $M\dot{y}^2(t,$ $t_0, y_0, \dot{y}_0) = M\dot{z}^2(t, t_0, z_0, \dot{z}_0)$ при всех $t \geqslant t_0$.

В [8] по заданным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся эквивалентные в смысле почти наверное (п. н.) стохастические уравнения лагранжевой структуры. Определяются условия прямого и непрямого аналитического представления лагранжиана при наличии случайных возмущений. В [9] получены необходимые и достаточные условия для построения по заданному уравнению Ланжевена–

Ито или Ланжевена–Стратоновича эквивалентного в смысле п. н. уравнения лагранжевой структуры. Приводятся примеры на построение стохастического уравнения лагранжевой структуры, иллюстрирующие тот факт, что коэффициент при белом шуме играет существенную роль при построении функции Лагранжа по заданным стохастическим дифференциальным уравнениям типа Ито второго порядка. Работа [10] посвящена разрешению стохастической задачи Гельмгольца методом дополнительных переменных. И, в частности, методом Шульгина стохастические уравнения Ито второго порядка приводятся к стохастическим уравнениям лагранжевой структуры и соответственно стохастические уравнения Ито первого порядка методом Лиувилля – к эквивалентным стохастическим уравнениям канонической структуры. В работе [11] анализ разрешимости задачи Гельмгольца в отличие от [8-10], где эквивалентность уравнений понимается в смысле определения 1 об эквивалентности п. н., проводится в классе d-эквивалентных уравнений в смысле определения 2.

По заданным стохастическим уравнениям Ито второго порядка в [11] строятся стохастические уравнения лагранжевой структуры с использованием методов преобразования фазового пространства по скоростям, абсолютно непрерывного преобразования меры и случайной замены времени.

Если в работах [8–10] задача Гельмгольца исследуется в классе стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка и эквивалентность уравнений понимается в смысле эквивалентности почти наверное (п.н.), а в [11] – в смысле эквивалентности по распределению, то в [12] анализ разрешимости стохастической задачи Гельмгольца в отличие от работ [8–11] понимается, во-первых, в смысле эквивалентности уравнений в среднем и среднем квадратическом и, во-вторых, рассматривается линейная постановка задачи.

Суть метода моментных функций заключается в том, что он сводит исследование стохастического уравнения к системе ОДУ относительно рассматриваемых моментов.

В работе [12] стохастическая задача Гельмгольца исследуется в смысле определений 3 и 4. А именно, по заданным линейным стохастическим уравнениям Ито второго порядка строятся уравнения лагранжевой структуры как в пространстве моментных функций первого порядка, так и в пространстве моментных функций второго порядка. В рассматриваемых пространствах получены необходимые и достаточные условия прямого и косвенного представления лагранжиана.

В работе [13] решается задача представления уравнения Ито второго порядка в виде уравнения с заданной структурой сил. Определяются условия, при которых заданная система стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка представима в виде стохастических уравнений Лагранжа с непотенциальными силами определенной структуры.

Стохастическая задача Гельмгольца для систем Биркгофа рассматривается в работе [14], где по заданному стохастическому уравнению Ланжевена–Ито в непрямом представлении строится как уравнение гамильтоновой структуры, так и уравнение биркгофиановой структуры. Методом моментных функций определяется функционал, принимающий стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения Биркгофа, в форме усредненного действия по Биркгофу. В [15] задача Гельмгольца рассматривается при дополнительном предположении, что на неголономную механическую систему помимо непотенциальных сил действуют также случайные возмущающие силы типа белого шума. По заданной стохастической системе строится в прямом и косвенном представлении эквивалентное почти наверное (п. н.) уравнение лагранжевой структуры в предположении, что на исходную систему наложены неголономные связи. Прямая задача Гельмгольца исследуется в классе как систем Чаплыгина, так и систем Воронца. Приводится вывод необходимых и достаточных условий косвенного представления стохастического уравнения Воронца в форме уравнения лагранжевой структуры. Полученные в [8–15] результаты по решению задачи 1 иллюстрируются на конкретных примерах.

