ISSN 3231-0367

ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

3
1984

УДК 330.115 : 62-50

Л. А. ПИЛИПЧУК

К ДВОЙСТВЕННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТЕВОЙ ЗАДАЧИ

В работе [1] Р. Ф. Габасова и Ф. М. Кирилловой изложен прямой опорный метод решения разнообразных задач линейного программирования. В [2—3] рассматривается прямой опорный метод решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительными ограничениями в следующей постановке:

$$\sum_{k\in K}\sum_{(i,\,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min,\quad \sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = a_i^k,\ i\in I,\ k\in K,$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{(i,\,j)\in U} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p,\ p=\overline{1,\ l},\ x_{ij}^k \geqslant 0,\ x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U,\ k\in K, \quad (1)$$

здесь для $S=\{I,\ U\}$ — сети, $U=\bigcup U^k$, $K=\{1,\ 2\}$. $|I|<\infty$, $I_i^+(U^k) = \{j:(i,\ j)^k\in U^k\}$, $I_i^-(U^k)=\{j:(j,\ i)\in U^k\}$, заданы следующие характеристики: $a_i=\{a_i^k,\ k\in K\}$ — интенсивность узла $i\in I$; d_{ij} — пропускная способность дуги $(i,\ j)$, $(i,\ j)\in U$; $x_{ij}=\{x_{ij}^k,\ k\in K(i,\ j)\}$ — мультипоток по дуге $(i,\ j)\in U$; $c_{ij}=\{c_{ij}^k,\ k\in K(i,\ j)\}$ — стоимость единичного дугового мультипотока.

В настоящей работе для задачи (1) строится двойственный алгоритм. Задача, двойственная к (1), имеет вид:

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I} a_i^k u_i^k - \sum_{(i,\,j)\in U} d_{ij} w_{ij} + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p \to \max,$$

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p \leqslant c_{ij}^k,\ w_{ij}\geqslant 0,\ (i,\ j)\in U,\ k\in K. \quad (2)$$

Совокупность чисел $(u^k,\ k\in K;\ r,\ w)=(u_i^k,\ i\in I,\ k\in K;\ r_p,\ p=\overline{1,\ l};\ w_{ij},\ (i,\ j)\in U)$, удовлетворяющую ограничениям задачи (2), назовем двойственным планом задачи (1). Каждому двойственному плану $(u^k,\ k\in K;\ r,\ w)$ поставим в соответствие копоток δ: $\delta=\{\delta_{ij}^k,\ (i,\ j)\in U,\ k\in K\}$, $\delta_{ij}^k=u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-c_{ij}^k$.

Будем считать, что копоток δ согласован с двойственным планом $\{u^k,\ k\in K;\ r,\ w\}$:

$$w_{ij}=\max\{0,\ \delta_{ij}^1,\ \delta_{ij}^2\}. \tag{3}$$

Определим опору $U_{\text{оп}}=\{U_{\text{оп}}^1,\ U_{\text{оп}}^2,\ U^*\}$ сети S таким же образом, как и в [2]. Совокупность $\{\delta,\ U_{\text{оп}}\}$ из копотока и опоры назовем опорным копотоком.

Опорный копоток $\{\delta,\ U_{\text{оп}}\}$ считаем вырожденным, если для него выполняется одно из следующих условий:

1) существует такая дуга $(i,\ j)^k\in U_{\text{н}}^k$, что $\delta_{ij}^k=0$ или $(i,\ j)^k\in U_{\text{н}}^k$, на которой $w_{ij}=\delta_{ij}^k=0$, $U_{\text{н}}^k=U\setminus U_{\text{оп}}^k$, $k\in K$;

2) существует дуга $(i,j)\in U_{\text{н}}^1\cap U_{\text{н}}^2$ или $(i,\ j)\in U_{\text{оп}}^l\cap U_{\text{н}}^l$, $l\in K$, $k\in K$, $l\neq k$, где $w_{ij}=\delta_{ij}^1=\delta_{ij}^2$, $w_{ij}>0$;

3) существует такая дуга $(i,\ j)\in U^*$, что $w_{ij}=\delta_{ij}^k=0$, $k\in K$.

Пусть $\{\delta,\ U_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный копоток. Построим по нему псевдопоток $\varkappa=(\varkappa_{ij},\ (i,\ j)^k\in U^k,\ k\in K)$. Сначала найдем неопорные псевдопотоки:

$$\varkappa_{ij}^k=0,\ \text{если}\ \delta_{ij}^k<0\ \text{или}\ \delta_{ij}^k<w_{ij},\quad \varkappa_{ij}^l=d_{ij}\ \ w_{ij}=\delta_{ij}^l,\ \ l\neq k,\ \text{если}\ w_{ij}=\delta_{ij}^l>0,\ (i,\ j)^l\in U_{\text{н}}^l. \tag{4}$$

Опорные дуговые псевдопотоки однозначно найдутся из системы:

$$\sum_{j\in I_i^+(U_{\text{оп}}^k)}\varkappa_{ij}^k-\sum_{j\in I_i^-(U_{\text{оп}}^k)}\varkappa_{ji}^k=a_i^k-\sum_{j\in I_i^+(U_{\text{н}}^k)}\varkappa_{ij}^k+\sum_{j\in I_i^-(U_{\text{н}}^k)}\varkappa_{ji}^k,\quad \varkappa_{ij}^1+\varkappa_{ij}^2=d_{ij},$$

$$(i,\ j)\in U^*,\ \sum_{k\in K}\ \sum_{(i,\ j)^k\in U_{\text{оп}}^k}\lambda_{ij}^{kp}\varkappa_{ij}^k=\alpha_p-\sum_{k\in K}\ \sum_{(i,\ j)^k\in U_{\text{н}}^k}\lambda_{ij}^{kp}\varkappa_{ij}^k. \tag{5}$$

Приведем способ решения системы (5). Из системы уравнений:

$$\sum_{k\in K}\ \sum_{(\gamma,\ \rho)^k\in U_a^k}\varkappa_{\gamma\rho}^k R_p(L(\gamma,\ \rho)^k)=\alpha_p-\sum_{k\in K}\ \sum_{(\xi,\ \eta)^k\in U_{\text{н}}^k}\varkappa_{\xi\eta}^k\times$$

$$\times R_p(L(\xi,\ \eta)^k)-\sum_{k\in K}\sum_{r\in I}a_r^k R_p(L_r^k),$$

$$\sum_{k\in K}\ \sum_{(\gamma,\ \rho)^k\in U_a^k}\varkappa_{\gamma\rho}^k\,\delta_{\tau(i,\ j),\ L(\xi,\ \eta)^k}=d_{ij}-\sum_{k\in K}\ \sum_{(\xi,\ \eta)^k\in U_{\text{н}}^k}\varkappa_{\xi\eta}^k\times$$

$$\times\operatorname{sign}(i,\ j)_{L(\xi,\ \eta)^k}^k-\sum_{k\in K}\sum_{r\in I}a_r^k\operatorname{sign}(i,\ j)^k L_r^k,$$

где величины $\delta_{\tau(i,\ j),\ L(\gamma,\ \rho)^k}$, $R_p(L_{(\gamma,\ \rho)^k})$, $L(\gamma,\ \rho)^k$ определены таким же образом, как и в [2—3], найдем однозначно псевдопотоки на дугах $(i,\ j)^k\in U_a^k$, $U_a^k=U_{\text{оп}}^k\setminus U_{\text{д}}^k$, $U_{\text{д}}^k$ — остовное дерево в частичной сети $S_k=\{I,U_{\text{оп}}^k\}$, $k\in K$, так как матрица коэффициентов системы неособая. Остальные опорные псевдопотоки $\varkappa_{ij}^k$, $(i,\ j)^k\in U_{\text{д}}^k$ вычислим из условий баланса. Теорема (критерий оптимальности). Соотношения

$$\varkappa_{ij}^k=0\ \text{при}\ \delta_{ij}^k<w_{ij};\quad \sum_{k\in K_{\text{оп}}^0(i,\ j)}\varkappa_{ij}^k=d_{ij},\ \varkappa_{ij}^k\geqslant 0,\ K_{\text{оп}}^0(i,\ j)=$$

$= \{k \in K_{\text{оп}}(i, j) : w_{ij} = \delta_{ij}^k, \ w_{ij} > 0\}$, если $K_{\text{оп}}^0(i, j) \neq \varnothing$; $\varkappa_{ij}^k \geqslant 0$,

$$\sum_{k \in K_{\text{оп}}^1(i, j)} \varkappa_{ij}^k < d_{ij}, \ K_{\text{оп}}^1(i, j) = \{k \in K_{\text{оп}}(i, j) : w_{ij} = \delta_{ij}^k = 0\},$$

$$\text{если } K_{\text{оп}}^1(i, j) \neq \varnothing, \tag{6}$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного копотока $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$.