В работе [16] в предположении невырожденности лагранжиана исследуется задача 2 (вторая часть стохастической задачи Гельмгольца)–задача построения функционала, принимающего стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения лагранжевой структуры, или, что эквивалентно, задача распространения принципа Гамильтона на класс натуральных механических систем, на который действуют случайные возмущающие силы типа белого шума.

В упомянутой выше двухтомной монографии Р. М. Сантилли [4, 5] в классе ОДУ задача Гельмгольца рассмотрена, в частности, и в случае вырожденного лагранжиана. При этом понятие вырожденного лагранжиана встречается впервые, по-видимому, в работе П. Дирака [19].

В данной работе рассматривается задача 1 стохастической задачи Гельмгольца, которая в отличие от работ [8–16] предполагает вырожденность функции Лагранжа.

Определение 5. Лагранжиан L называется сингулярным, если

$$\operatorname{rank}\left|\frac{\partial^2 L(x,\,\dot{x})}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\right|_n^n = m < n. \tag{1}$$

Предположим, что имеет место случай полного вырождения лагранжиана

$$\frac{\partial^2 L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \equiv 0, \quad i,k=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу построения по заданному стохастическому уравнению Ито первого порядка

$$F_k(t,x,\dot{x}) = \sigma_{kj}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \quad k=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r} \tag{3}$$

эквивалентного уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = \sigma'_{kj}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \quad \nu=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r}, \tag{4}$$

в косвенном представлении в смысле следующего определения [4, с.121] с учетом случайных возмущений.

Определение 6. Если имеет место тождество

$$h_k^\nu(F_k(t,x,\dot{x}) - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j, \tag{5}$$

$k,\nu=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,r}$, и матрица h_k^ν не является единичной, то представление называется косвенным, в противном случае – прямым.

Предварительно, для решения стохастической задачи Гельмгольца предположим, что для исходного уравнения (3), домноженного на множитель h_k^ν, выполнены условия Гельмгольца как необходимые и достаточные условия существования функции Лагранжа для заданного уравнения. Эти условия, следуя [4, с.194], имеют вид

$$\frac{\partial \widetilde{F}_k}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial \dot{x}_k}; \quad \frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \widetilde{F}_k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{F}_k}{\partial \dot{x}_i}; \qquad i,k=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r} \tag{6}$$

где $\widetilde{F}_k = h_k^\nu F_\nu$.

Далее, для решения поставленной задачи косвенного построения по заданному стохастическому уравнению Ито первого порядка (3) эквивалентного уравнения лагранжевой структуры (4) в силу стохастического дифференцирования Ито [18] раскроем в уравнении (4) выражение $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial x_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_\nu}F_\nu + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_\nu}\sigma_{ij}\sigma_{\nu j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_\nu}\sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j. \tag{7}$$

Из предположения о полной вырожденности лагранжиана (2) следует, что (7) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial x_\nu}\dot{x}_\nu. \tag{8}$$

Следовательно, уравнение (4) с учетом (8) примет следующий вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_k \partial x_\nu}\dot{x}_\nu - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}(t,x,\dot{x})\dot{\xi}^j, \tag{9}$$

а тождество (5) при выполнении условия полной вырожденности лагранжиана (2) в косвенном представлении запишется в виде

$$h_k^\nu(F_\nu(t,x,\dot{x}) - \sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}\dot{\xi}^j, \tag{10}$$

$k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}$. Отсюда, сравнивая коэффициенты в обеих частях тождества (10) приходим к соотношениям

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = h_k^\nu F_k(t,x,\dot{x}), \tag{11}$$

$$\sigma'_{\nu j} = h_k^\nu \sigma_{kj}, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}. \tag{12}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнено условие полного вырождения лагранжиана (2) и для косвенного уравнения*

$$h_k^\nu(F_\nu - \sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j) = 0, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}, \tag{13}$$

выполнены условия Гельмгольца, тогда для косвенного представления стохастического уравнения (3) *в виде стохастического уравнения лагранжевой структуры* (4) *необходимо и достаточно выполнения условий* (11) *и* (12).

Доказательство. *Достаточность.* Пусть задано уравнение (3) и имеет место тождество (5). Тогда из сравнения обеих частей тождества (5) вытекают условия (11) и (12), которые обеспечивают косвенное представление заданного стохастического уравнения (3) в виде стохастического уравнения лагранжевой структуры (4).