Предположим, что опорные компоненты псевдопотока удовлетворяют ограничениям:

$$\varkappa_{ij}^k \geqslant 0, \ k \in K_{\text{оп}}(i, j), \ (i, j) \in U; \ \sum_{k \in K_{\text{оп}}(i, j)} \varkappa_{ij}^k \leqslant d_{ij} - $$
$$- \sum_{k \in K_{\text{н}}(i, j)} \varkappa_{ij}^k, \ (i, j) \in U. \tag{7}$$

Вычислим величину β:

$$\beta = - \sum_{(i, j) \in U_0^1} \sum_{k \in K_{\text{оп}}(i, j)} \varkappa_{ij}^k \delta_{ij}^k - \sum_{(i, j) \in U_0^2} (\varkappa_{ij}^k \delta_{ij}^k + \delta_{ij}^{p_0(i, j)} (d_{ij} -$$
$$- \varkappa_{ij}^{p_0(i, j)})), \ U_0^1 = \{(i, j) \in U : w_{ij} = 0\}, \ U_0^2 = \{(i, j) \in U : \omega_{ij} = \delta_{ij}^{p_0(i, j)} > 0$$

Достаточное условие субоптимальности. Если для псевдопотока $\varkappa$, построенного по опорному копотоку $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$, выполняются соотношения (7) и $\beta \leqslant \varepsilon$, то $\varkappa$ — субоптимальный (ε — оптимальный) копоток.

Предположим, что критерий оптимальности и достаточное условие субоптимальности не выполняются.

На опорных дугах $(i, j)^k \in U_{\text{оп}}^k$, $k \in K_{\text{оп}}(i, j)$, на которых нарушаются соотношения (6), отметим числа $\varkappa_{ij}^k$, если $\delta_{ij}^k < w_{ij}$, или $\varkappa_{ij}^k < 0$, $k \in K_{\text{оп}}^0(i, j) \cup K_{\text{оп}}^1(i, j)$, и число $\sum_{k \in K_{\text{оп}}^0(i, j)} \varkappa_{ij}^k - d_{ij}$, если $K_{\text{оп}}^0(i, j) \neq \varnothing$ или $\sum_{k \in K_{\text{оп}}^1(i, j)} \varkappa_{ij}^k - d_{ij}$ при $\sum_{k \in K_{\text{оп}}^1(i, j)} \varkappa_{ij}^k > d_{ij}$, $K_{\text{оп}}^1(i, j) \neq \varnothing$. Пусть $(i_0, j_0)^k \in K_0$, $|K_0| = 2$ при $K_0 = K_{\text{оп}}^0(i, j) \cup K_{\text{оп}}^1(i, j)$ (в остальных случаях $|K_0| = 1$). Обозначим через v^0 — максимальное по модулю среди отмеченных чисел. Построим подходящее направление $t = (t_{ij}, (i, j) \in U)$, $t_{ij} = \{t_{ij}^k, k \in K(i, j)\}$ для копотока δ:

$$t_{i_0 j_0}^k = \begin{cases} \operatorname{sign} v_0, & \text{если } (i_0, j_0) \overline{\in} U^*, \\ \beta_{i_0 j_0} + \operatorname{sign} v^0, & \text{если } (i_0, j_0) \in U^*, \ k \in K, \end{cases}$$

$t_{ij}^k = \Delta u_i^k - \Delta u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} \Delta r_p$, $(i, j)^k \in U_{\text{н}}^k$, $k \in K$, где Δu_i^k, $i \in I$, — приращения потенциалов узлов, которые вычисляются аналогично [2]. Следуя [1], вычислим величину максимального двойственного шага σ^0. Если $\sigma^0 = \sigma_{i_* j_*}^k < \infty$, перейдем к новому копотоку $\overline{\delta}$, $\overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t$.

В случае невырожденности описанный алгоритм является конечным, что следует из конечности двойственного опорного метода [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования.— Минск, 1977, ч. 1.

2. Пилипчук Л. А. Мультипоток минимальной стоимости с дополнительными ограничениями на частичные суммы дуговых потоков.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2522-81. Деп. от 28.05.81.

3. Пилипчук Л. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1, с. 42.

Поступила в редакцию
21.02.83.

Кафедра общего программирования