Необходимость. Пусть задано стохастическое уравнение лагранжевой структуры (4) и выполнены условия (11), (12). Тогда заданное стохастическое уравнение лагранжевой структуры (4) при выполнении условий (11), (12) переходит в косвенное уравнение (13)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sigma'_{kj}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}^j \equiv h_k^\nu(\dot{x}_\nu - F_\nu - \sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j),$$

$k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}$.

2. Постановка задачи построения лагранжиана по заданному стохастическому уравнению линейному по скоростям. По заданному стохастическому уравнению Ито линейному по скоростям

$$X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k = \sigma_{kj}\dot{\xi}^j, \quad k,i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r} \tag{14}$$

построить стохастическое уравнение лагранжевой структуры (4).

Иначе говоря, требуется определить условия, налагаемые на функции $h_k^\nu, L, \sigma_{\nu j}$, при которых имеет место соотношение (5). В данном случае (5) эквивалентно следующему соотношению

$$h_k^\nu(X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j. \tag{15}$$

Учитывая (8) выражение (15) примет вид

$$h_k^\nu(X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j. \tag{16}$$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях тождества (16) имеем

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_l} = h_k^\nu X_{kl}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = h_k^\nu Y_k, \tag{17}$$

$$\sigma'_{\nu j} = h_k^\nu \sigma_{kj}, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}. \tag{18}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнено условие полного вырождения лагранжиана (2) и для косвенного уравнения*

$$h_k^{\nu}(X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) = 0, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}, \tag{19}$$

выполнены условия Гельмгольца, тогда для косвенного представления стохастического уравнения (14) в виде стохастического уравнения лагранжевой структуры (4) необходимо и достаточно выполнения условий (17) и (18).

Замечание 1. Условия (17),(18) при $\sigma_{kj} \equiv \sigma_{\nu j} \equiv 0$ совпадают с условиями Р.М. Сантилли [4, с. 193].

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

3. Метод построения лагранжиана по заданному стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка типа Ито. Пусть искомый лагранжиан, следуя Сантилли Р. М.[4], имеет вид

$$L = \gamma_k(t,x)\dot{x}_k + \delta(t,x), \quad k = \overline{1,n}. \tag{20}$$

Так как для функции Лагранжа (20) $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} = \dfrac{\partial \gamma_\nu}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k} = \dfrac{\partial \gamma_\nu}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial L}{\partial x_\nu} = \dfrac{\partial \gamma_k}{\partial x_\nu}\dot{x}_k + \dfrac{\partial \delta}{\partial x_\nu}$, то условия (11), (12) в терминах γ, δ эквивалентны следующим соотношениям

$$\frac{\partial \gamma_v}{\partial t} - \frac{\partial \delta}{\partial x_v} = h_k^v F_k(t,x,\dot{x}), \tag{21}$$

$$h_k^v \sigma_{kj} = \sigma'_{vj}, \quad k,v = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}. \tag{22}$$

Тогда из теоремы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие полного вырождения лагранжиана (2) и для косвенного уравнения*

$$h_k^{\nu}(F_\nu - \sigma_{\nu j}\dot{\xi}^j) = 0, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r} \tag{23}$$

выполнены условия Гельмгольца, тогда для косвенного представления уравнения (3) в виде уравнения лагранжевой структуры (4) необходимо и достаточно существования функции Лагранжа вида (20), удовлетворяющего условиям (21), (22).

Аналогично для функции Лагранжа (20) с учетом вида функции $F_k = X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k$ в уравнении (14) условия (17), (18) в терминах γ, δ эквивалентны следующим дифференциальным уравнениям с частными производными

$$\frac{\partial\gamma_v}{\partial x_k} - \frac{\partial\gamma_k}{\partial x_v} = h_l^v X_{lk},\ \frac{\partial\gamma_v}{\partial t} - \frac{\partial\delta}{\partial x_v} = h_k^v Y_k,\ h_k^v \sigma_{kj} = \sigma'_{vj}, k,\nu,l = \overline{1,n}, j = \overline{1,r}. \tag{24}$$

Тогда из теоремы 2 вытекает следующее следствие.

Следствие 2. *Пусть выполнено условие полного вырождения лагранжиана* (2) *и для косвенного уравнения*

$$h_k^\nu(X_{ki}(t,x)\dot{x}_i + Y_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) = 0, \quad k,\nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}, \tag{25}$$

выполнены условия Гельмгольца, тогда для косвенного представления уравнения (14) *в виде уравнения лагранжевой структуры* (4) *необходимо и достаточно существования функции Лагранжа вида* (20), *удовлетворяющего условиям* (24).

4. Примеры построения систем стохастических уравнений с вырожденным лагранжианом.

Пример 1. По заданной системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} (1-2x_1)\dot{x}_2 - 2x_1 = \sigma_1\dot{\xi}, \\ (2x_1-1)\dot{x}_1 - 2x_2 = \sigma_2\dot{\xi}, \end{cases} \tag{26}$$

требуется построить функцию Лагранжа вида

$$L = \gamma_1(x_1,x_2)\dot{x}_1 + \gamma_2(x_1,x_2)\dot{x}_2 + \delta(x).$$

Иначе говоря, рассматривается стохастическая задача прямого представления уравнения (26) в форме уравнения Лагранжа вида (4).

Предварительно проверим выполнение условий Гельмгольца [4, с. 193] для системы уравнений (26), которые являются необходимыми и достаточными условиями существования лагранжиана и которые эквивалентны при $n = 2$ следующим соотношениям:

$$\begin{cases} X_{11} = 0, & \dfrac{\partial X_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X_{21}}{\partial x_1} = 0, \ \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_2}, \\ X_{12} + X_{21} = 0, & \dfrac{\partial X_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial X_{21}}{\partial x_2} = 0, \\ X_{22} = 0. \end{cases} \tag{27}$$

В примере 1 функции X_{ij} и $Y_i \quad (i, j = 1, 2)$ имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} &X_{11} = 0, \;\; X_{12} = 1 - 2x_1, \;\; Y_1 = 2x_1, \\ &X_{22} = 0, \;\; X_{21} = 2x_1 - 1, \;\; Y_2 = 2x_2, \end{aligned}$$

и подставляя их в (27) убеждаемся, что условия Гельмгольца выполняются.

Из условия (17) теоремы 2 следует, что искомые функции $\gamma_1, \gamma_2, \delta$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} = 1 - 2x_1, \;\; -\dfrac{\partial \delta}{\partial x_1} = 2x_1, \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} = 2x_1 - 1, \;\; -\dfrac{\partial \delta}{\partial x_2} = 2x_2. \end{cases}$$

Из полученных условий следует, что для системы уравнений (26) вырожденная функция Лагранжа имеет вид $L = (x_1 + x_2)\dot{x}_1 + (x_1^2 + x_2^2)\dot{x}_2 - (x_1^2 + x_2^2)$, что при $\sigma_1^{'} = \sigma_1$, $\sigma_2^{'} = \sigma_2$ обеспечивает представление системы стохастических уравнений (26) в виде системы стохастических уравнений лагранжевой структуры

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \sigma_1(x, t)\dot{\xi}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \sigma_2(x, t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{28}$$

Пример 2. По заданной системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} (x_2^2 - x_1^2)\dot{x}_2 - x_1^3 \sin t = \sigma_1 \dot{\xi} \\ (x_1^2 - x_2^2)\dot{x}_1 - x_2^3 \sin t = \sigma_2 \dot{\xi} \end{cases} \tag{29}$$

требуется построить функцию Лагранжа вида

$$L = \gamma_1(x_1, x_2)\dot{x}_1 + \gamma_2(x_1, x_2)\dot{x}_2 + \delta(x).$$

Аналогично системе (26) проверяем выполнение условий Гельмгольца [4, с. 193]. В примере 2 при $n = 2$, X_{ij} и Y_i $(i, j = 1, 2)$ имеют соответствующий вид

$$\begin{aligned} &X_{11} = 0, \;\; X_{12} = x_2^2 - x_1^2, \;\; Y_1 = x_1^3 \sin t, \\ &X_{22} = 0, \;\; X_{21} = x_1^2 - x_2^2, \;\; Y_2 = x_2^3 \sin t, \end{aligned}$$

и подстановкой их в (27) убеждаемся, что условия Гельмгольца выполняются. И в терминах функций $\gamma_1, \gamma_2, \delta$, с помощью которых строится лагранжиан, условия (28) перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial x_1} = x_2^2 - x_1^2, \\ \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial x_2} = x_1^2 - x_2^2, \\ -\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1} = x_1^3 \sin t, \\ -\dfrac{\partial\delta}{\partial x_2} = x_2^3 \sin t. \end{cases}$$

Из полученных соотношений для системы уравнений (29) строим вырожденную функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3)\dot{x}_1 + \frac{1}{3}(x_1^3 - x_2^3)\dot{x}_2 - \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4)\sin t,$$

которая при $\sigma_1^{'} = \sigma_1, \sigma_2^{'} = \sigma_2$ обеспечивает представление системы стохастических уравнений (29) в виде системы стохастических уравнений лагранжевой структуры (28).

Список литературы

[1] Гельмгольц Г. *О физическом значении принципа наименьшего действия* //Вариационные принципы механики. М. 1959. С. 430–459.

[2] Mayer A. *Die existenzbeingungen eines kinetischen potentiales* //Ber. Verhand. Kgl. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig. 1896. Vol. 48. P. 519–529.

[3] Суслов Г. К. *О кинетическом потенциале Гельмгольца* //Мат. сб. 1896. Т. 19, № 1. С. 197–210.

[4] Santilli R. M. *Foundations of Theoretical Mechanics. 1. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics.* Springer–Verlag. New–York. 1978.

[5] Santilli R. M. *Foundation of Theoretical Mechanics. 2. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics.* Springer–Verlag. New–York. 1983.

[6] Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов* //Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения /ВИНИТИ. 1992. Т. 40. С. 3–178.

[7] Галиуллин А. С. *Системы Гельмгольца.* М.: Изд-во РУДН, 1995.

[8] Тлеубергенов М. И. *О представлении уравнения Ито второго порядка в виде уравнения лагранжевой структуры* //Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. Алматы. 1997. № 1. С. 53–62.

[9] Тлеубергенов М. И. *Об условиях приведения стохастического уравнения второго порядка к эквивалентному уравнению лагранжевой структуры* //Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. 1997. Алматы. № 3. С. 78–90.

[10] Тлеубергенов М. И. *Метод дополнительных переменных в стохастической задаче Гельмгольца* //Изв. МН–АН РК. Сер. физ.-мат. Алматы. 1996. № 1. С. 49–54.

[11] Тлеубергенов М. И. *К вопросу разрешимости стохастической задачи Гельмгольца* //Изв. МН–АН РК. Сер. физ.-мат. Алматы. 1996. № 3. С. 53–63.

[12] Тлеубергенов М. И. *О методе моментных функций в стохастической задаче Гельмгольца* //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Прикладная математика и информатика» М., 1999. № 1. С. 44–51.

[13] Тлеубергенов М. И. *О представлении уравнения Ито второго порядка в виде уравнения с заданной структурой сил* //Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. Алматы. 1995. № 3. С. 61–68.

[14] Тлеубергенов М. И. *Стохастическая задача Гельмгольца для систем Биркгофа* //Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. Алматы. 1997. № 5. С. 84–92.

[15] Тлеубергенов М. И. *Стохастическая задача Гельмгольца с ограничениями, линейно зависящими от скоростей* //Изв. МН–АН РК. Сер. физ.-мат. Алматы. 1998. № 1. С. 80–85.

[16] Тлеубергенов М. И. *Задача Гельмгольца для стохастических дифференциальных систем* //Матем. журнал МОН РК. Алматы. 2001. Т. 1, №1. С. 84–93.

[17] Ватанабэ С., Икэда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* М., 1986.

[18] Пугачев В. С., Синицын И. Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация.* М. 1990.

[19] Dirac P. A. M. *Generalized Hamiltonian Dynamics* //Proc. Roy. Soc. 1958. Ser. A. Vol. 246, № 246. P. 326–332.